

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXIV.

I. Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion; von H. Hertz.

Vor kurzem habe ich versucht, durch das Experiment zu beweisen¹⁾, dass die Inductionswirkung sich mit endlicher Geschwindigkeit durch den Luftraum ausbreitet. Die Schlüsse, auf welche jener Beweis gegründet wurde, scheinen mir nun auch vollkommen bündig, allein dieselben sind in verwickelter Weise aus verwickelten Thatsachen hergeleitet und sind daher vielleicht nicht eben einleuchtend für denjenigen, welcher nicht der ganzen Anschauungsweise von vornherein ein günstiges Vorurtheil entgegenbringt. In dieser Hinsicht wird jener Beweis passend ergänzt durch die Betrachtung der in Folgendem mitzutheilenden Erscheinungen, welche die wellenförmige Ausbreitung der Induction durch den Luftraum fast greifbar vor die Augen führen. Auch gestatten diese neuen Erscheinungen eine unmittelbare Messung der Wellenlänge in der Luft. Dass sich für denselben Apparat die so direct gemessene Länge von der früher indirect bestimmten nur wenig unterscheidet, wird als Zeichen dienen können, dass auch schon der frühere Beweis im wesentlichen richtig geführt war.

Vielfach hatte ich in den Versuchen, in welchen ich die Wirkung einer geradlinigen Schwingung auf einen secundären Leiter prüfte, Erscheinungen beobachtet, welche eine Reflexion der Inductionswirkung von den Wänden des Gebäudes anzudeuten schienen. So traten häufig auch in solchen Lagen des secundären Kreises schwache Funken auf, in welchen dies schon aus geometrischen Gründen der Symmetrie durch eine unmittelbare Wirkung durchaus nicht geschehen konnte, und zwar vorzugsweise in der Nähe fester

1) H. Hertz, Sitzungsber. d. Berl. Acad., 9. Febr. 1888, auch abgedruckt im vorigen Heft dieser Annalen.

Wände. Besonders aber trat mir mit Beständigkeit folgende Erscheinung entgegen: Prüfte ich die Funken im secundären Leiter in sehr grossen Entfernungen vom primären Leiter, woselbst die Funken schon äusserst schwach waren, so bemerkte ich, dass in den meisten Lagen des secundären Kreises die Funken wieder sehr deutlich zunahmen, wenn ich mich einer festen Wand näherte, um dann in unmittelbarer Nähe derselben fast plötzlich zu verschwinden. Die einfachste Erklärung schien mir diese, anzunehmen, dass die sich wellenförmig ausbreitende Inductionswirkung von den Wänden reflectirt würde, und dass die zurückgeworfenen Wellen die ankommenden in gewissen Entfernungen verstärkten, in anderen schwächten, indem durch die Interferenz beider stehende Wellen im Luftraum sich ausbildeten. Indem ich die Bedingungen für eine Reflexion mehr und mehr günstig gestaltete, trat die Erscheinung mehr und mehr hervor, und die gegebene Deutung wurde immer wahrscheinlicher. Ich halte mich indess bei den unvollkommenen Versuchen nicht auf, sondern gehe unmittelbar zur Beschreibung der Hauptversuche über.

Der Hörsaal der Physik, in welchem diese Versuche angestellt wurden, ist nahe an 15 m lang, 14 m breit, 6 m hoch. Parallel mit den beiden Längswänden ziehen sich indessen zwei Reihen eiserner Säulen hin, deren Gesamtheit sich für die electrodynamische Wirkung wohl schon mehr wie eine feste Wand verhält, sodass die ausserhalb derselben gelegenen Theile des Raumes nicht mitgerechnet werden können. Es blieb daher für die Versuche der Mittelraum von 15 m Länge, 8,5 m Breite, 6 m Höhe. Aus diesem Raum liess ich die hängenden Theile der Gasleitungen und die metallenen Kronleuchter entfernen, sodass er nichts enthielt als die hölzernen Tische und Bänke, welche nicht wohl entfernt werden konnten, von denen aber eine schädliche Wirkung weder zu erwarten war, noch sich geltend machte. Die eine der Stirnwände des Raumes, an welcher die Reflexion stattfinden sollte, war eine von zwei Thüröffnungen durchbrochene massive Sandsteinwand; zahlreiche Gasleitungen zogen sich an derselben hin. Um der Wand noch mehr den Charakter

einer leitenden Fläche zu ertheilen, wurde an derselben ein Zinkblech von 4 m Höhe und 2 m Breite befestigt; dasselbe wurde durch Drähte mit den Gasleitungen und einer nahen Wasserleitung in Verbindung gesetzt, insbesondere wurde Sorge getragen, dass von dem oberen und unteren Ende des Blechs die sich daselbst etwa ansammelnde Electricität möglichst frei abfliessen konnte.

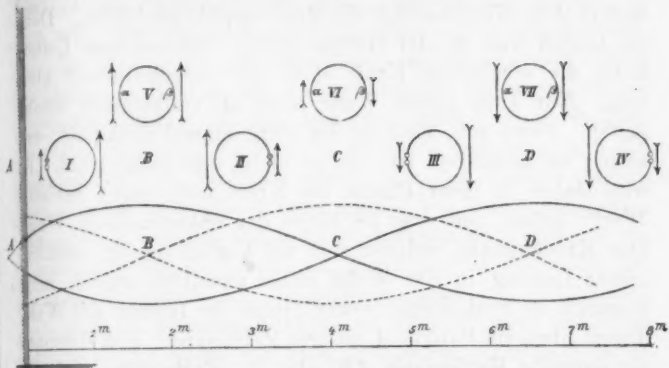
Gegenüber der Mitte dieser Wand in 13 m Abstand von derselben, also in 2 m Abstand von der Gegenwand wurde der primäre Leiter aufgestellt. Es war derselbe Leiter, welcher bei den früheren Versuchen über die Ausbreitungsgeschwindigkeit gedient hatte. Die Richtung des leitenden Drahtes wurde jetzt vertical gestellt, es schwanken dann auch die in Betracht kommenden Kräfte in verticaler Richtung auf und ab. Der Mittelpunkt des primären Leiters lag 2,5 m über dem ebenen Fussboden; in gleicher Entfernung über demselben wurden auch die Beobachtungen angestellt, indem in entsprechender Höhe aus Tischen und Brettern ein Gang für den Beobachter hergestellt war. Eine von dem Mittelpunkt des primären Leiters auf die spiegelnde Fläche gefällte Senkrechte nennen wir das Einfallslloth. Unsere Versuche beschränken sich auf die Nähe desselben; Versuche bei einem grösseren Einfallswinkel würden sich compliciren durch die Rücksicht, welche auf die verschiedene Polarisation der Wellen zu nehmen wäre. Eine Verticalebene, welche dem Einfallslloth parallel liegt, ist in unseren Versuchen als eine Schwingungsebene, eine zum Einfallslloth senkrechte Ebene als eine Wellenebene zu bezeichnen.

Der secundäre Leiter war der ebenfalls schon früher benutzte Kreis von 35 cm Radius. Er war in sich selbst drehbar auf einer Axe befestigt, welche durch seinen Mittelpunkt ging und senkrecht auf seiner Ebene stand. Diese Axe lag in den Versuchen horizontal; sie war in einem Holzgestell so befestigt, dass sie mitsammt dem Kreise um eine verticale Axe gedreht werden konnte. Es genügt freilich für die meisten Versuche, dass der Beobachter den in seinem isolirenden Holzgestell befestigten Kreis in der Hand halte und ihn so auf das bequemste in die verschiedenen Lagen bringe.

Allein da der Körper des Beobachters immer ein wenig Einfluss hat, müssen die so erhaltenen Beobachtungen durch Beobachtungen aus grösserem Abstand controlirt werden. Die Funken sind auch kräftig genug, um im Dunkeln aus einer Entfernung von mehreren Metern gesehen zu werden, im hellen Zimmer ist freilich von den zu beschreibenden Erscheinungen auch aus der Nähe so gut wie nichts wahrzunehmen.

Die Erscheinung, welche uns nach solchen Zurüstungen am auffälligsten entgegentritt, ist die folgende: Wir bringen den Mittelpunkt unseres secundären Kreises in das Einfallslot, die Ebene desselben in die Schwingungsebene und kehren nun die Funkenstrecke einmal der reflectirenden Wand zu, das andere mal von derselben ab. Im allgemeinen fallen in beiden Lagen die Funken sehr verschieden aus. Stellen wir den Versuch an in etwa 0,8 m Entfernung von der Wand, so sind die Funken weit kräftiger, wenn die Funkenstrecke der Wand zugekehrt ist. Wir können die Länge der Funken so reguliren, dass ein beständiger Funkenstrom übergeht, wenn die Funkenstrecke der Wand zugekehrt ist, und dass durchaus kein Funke übergeht in der entgegengesetzten Lage. Wiederholen wir den Versuch in 3 m Entfernung von der Wand, so finden wir umgekehrt einen beständigen Funkenstrom in der von der Wand abgekehrten, und Funkenlosigkeit in der der Wand zugekehrten Funkenstrecke. Entfernen wir uns weiter bis auf 5,5 m, so hat eine neue Umkehr stattgefunden, der Funke auf der Seite der Wand ist im Vortheil gegenüber dem Funken auf der anderen Seite. Endlich in 8 m Entfernung von der Wand finden wir, dass sich ein abermaliger Wechsel vollzogen hat, der Funke ist stärker auf der von der Wand abgekehrten Seite, doch ist der Unterschied nicht mehr so bedeutend. Auch findet eine weitere Umkehr nicht statt, die überwiegende Stärke der directen Wirkung und die in der Nähe der primären Schwingung stattfindenden complicirten Kräfte verhindern dies. Unsere Figur, in welcher der Maassstab die Entfernungen von der Wand angibt, stellt in I, II, III, IV den secundären Kreis in denjenigen Lagen dar, in welchen die Entwicklung der

Funken die stärkere war. Der alternirende Charakter der Zustände des Raumes tritt deutlich hervor.



In den Entfernungen, welche zwischen den erwähnten liegen, werden die beiden in Betracht kommenden Funken gleich gross, und auch in unmittelbarer Nachbarschaft der Wand nimmt der Unterschied der Funken wieder ab. Wir können also diese Punkte, nämlich die Punkte *A, B, C, D* der Figur in gewissem Sinne als Knotenpunkte bezeichnen. Doch dürfen wir nicht etwa die Strecke von einem dieser Punkte zum nächsten für die halbe Wellenlänge halten. Denn wenn alle electrischen Bewegungen ihre Richtung bei Ueberschreitung eines jener Punkte umkehrten, so müssten sich die Erscheinungen im secundären Kreise ohne Umkehr wiederholen, da sich die Richtung der Schwingung in der Funkenlänge nicht ausspricht. Vielmehr ist aus diesen Versuchen zu schliessen, dass sich bei Ueberschreitung eines jeden jener Punkte ein Theil der Wirkung umkehre, ein anderer Theil aber nicht. Zulässig ist dagegen die Annahme, dass die doppelte Entfernung jener Punkte der halben Wellenlänge entspreche, sodass diese Punkte das Ende je einer Viertelwellenlänge bezeichnen. In der That kommen wir auf Grund dieser Annahme und der schon ausgesprochenen Grundanschauung zu einer vollständigen Erklärung des Phänomens.

Denken wir uns nämlich, eine Welle verticaler, electrischer Kraft laufe gegen die Wand, werde mit wenig vermin-

derter Intensität reflectirt und gebe so Anlass zu stehenden Wellen. Wäre die Wand vollkommen leitend, so müsste sich in ihrer Fläche selber ein Knotenpunkt ausbilden. Denn im Innern und an der Grenze eines vollkommenen Leiters kann die electriche Kraft stets nur verschwindend klein sein. Nun kann unsere Wand nicht als vollkommen leitend gelten. Denn zum Theil ist sie nicht einmal metallisch, und soweit sie metallisch ist, ist sie nicht sehr ausgedehnt. Es wird daher in ihrer Fläche die Kraft noch einen gewissen Werth haben, und zwar im Sinne der ankommenden Welle. Der Knotenpunkt, welcher sich bei Vorhandensein vollkommener Leitung in der Wand selbst ausbilden würde, muss demnach in Wirklichkeit etwas hinter der Grenze der Wand liegen, etwa im Punkte *A* unserer Zeichnung. Soll demnach die doppelte Entfernung *AB*, also die Entfernung *AC*, der halben Wellenlänge entsprechen, so sind die geometrischen Verhältnisse der stehenden Welle von der Art, wie sie in der üblichen Symbolik durch die ausgezogene Wellenlinie der Figur dargestellt ist. Die Kräfte, welche auf die beiden Seiten des Kreises in den Lagen I, II, III, IV wirken, sind dann nach Grösse und Richtung für einen bestimmten Augenblick richtig durch die beigesetzten Pfeile dargestellt. Ist also in der Nähe eines Knotenpunktes die Funkenstrecke dem Knotenpunkte zugekehrt, so wirkt in dem Kreise eine stärkere Kraft unter günstigen Verhältnissen gegen eine unter ungünstigen Verhältnissen wirkende schwächere Kraft. Ist aber die Funkenstrecke vom Knotenpunkt abgewandt, so wirkt jetzt die stärkere Kraft unter ungünstigen Verhältnissen gegen die nunmehr unter günstigen Verhältnissen wirkende schwächere Kraft. Welche Kraft auch in letzterem Falle das Uebergewicht hat, unter allen Umständen müssen die Funken in letzterem Falle schwächer ausfallen, als in ersterem, und so erklärt sich der Wechsel des Vorzeichens unserer Erscheinung nach jeder Viertelwellenlänge.

Unsere Erklärung gibt selbst die Mittel an die Hand, ihre Richtigkeit weiter zu prüfen. Ist sie richtig, so muss der Wechsel des Vorzeichens im Punkte *B* und *D* in ganz anderer Weise erfolgen, als im Punkte *C*. Die Figur stellt

in *V*, *VI*, *VII* den Kreis in diesen Lagen mit den wirkenden Kräften dar, und man ersieht leicht: führen wir in *B* oder *D* die Funkenstrecke durch Drehung des Kreises in sich selbst aus der einen in die andere Lage über, so wechselt die Schwingung ihre Richtung relativ zu einer festen Richtung im Kreise, die Funken müssen daher bei dieser Drehung einmal oder eine ungerade Zahl von malen Null werden. Hingegen wechselt bei gleichem Verfahren in *C* die Schwingung ihre Richtung nicht, und die Funken müssen also keinmal oder eine gerade Anzahl von malen verschwinden. Wenn wir nun den Versuch wirklich ausführen, so bemerken wir in der That: In *B* nimmt die Intensität der Funken ab, sobald wir die Funkenstrecke aus α entfernen, wird Null im höchsten Punkte und wächst wieder auf ihren Anfangswerth, wenn wir nach β kommen. Aehnlich in *D*. In *C* hingegen bleiben bei der Drehung die Funken unverändert bestehen, sie sind eher etwas stärker im höchsten und im tiefsten Punkte, als in den bisher von uns betrachteten. Uebrigens fällt dem Beobachter auch der Umstand auf, dass die Umkehr des Vorzeichens in *C* bei einer viel kleineren Verschiebung erfolgt, als in *B* und *D*, sodass auch in dieser Hinsicht ein Gegensatz der Umkehr in *C* und derjenigen in *B* und *D* hervortritt.

Noch auf eine andere sehr directe Weise können wir das Bild, welches wir von der electrischen Welle entworfen haben, bestätigen. Stellen wir nämlich jetzt die Ebene unseres Kreises anstatt in die Schwingungsebene in die Wellenebene ein, so ist die electrische Kraft in allen Theilen des Kreises gleich stark, und bei gleicher Lage der Funken wird die Intensität derselben einfach dieser electrischen Kraft proportional sein. Die Funken sind nun, wie zu erwarten, in allen Entfernungen Null im höchsten und im tiefsten Punkte des Kreises, im Maximum in den Punkten, welche in einer Horizontalebene mit dem Einfallslot liegen. In eine der letzteren Lagen bringen wir also die Funkenstrecke und entfernen uns langsam von der Wand. Wir bemerken: Unmittelbar an der leitenden Metallfläche sind keine Funken vorhanden, doch treten schon in sehr kleinem Abstand solche auf; die-

selben wachsen schnell und erreichen in *B* relativ beträchtliche Stärke, um dann wieder abzunehmen. In *C* sind sie wieder äusserst schwach, wachsen aber wieder bei weiterem Vorschreiten. Ein nochmaliges Abnehmen findet allerdings nicht statt, sondern wegen der wachsenden Annäherung an die primäre Schwingung wachsen auch die Funken dauernd weiter. Würden wir in dem Intervall *AD* die Stärke der Funken durch eine Curve veranschaulichen, die wir mit positivem und negativem Vorzeichen aufrügen, so würden wir angenähert unmittelbar die gezeichnete Curve erhalten. Vielleicht wären wir daher auch besser von diesem Versuch ausgegangen. Allein in Wirklichkeit ist er nicht so auffallend, wie der erstbeschriebene, und ausserdem erscheint der periodische Wechsel eines Vorzeichens als ein deutlicherer Beweis einer Wellenbewegung als ein periodisches An- und Abschwellen.

Wir sind nunmehr ganz sicher, in *A* und *C* Knotenpunkte, in *B* und *D* aber Bäuche der electricischen Welle erkannt zu haben. Im anderen Sinne dürfen wir indess auch *B* und *D* als Knotenpunkte bezeichnen. Es sind nämlich diese Punkte die Knoten einer stehenden Welle magnetischer Kraft, welche nach der Theorie die electricische Welle begleitet und um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge gegen dieselbe verschoben ist. Durch den Versuch können wir diese Aussage in folgender Weise erläutern. Wir stellen unseren Kreis wieder in die Schwingungsebene ein, bringen aber jetzt die Funkenstrecke in den höchsten Punkt. In dieser Lage vermöchte die electricische Kraft, wenn sie homogen im ganzen Bereiche des secundären Kreises wäre, keine Funken hervorzurufen. Sie bringt eine Wirkung nur dadurch hervor, dass sie verschieden gross in den verschiedenen Theilen des Kreises ist, und dass ihr um den Kreis genommenes Integral nicht verschwindet. Dies Integral ist proportional der Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche durch den Kreis hin und her schwanken. Insofern dürfen wir sagen, dass die Funken in dieser Lage die magnetische Kraft, welche senkrecht auf der Ebene des Kreises steht, messen. Wir finden nun aber in dieser Lage in der Nähe der Wand lebhaftere Funken, welche schnell ab-

nehmen, in *B* verschwinden, wieder wachsen bis *C*, dann wieder abnehmen bis zu einem deutlichen Minimum in *D*, um bei weiterer Annäherung an die primäre Schwingung dauernd zu wachsen. Tragen wir die Stärke dieser Funken als Ordinaten mit positivem und negativem Vorzeichen auf, so erhalten wir nahezu die punktirte Linie unserer Figur, welche uns dann richtig die magnetische Welle darstellt. Die von uns zuerst beschriebene Erscheinung können wir auch erklären als hervorgehend aus dem Zusammenwirken der electricischen und der magnetischen Kraft. Erstere kehrt ihr Zeichen um in den Punkten *A* und *C*, letztere in den Punkten *B* und *D*; in jedem dieser Punkte kehrt also der eine Theil der Wirkung das Zeichen um, während der andere das Zeichen bewahrt; so kehrt demnach die resultirende Wirkung (wie das Product) ihr Zeichen nach jedem jener Punkte um. Selbstredend unterscheidet sich diese Erklärung nicht dem Sinne, sondern nur der Ausdrucksweise nach von der zuerst gegebenen.

Bisher haben wir nur die Erscheinungen in einigen hervorragenden Lagen des Kreises und der Funkenstrecke betrachtet. Die Zahl der Uebergänge zwischen denselben ist in dreifachem Sinne unendlich. Begnügen wir uns deshalb, die Uebergänge zu beschreiben für den Fall, dass die Ebene des Kreises in der Schwingungsebene liegt. In der Nähe der Wand ist der Funke im Maximum auf der Seite der Wand, im Minimum auf der abgekehrten Seite, und bei Drehung des Kreises in sich geht der Funke von dem einen Werth in den anderen über, ohne andere als mittlere Werthe anzunehmen; Nullpunkte finden sich nicht im Kreise. Entfernen wir uns von der Wand, so wird der Funke auf der abgewandten Seite immer schwächer und wird Null in einer Entfernung, welche sich bis auf einige Centimeter ermitteln lässt, nämlich dann, wenn der Mittelpunkt des Kreises 1,08 m von der Wand absteht. Schreiten wir weiter, so treten wieder Funken in der von der Wand abgekehrten Funkenstrecke auf, dieselben sind zunächst immer noch schwächer, als diejenigen auf der Seite der Wand, aber die Stärke der Funken geht nicht einfach durch mittlere Werthe von dem einen auf

den anderen Werth über, sondern bei Drehung des Kreises in sich wird der Funke Null einmal in der oberen und einmal in der unteren Hälfte des Kreises. Die beiden Nullpunkte entwickeln sich aus dem einen, welcher sich zuerst gebildet hatte, und entfernen sich immer mehr voneinander, bis sie im Punkte *B* in den höchsten und den tiefsten Punkt des Kreises fallen. Durch dieses Zeichen kann der Punkt *B* ziemlich genau bestimmt werden, genauer jedoch durch die weitere Beobachtung der Nullpunkte. Bei weiterem Vorgehen gleiten dieselben jetzt an der der Wand zugekehrten Seite des Kreises hinunter, nähern sich einander und fallen wieder in einer scharf bestimmbar Entfernung von der Wand in einen Nullpunkt zusammen. Die Entfernung des Mittelpunktes von der Wand beträgt dabei 2,35 m. Genau zwischen diesem und dem erstbeobachteten analogen Punkte, also in 1,72 m Abstand von der Wand muss der Punkt *B* liegen, was mit der directen Beobachtung bis auf wenige Centimeter stimmt. Schreiten wir weiter gegen *C* vor, so nähern sich die Funken in allen Punkten des Kreises der Gleichheit, um in *C* dieselbe zu erreichen. Hinter *C* beginnt dann das beschriebene Spiel von neuem. In diesem Bereiche finden sich keine Nullpunkte im Kreise. Trotzdem kann die Lage des Punktes *C* ziemlich genau bestimmt werden, da sich die erstbeschriebenen Erscheinungen in seiner Nähe sehr schnell ändern. In meinen Versuchen lag *C* 4,10 bis 4,15 m, sagen wir 4,12 m von der Wand ab. Der Punkt *D* war nicht mehr genau bestimmbar, da hier die Erscheinungen schon ziemlich verwaschen waren, nur soviel konnte gesagt werden, dass derselbe zwischen 6 und 7,5 m Abstand von der Wand hatte. Wegen der Erklärung der beschriebenen Einzelheiten darf ich wohl auf eine vorausgegangene Arbeit¹⁾ verweisen. Die dort angedeuteten mathematischen Entwicklungen liessen sich hier sogar beträchtlich weiter führen. Doch erscheinen die Versuche auch ohne Rechnung verständlich genug.

Die Entfernung zwischen *B* und *C* beträgt nach unserer Messung 2,4 m. Nehmen wir diesen Werth als genau an, so

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34. p. 155. 1886.

liegt der Knotenpunkt *A* 0,68 m hinter der Wand, der Punkt *D* 6,52 m vor derselben, was hinlänglich mit der Erfahrung stimmt. Die halbe Wellenlänge beträgt hiernach 4,8 m. Für den gleichen Apparat hatte ich durch eine indirecte Methode die halbe Wellenlänge 4,5 m erhalten. Der Unterschied ist nicht so gross, dass wir nicht in der neuen Messung eine Bestätigung der alten sehen dürften. Setzen wir in unsere früheren Messungen 2,9 statt 2,8 m für die Wellenlänge im Draht; 7,1 statt 7,5 m für die Länge der Coincidenz, welches man mit den Beobachtungen noch verträglich finden wird, so erhalten wir aus den alten Beobachtungen den neuen Werth. Uebrigens dürfte vielleicht ein mittlerer Werth der Wahrheit am nächsten kommen, es erscheint mir nicht sehr wahrscheinlich, dass der Knotenpunkt *A* fast 0,7 m hinter der metallischen Wand liegen sollte. Die Schwingungsdauer unseres Apparates beträgt bei Annahme einer mittleren Wellenlänge und der Lichtgeschwindigkeit für die Geschwindigkeit der Ausbreitung etwa 1,55 Hundertmilliontel Secunde, statt der berechneten 1,4 Hundertmillionteln.

Die Versuche habe ich noch mit einigen Abänderungen ausgeführt. Wenig Neues bot die Abänderung der Entfernung der primären Schwingung von der reflectirenden Wand. Hätte sich diese Entfernung beträchtlich vergrössern lassen, so wäre allerdings die deutliche Entwicklung einer zweiten und dritten Wellenlänge zu erwarten gewesen, allein eine solche Vergrösserung liess der Raum nicht zu. Bei Verkleinerung der Entfernung aber verloren die Erscheinungen nur an Interesse, indem von der Seite der primären Schwingung her die Deutlichkeit immer mehr verloren ging, und eine Umkehr des Zeichens nach der anderen verschwand. Wichtiger ist es, die Versuche mit einer Schwingung von anderer Periode zu beschreiben, um zu zeigen, dass die auffallenden Punkte nicht durch die Gestalt der Wand oder des Saales, sondern nur durch die Dimensionen der primären und der secundären Schwingung bestimmt sind. Ich benutzte deshalb zu einigen Versuchen einen secundären Kreis von 17,5 cm Radius und eine primäre Schwingung von gleicher Schwingungsdauer mit diesem Kreis. Die letztere wurde in 8—9 m

Abstand von der Wand aufgestellt. Mit so kleinen Apparaten ist indessen schwer arbeiten. Nicht allein sind die Funken ganz ausserordentlich klein, sondern die Erscheinungen der Resonanz etc. sind sehr schwach entwickelt. Ich vermüthe, dass so schnelle Schwingungen schon sehr stark gedämpft sind. Daher waren auch nicht mehr so viel Einzelheiten zu erkennen, wie mit dem grossen Kreise, allein die Haupterscheinung, mit deren Beschreibung wir den Anfang gemacht haben, war auch hier deutlich zu bemerken. In der Nähe der Wand, in 2,5 und in 4,5 m Abstand von derselben lag der stärkere Funken auf der Seite der Wand, in den mittleren Entfernungen von 2,5 und 3,5 m lag der stärkere Funke auf der Seite der primären Schwingung. Ein Wechsel des Vorzeichens fand also nach etwa je 1 m statt, die halbe Wellenlänge betrüge danach hier nur 2 m, und die Schwingung wäre mehr als doppelt so schnell als die erstbenutzte.

Zu den bisherigen Versuchen bemerke ich schliessend, dass es grosser Zurüstungen nicht bedarf, wenn man sich mit mehr oder weniger vollkommenen Andeutungen der Erscheinungen begnügen will. Bei einiger Uebung findet man an jeder Wand Andeutungen von Reflexen. Auch an jeder der oben erwähnten eisernen Säulen kann man auf der Seite der primären Schwingung ganz wohl die Wirkung der reflectirten Welle noch erkennen, wie man auf der entgegengesetzten Seite den electrodynamischen Schatten wahrnimmt.

Wir wollen nun unsere Versuche nach einer neuen Seite hin entwickeln. Bisher fand sich der secundäre Leiter zwischen der reflectirenden Wand und der primären Schwingung, also in einem Raume, in welchem die directe und die reflectirte Welle in entgegengesetztem Sinne forteilten und durch Interferenz stehende Wellen bilden. Stellen wir umgekehrt die primäre Schwingung zwischen die Wand und den secundären Leiter, so befindet sich der letztere in einem Raume, in welchem directe und reflectirte Welle in gleicher Richtung forteilten. Dieselben müssen sich daselbst zu einer fortschreitenden Welle zusammensetzen, deren Intensität jedoch von der Phasendifferenz der beiden interferirenden Wellen abhängt. Sollen die Erscheinungen auffallend sein, so müssen

die beiden Wellen von ähnlicher Intensität sein, es darf deshalb die Entfernung der primären Schwingung von der Wand nicht gross gegen die Dimensionen der Wand, und muss klein gegen den Abstand von der secundären Schwingung sein. Um zu prüfen, ob die entsprechenden Erscheinungen in den wirklich darstellbaren Verhältnissen zu beobachten wären, stellte ich die folgenden Versuche an. Der secundäre Kreis wurde jetzt in 14 m Entfernung von der reflectirenden Wand, also in etwa 1 m Entfernung von der Gegenwand aufgestellt. Seine Ebene war parallel der bisherigen Schwingungsebene, seine Funkenstrecke wurde der nahen Wand zugekehrt, sodass die Bedingungen für das Auftreten der Funken in ihm besonders günstig waren. Der primäre Leiter wurde parallel seiner früheren Lage von der Mitte der leitenden Wand aufgestellt, und zwar zunächst in sehr kleinem Abstände — etwa 30 cm — vor derselben. Die Funken im secundären Kreise waren äusserst schwach, die Funkenstrecke wurde so eingestellt, dass durchaus kein Funken mehr überging. Nun wurde der primäre Leiter schrittweise von der Wand entfernt. Bald zeigten sich einzelne Funken im secundären Leiter, welche in einen ununterbrochenen Funkenstrom übergingen, als der primäre Leiter in 1,5—2 m Abstand von der Wand, also in den Punkt *B* gelangte. Man möchte dies auf die Abnahme der Entfernung zwischen beiden Leitern schieben. Allein als ich den primären Leiter nun weiter von der Wand entfernte und dadurch dem secundären Leiter weiter näherte, nahmen die Funken dennoch wieder ab, und der Funkenstrom erlosch, als der primäre Leiter nach *C* gelangte, um erst bei weiterer Annäherung und nunmehr dauernd zuzunehmen. Eine genaue Messung der Wellenlänge aus diesen Versuchen ist nicht möglich, doch geht schon aus dem Gesagten hervor, dass die bereits erhaltene Wellenlänge den Erscheinungen genügt. Diese Versuche liessen sich auch sehr gut mit den kleineren Apparaten ausführen. Der entsprechende primäre Leiter wurde in 1 m, der secundäre Kreis in 9 m Abstand von der Wand aufgestellt. Die Funken in letzterem waren dann allerdings klein, aber doch gut beobachtbar. Sie erloschen jedoch, wenn der primäre Leiter aus

seiner Lage bewegt wurde, sowohl wenn er der Wand, als wenn er dem secundären Leiter genähert wurde. Erst wenn der Abstand von der Wand bis auf 3 m gebracht wurde, traten die Funken wieder auf, um von da ab bei weiterer Annäherung an den secundären Leiter nicht wieder zu verschwinden. Bemerkenswerth ist, dass in demselben Abstände von 2 m sich das Vorhandensein der Wand bei der langsameren Schwingung als vortheilhaft, bei der schnelleren als schädigend für die Ausbreitung der Induction erweist. Es zeigt dies deutlich, dass die Lage der merkwürdigen Punkte durch die Dimensionen der schwingenden Kreise, nicht durch diejenigen der Wand oder des Saales bedingt ist.

Unsere letztbeschriebenen Versuche entspricht in der Akustik der Versuch, in welchem man zeigt, dass die Annäherung einer Stimmgabel an eine feste Wand den Ton derselben in gewissen Abständen verstärkt, in anderen schwächt. In der Optik finden unsere Versuche ihr Analogon in der Lloyd'schen Form des Fresnel'schen Spiegelversuches. In Optik und Akustik gelten jene Versuche als Argumente für die Wellennatur des Lichtes und des Schalles, so werden wir auch die hier beschriebenen Erscheinungen als Argumente für die wellenartige Ausbreitung der Inductionswirkung einer electrischen Schwingung ansehen dürfen.

Ich habe die Versuche dieses Aufsatzes, wie die ersten Versuche über die Ausbreitung der Induction beschrieben ohne in wesentlichen Punkten Rücksicht zu nehmen auf eine besondere Theorie, wie denn in der That die Beweiskraft der Versuche unabhängig ist von jeder besonderen Theorie. Indessen ist es klar, dass die Versuche ebenso viele Gründe für diejenige Theorie der electrodynamischen Erscheinungen sind, welche zuerst von Maxwell auf die Faraday'schen Anschauungen aufgebaut wurde. Es scheint mir, dass auch die an jene Theorie geknüpfte Hypothese über das Wesen des Lichtes sich gegenwärtig dem Geiste mit noch stärkeren Gründen aufdrängt, als dies schon bisher der Fall war. Es ist gewiss ein interessanter Gedanke, dass die Vorgänge im Luftraume, welche wir untersuchten, uns in millionenfacher Vergrößerung dieselben Vorgänge dar-

stellen, welche zwischen den Platten eines Newton'schen Farbenglases oder in der Nähe eines Fresnel'schen Spiegels sich abspielen.

Dass die Maxwell'sche Theorie, trotz aller inneren Wahrscheinlichkeit, der bisherigen Bestätigung und weiterer Bestätigung nicht entbehren kann, wird bewiesen — wenn es anders eines Beweises bedarf — durch die Thatsache, dass die Ausbreitung der electricischen Wirkung durch gut leitende Drähte nicht mit angenähert gleicher Geschwindigkeit, wie die Ausbreitung durch den Luftraum erfolgt. Bisher ist aus allen Theorien, auch aus der Maxwell'schen, geschlossen worden, dass sich die Electricität durch Drähte mit Lichtgeschwindigkeit ausbreite. Ueber Versuche, die Ursachen dieses Gegensatzes zwischen Theorie und Erfahrung zu ermitteln, hoffe ich mit der Zeit berichten zu können.

Karlsruhe, im April 1888.

II. *Ueber die Wärmeleitung der Gase;* *von A. Schleiermacher.*

Zwischen den von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werthen der Wärmeleitungsfähigkeiten der Gase bestehen Unterschiede, die zwar in Betracht der Schwierigkeit derartiger Messungen nicht sehr erheblich erscheinen, indessen doch so gross sind, dass sie sich kaum in ihrem ganzen Betrage aus den zufälligen Fehlern der Beobachtung erklären lassen. Es ist weit wahrscheinlicher, dass die Ursache dieser Abweichungen in den bisher benutzten Methoden begründet ist. Noch grössere Differenzen, als die beobachteten Zahlen unter sich zeigen, bestehen zwischen den beobachteten und den aus der Theorie hergeleiteten Werthen. Von den vorliegenden Theorien kommt die Clausius'sche nach der Berechnung des Hrn. O. E. Meyer der Beobachtung am nächsten. Aber gerade dasjenige Gas, bei welchem die zur Vergleichung von Theorie und Beobachtung erforderlichen

Daten am genauesten bekannt sind, die Luft, zeigt auch nach dieser Theorie eine grössere Abweichung. Um für die Gase, welche mehr als zwei Atome im Molecül besitzen, einige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung herzustellen, bedarf es einer besonderen Hypothese über die Betheiligung der intramolecularen Energie an dem Vorgang der Wärmeleitung, wie sie zuerst Hr. Boltzmann in die Maxwell'sche Theorie eingefügt hat. Ferner bestehen über die Abhängigkeit der Wärmeleitung von der Temperatur noch Zweifel. Nach früheren Messungen des Hrn. Winkelmann, der sich am eingehendsten mit dieser Frage beschäftigt hat, schien bei Gasen, welche eine von der Temperatur unabhängige specifische Wärme bei constantem Volumen besitzen, die Wärmeleitung im selben Maasse wie die Reibung mit der Temperatur zu wachsen, was die Theorie erwarten lässt. Eine spätere und die zuletzt darüber veröffentlichte Untersuchung¹⁾ ergaben ihm Werthe der Temperaturcoefficienten der Wärmeleitung, welche beträchtlich kleiner sind, als die entsprechenden Coefficienten der Reibung.

Es haben somit die bisherigen Untersuchungen über die Wärmeleitung der Gase zu einem völlig befriedigenden und abschliessenden Ergebniss noch nicht geführt, und es schien mir darum von Interesse, die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit für einige Gase und deren Aenderung mit der Temperatur auf einem bisher nicht benutzten Wege zu versuchen. Dies gestattete die bereits früher zur Ermittlung der Wärmestrahlung verwendete Methode²⁾, die für den vorliegenden Zweck nur in wenigen Punkten abzuändern war. Danach wird ein in der Axe eines Glasrohres, welches das

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. 19. p. 649. 1883; 29. p. 68. 1886.

2) A. Schleiermacher, Wied. Ann. 26. p. 287. 1885. — Hr. Bottomley hatte die Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, dass er bereits im Jahre 1884 (Proc. Roy. Soc. 37. p. 177. 1884) Versuche nach einer ähnlichen Methode angestellt hat. Ich bedaure, dass mir diese Arbeit bei meiner Publication entgangen war. Indessen bezweckten seine damaligen Versuche nicht die Bestimmung der Wärmestrahlung, sondern der äusseren Leitungsfähigkeit in Luft von verschiedenem Druck. Bei neueren Versuchen über die Strahlung (Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 178. p. 429. 1887) hat Hr. Bottomley, ebenso wie ich, die Temperaturbe-

Gas enthält, ausgespannter Draht durch den galvanischen Strom erwärmt. Wenn die Glaswand auf constanter Temperatur erhalten bleibt, wird nach kurzer Zeit auch die Temperatur des Drahtes stationär. Man misst Stromstärke und Widerstand des Drahtes und erhält daraus die durch Leitung und Strahlung dem Draht entzogene Wärme. Ist ferner die Aenderung des Widerstandes mit der Temperatur bekannt, so ist durch den Widerstand auch die Temperatur des Drahtes bestimmt. Zusammen mit den Dimensionen des Apparates besitzt man alsdann alle Daten zur Berechnung der Leitungsfähigkeit des Gases, wenn die durch Strahlung übergeführte Wärme für sich durch besondere Versuche ermittelt worden ist.

Vor den bisher benutzten Methoden hat die eben geschilderte den Vorzug, dass die Messung der Wärmeleitungsfähigkeit im stationären Zustande geschieht. Das Resultat ist deshalb unabhängig von der specifischen Wärme des wärmeabgebenden Körpers und ihrer etwaigen Aenderung mit der Temperatur.

Zu den Messungen dienten zwei Apparate, I und II, von gleicher Construction, wie die bei den früheren Strahlungsversuchen benutzten und l. c. Taf. III. Fig. 17 abgebildeten. Die Maasse derselben sind:

| | App. I | App. II |
|--------------------------------------|--------------|--------------|
| Länge des Platindrahtes | 320 mm | 350 mm |
| zwischen den Electroden | 246,2 " | 273,4 " |
| Durchmesser des Drahtes | 0,405 " | 0,405 " |
| Widerstand w , bei 0° | 0,3430 S.-E. | 0,3782 S.-E. |
| Lichter Durchmesser des Glasrohres . | 24,2 mm | 15,6 mm |
| Dicke der Glaswand | 0,81 " | 0,78 " |

Ueber die Versuchsanordnung ist folgendes zu bemerken.

stimmung auf das Luftthermometer zurückgeführt und Resultate gefunden, die mit den meinigen in wünschenswerther Uebereinstimmung sind.

Was die Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit betrifft, so könnten hier auch die älteren Versuche von Grove, die von Hrn. Clausius erklärt worden sind (Pogg. Ann. 87. p. 501. 1852), angeführt werden, da sie mit den vorliegenden in einiger Beziehung stehen. Die von Hrn. W. Kohlrausch angegebene Methode (Wied. Ann. 33. p. 50. Ann. 1888) stimmt mit der überein, welche in meinen damals bereits abgeschlossenen Versuchen befolgt ist.

Der Apparat war horizontal in einem Kasten aus Eisenblech von ca. 5 l Inhalt befestigt, welcher das Bad von constanter Temperatur — Eiswasser oder siedendes Wasser — aufnahm.

Die von dem Draht abgegebenen Wärmemengen dürfen nicht sehr beträchtlich sein, da sich sonst wegen der geringen Wärmeleitungsfähigkeit des Glases die Temperatur der Innenfläche des Glasrohres merklich von der der Aussenfläche unterscheidet, und dieser Umstand eine gewisse Unsicherheit in die Berechnung der Versuche bringen würde. Aus diesem Grunde ist es zweckmässig, den Draht nur wenige Grade über die Temperatur seiner Umhüllung zu erwärmen. Freilich ist es dann schwieriger, den Temperaturüberschuss des Drahtes, procentisch genommen, so genau zu bestimmen, als dies bei grösseren Differenzen leicht möglich ist. Die folgende Anordnung gestattete, die Temperatur des Drahtes bis auf 0,02°, höchstens 1 Proc. der benutzten Temperaturdifferenzen, zu messen.

In den Stromkreis von ein bis zwei Bunsen'schen Elementen ist ausser dem Platindraht des Apparates noch ein Widerstand aus Neusilber (2,3 S.-E.) aufgenommen. An diesen „Hauptstromkreis“ sind zwei Abzweigungen I und II angelegt. I führt von den Electroden des Platindrahtes durch einen Rheostaten R_1 zu der Rolle eines empfindlichen Galvanometers, ebenso II von den Enden des Neusilberdrahtes durch einen zweiten Rheostaten R_2 zu einer zweiten Rolle desselben Galvanometers so, dass die beiden Zweigströme entgegengesetzt auf die Nadel wirken. Bei möglichst schwachem Hauptstrome, also Temperaturüberschuss Null des Drahtes, wird in R_2 so viel Widerstand eingeschaltet, dass der Galvanometerspiegel in der Ruhelage bleibt. Bei starkem Hauptstrom, welcher den Draht auf die gewünschte Temperatur erwärmt, muss in den Zweig I Widerstand aufgenommen werden, damit sich die Zweigströme compensiren. Bezeichnet r den in I hinzugenommenen Widerstand, R_1 den Widerstand dieses Kreises zuvor, α den Coëfficienten der Aenderung des Widerstandes mit der Temperatur für den Platindraht, t die Temperatur des erwärmten Drahtes und t' die des Bades, so ist $t - t' = (1 + \alpha t')r / \alpha R_1$. Es ist dabei vorausgesetzt,

dass in den beiden Stromkreisen sonst keine Widerstandsänderungen während dieser beiden Beobachtungen stattfinden. Zur Controle wurde hinterher, nachdem der Draht sich wieder abgekühlt hatte, die erste Einstellung wiederholt und eine etwaige Aenderung zur Correction der Rechnung benutzt. Solche Aenderungen rührten her von geringen Temperaturänderungen der Galvanometerrolle, die den grössten Theil des im Zweig I befindlichen Widerstandes bildete. Ihr Widerstand, 280 S.-E., war so gross gewählt, dass die Temperaturresp. Widerstandsänderungen der dünnen Electrodenrähte am Platindraht nicht berücksichtigt zu werden brauchten. Die Temperatur der Rolle wurde, da sie ja zur Kenntniss des Widerstandes R_1 erforderlich ist, bei jeder Beobachtung an einem in ihrem inneren Hohlraum befindlichen Thermometer abgelesen. Der Betrag der aus der erwähnten Controlmessung fliessenden Correction für den Widerstand r stimmte überein mit der direct aus der Temperaturänderung der Rolle berechneten Widerstandsänderung, woraus hervorgeht, dass Aenderungen in den übrigen Widerständen der beiden Zweigkreise während des Versuches nicht vorkamen. Insbesondere musste der Neusilberwiderstand während des Versuches constant bleiben, er war deshalb aus dickem Draht hergestellt und in ein grosses Glas voll Petroleum eingesenkt.

Die Stromstärke für die erste Einstellung des Rheostaten R_1 bei „schwachem“ Hauptstrom betrug gewöhnlich 0,03 Amp. In der kurzen Zeit, die zur Beobachtung des Galvanometers erforderlich war, entstand dadurch keine nachweisbare Temperaturerhöhung des Drahtes. Dabei reichte die Empfindlichkeit des Galvanometers ($0,1$ Scalentheil $= 7/10^{10}$ Amp.) aus, die Einstellung entsprechend der oben erwähnten Genauigkeit von $0,02^0$ in der Temperatur des Platindrahtes vorzunehmen. Trotz starker Aetasirung, die zur Erzielung dieser Empfindlichkeit nöthig war, besass der Magnet nur fünf Secunden Schwingungsdauer und war nach zwei bis drei Schwingungen durch eine mässige Luftdämpfung beruhigt. Er ist nur 6 mm lang und mit einem sehr leichten Spiegel verbunden.¹⁾

1) Magnet und Spiegel sind an einem einfachen Seidenfaden auf-

Die Einstellung des compensirenden Widerstandes r auf dem Rheostaten R_1 (bei „starkem“ Hauptstrom) konnte nur bis zu 0,1 S.-E. geschehen, die genauere Bestimmung bis auf 0,01 S.-E. erhielt man durch Interpolation aus den Galvanometerausschlägen. Der Rheostat ist auf seine Richtigkeit geprüft worden.

Um die Intensität des Hauptstromes zu messen, diente ein zweites Galvanometer, das im Nebenschluss an einem dauernd im Hauptkreis befindlichen dicken Kupferdraht lag. Seine Angaben wurden öfters durch ein Silbervoltameter geacht, die Ausschläge auf Proportionalität mit der Stromstärke zurückgeführt. Bei der Berechnung der Versuche ist berücksichtigt, dass die Stromstärke im Platindraht infolge der Abzweigung um 0,1 Proc. geringer ist, als im unverzweigten Theil des Hauptkreises. Die im Draht erzeugte Wärme $-J^2 w_0 (1 + \alpha t)$ — ist unter der Annahme 1 Ohm = 1,06 S.-E. und 1 Volt.-Amp. = 0,24 g. cal. pro Secunde auf gewöhnliches Wärmemaass umgerechnet. Die meist sehr geringfügige Abnahme der Stromstärke während der Beobachtung konnte in bekannter Weise durch „einschliessende Wiederholung“ der Ablesungen, die schwachen Thermoströme, welche manchmal in der Leitung auftraten, durch Beobachtung mit commutirtem Hauptstrom unschädlich gemacht werden. Da der compensirende Widerstand r durch Interpolation aus zwei um 0,1 S.-E. verschiedenen Widerständen ermittelt wurde, so erforderte ein Versuch in der Regel neun Ablesungen am Widerstandsgalvanometer und ebensoviele am Stromstärkegalvanometer.

Der Widerstand w_0 des Drahtstückes zwischen den Electroden ist abgeleitet aus den Ausschlägen eines Galvanometers im Nebenschluss, welcher abwechselnd an den Platindraht oder an einen vom gleichen Strom durchflossenen, möglichst gleichen Widerstand angelegt wurde. Der Vergleichswiderstand war durch passende Schaltung von drei

gehängt, den man bekanntlich durch Spalten aus den zwei miteinander verklebten Fäden des gewöhnlichen Cocons leicht erhalten kann. Die Theilung des vom Cocon abgewickelten Fadens geschieht durch Kochen mit Seifenwasser (Degummiren). Die gespaltenen Fäden sind viel glatter und zu feinen Aufhängungen geeigneter, als der gewöhnliche Coconfaden.

Einheiten von bekanntem Werth nebst kleinem Zusatzwiderstand hergestellt, und in die Abzweigung ein grosser, in beiden Fällen gleicher Widerstand aufgenommen.

Da die aus den Versuchen zu berechnenden Wärmeleitungsfähigkeiten denselben procentischen Fehler enthalten wie der Temperaturcoefficient der Widerstandsänderung der Platindrähte, so war es wünschenswerth, den letzteren bis auf 1 Proc. genau zu bestimmen. Die Ableitung aus den bei 0° und 100° gemessenen Widerständen der Platindrähte schien nicht sicher genug, dagegen führte ein anderes Verfahren zum Ziel. Bei stets „schwachem“ Hauptstrom, während der Draht die Temperatur 0° hatte, compensirte man mittels des Rheostaten R_2 , dann erhitzte man den Apparat auf 100° und ermittelte den compensirenden Widerstand in R_1 . Aenderungen in den übrigen Widerständen der Zweigkreise wurden durch Wiederholung der ersten Einstellung bei 0° eliminirt. Um ausserdem die Abhängigkeit des Coefficienten von der Temperatur zu finden, wurden ähnliche Messungen auch zwischen 0° und nahe 50°, oder 100° und 50° ausgeführt. Die Temperaturen um 50° sind im Wasserbad durch geeignete Regulirung der untergesetzten Brenner erhalten. Da hierbei kleine Schwankungen unvermeidlich waren, sind diese Messungen weniger genau. Doch zeigen sie, dass der Temperaturcoefficient mit steigender Temperatur abnimmt, was auch sonst bekannt ist. Es ergaben sich die folgenden Werthe für den Temperaturcoefficienten:

| zwischen 0 u. 100° | zwischen 0 u. 50° | zwischen 0 u. 100° | zwischen 0 u. 50° |
|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| App. I: 0,002 218 | 0,002 228 | App. II: 0,002 219 | 0,002 200 |
| 2 222 | 2 227 | 2 217 | 2 222 |
| 2 218 | 2 219 | 2 208 | 2 232 |
| Mittel: 0,002 219 | 0,002 225 | Mittel: 0,002 215 | 0,002 218 |

Die Werthe für beide Drähte, welche vom selben Stück abgeschnitten waren, stimmen nahe überein; ich nahm deshalb die Mittelwerthe 0,002 217 und 0,002 222 zur Berechnung an und setzte $\alpha = 0,002 227 - 0,000 000 1 t$.

Die durch Strahlung übergeführte Wärme sollte durch besondere Versuche ermittelt und von der gesammten, vom Draht abgegebenen Wärme abgezogen werden, um die allein

durch Leitung entzogene Wärme zu finden. Es ist dieses Verfahren erlaubt, wenn zugegeben wird, dass die ausgestrahlte Wärmemenge von der Natur des Gases merklich unabhängig ist und nicht von dem Gas absorbiert wird. Zu den Messungen der Strahlung konnte dieselbe Versuchsanordnung benutzt werden. Die Apparate wurden vor den Versuchen einen Tag lang im Luftbad auf 200 bis 250° erhitzt, mittels einer Hagen'schen Quecksilberluftpumpe ausgepumpt und während der Evacuierung die Drähte durch einen starken Strom häufig zum Glühen erhitzt. Auch während der Versuche blieben die Apparate mit der Pumpe in Verbindung, sodass das Vacuum jederzeit geprüft und, wenn nöthig, auf die anfängliche Höhe gebracht werden konnte. (Dieselbe wird mindestens durch die Spannkraft des Quecksilberdampfes bei Zimmertemperatur begrenzt.) Entsprechend den Verhältnissen bei den Wärmeleitungsversuchen sind die Messungen angestellt, während die Glaswand der Apparate durch das Bad von Eiswasser oder siedendem Wasser auf den Temperaturen 0° und 98,8 bis 99,2° erhalten wurde. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen I und II zusammengestellt. t ist die Temperatur des Drahtes, t' die des Bades, S die ausgestrahlten Wärmemengen in Grammcaloreien.

Tabelle I. Apparat I.

| $t' = 0^\circ$ | | $t' = 98,8^\circ$ | |
|----------------|---------|-------------------|---------|
| t | S | t | S |
| 18,5° | 0,00144 | 117,1° | 0,00305 |
| 32,5 | 276 | 129,4 | 629 |
| 44,6 | 396 | 139,0 | 776 |
| 62,0 | 553 | 170,9 | 1338 |
| 102,1 | 1054 | 216,2 | 2634 |
| 174,9 | 2363 | | |

Tabelle II. Apparat II.

| $t' = 0^\circ$ | | $t' = 99,3^\circ$ | |
|----------------|---------|-------------------|---------|
| t | S | t | S |
| 9,4° | 0,00109 | 110,3° | 0,00251 |
| 14,8 | 166 | 126,5 | 702 |
| 19,2 | 232 | 146,6 | 1234 |
| 25,4 | 306 | 199,3 | 3088 |
| 34,0 | 420 | | |
| 46,3 | 602 | | |
| 64,4 | 834 | | |
| 117,6 | 1799 | | |
| 161,2 | 2991 | | |

Die Zahlen besitzen nicht die Genauigkeit, wie sie später bei den Wärmeleitungsversuchen erreicht wurde, theils weil die Versuchsanordnung nachträglich noch etwas verbessert wurde, hauptsächlich aber weil bei diesen Bestimmungen mit sehr viel geringerer Intensität des Hauptstromes gearbeitet werden musste, und dadurch die Beobachtung etwas unsicherer wurde. Ungünstig wirkt auch der Umstand, dass es bei kleinen Temperaturdifferenzen 10–15 Minuten dauert, bis der Draht seine stationäre Temperatur erreicht hat. Deshalb sind zum Theil auch grössere Temperaturdifferenzen benutzt, als sie bei den späteren Wärmeleitungsmessungen in Betracht kommen. Uebrigens sind die erhaltenen Werthe ausreichend genau, da die Strahlung in die Berechnung der Wärmeleitung nur in kleinen Beträgen eingeht.

Die beobachteten Werthe wurden graphisch aufgetragen, um bei den Wärmeleitungsversuchen die ausgestrahlten Wärmemengen aus der Zeichnung ablesen zu können. Dieser Darstellung entnehme ich die in den folgenden Tabellen III und IV enthaltenen Zahlen, die ich zu einer Vergleichung der Beobachtungsergebnisse mit dem Stefan'schen Strahlungsgesetz benutzen will. Danach sollten die Quotienten $S/(T^4 - T'^4)$, wo T und T' die absoluten Temperaturen von Draht und Umhüllung, constant sein. Sie nehmen aber anfangs rasch, bei höheren Temperaturen langsam ab. Die Abnahme ist bei $t' = 0^\circ$ stärker, als bei $t' = 99^\circ$. Meine früheren Versuche, welche für grosse Temperaturdifferenzen ein starkes Wachsen dieser Quotienten ergaben, wiesen für kleine Differenzen auf dasselbe Verhalten, wie die jetzigen Beobachtungen.

Tabelle III. Apparat I.

| $t - t'$ | $t' = 0^\circ$ | | $t' = 98,8^\circ$ | |
|----------|----------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| | S | $S/(T^4 - T'^4)$ | S | $S/(T^4 - T'^4)$ |
| 25° | 0,00205 | $10^{-13} \cdot 8,79$ | 0,00445 | $10^{-13} \cdot 7,71$ |
| 50 | 437 | 8,20 | 910 | 7,20 |
| 75 | 707 | 7,76 | 1422 | 6,83 |
| 100 | 1025 | 7,43 | 2050 | 6,72 |
| 125 | 1400 | 7,17 | | |
| 150 | 1840 | 6,95 | | |
| 175 | 2365 | 6,81 | | |

Tabelle IV. Apparat II.

| $t - t'$ | $t' = 0^\circ$ | | $t' = 99,3^\circ$ | |
|----------|----------------|------------------------|-------------------|------------------------|
| | S | $S/(T^4 - T'^4)$ | S | $S/(T^4 - T'^4)$ |
| 25° | 0,00300 | $10^{-13} \cdot 12,86$ | 0,00617 | $10^{-13} \cdot 10,82$ |
| 50 | 635 | 11,91 | 1315 | 10,44 |
| 75 | 992 | 10,89 | 2140 | 10,28 |
| 100 | 1420 | 10,29 | 3088 | 10,11 |
| 125 | 1975 | 10,11 | | |
| 150 | 2665 | 10,07 | | |

Die Wärmeleitungsfähigkeiten sind gemessen worden von Luft, Wasserstoff und Kohlensäure, und zwar bei 0 und 100°, sodass sich aus den erhaltenen Werthen auch die Temperaturcoefficienten der Wärmeleitung berechnen lassen. Durch Beobachtung bei verschiedenen Drucken ergab sich der Einfluss von Strömungen auf die Resultate, der übrigens bei den benutzten Apparaten nicht beträchtlich war.

Die Füllung der Apparate geschah mit der Luftpumpe durch öfteres Ausspülen. Die Luft ging durch ein Rohr mit Natronkalk, zwei Waschflaschen mit concentrirter Schwefelsäure und ein 50 cm langes Rohr mit Phosphorsäureanhydrid. Der Wasserstoff, aus reinem Zink und reiner Schwefelsäure entwickelt, wurde ebenso getrocknet. Die Kohlensäure wurde aus Marmor und reiner Salzsäure dargestellt, mit Wasser und einer Lösung von doppeltkohlensaurem Natron gewaschen und mit Schwefelsäure und Phosphorsäureanhydrid getrocknet.

Die Drucke sind entweder an einem gewöhnlichen Manometer, welches mit der Pumpe verbunden war, direct abgelesen, oder für kleinere Werthe aus der bekannten Druckverminderung für jeden Pumpenzug berechnet.

In den folgenden Tabellen sind die Resultate der Messungen zusammengestellt. Es bedeuten darin t' die Temperatur des Bades, $t - t'$ den Temperaturüberschuss des Platindrahtes, p den Druck des Gases in Millimetern Quecksilber, L die allein durch Leitung übergeführte Wärme pro Secunde in g-Calorien, also $L/(t - t')$ eine der Wärmeleitungsfähigkeit proportionale Grösse. Diese Werthe würden jeweils der Wärmeleitungsfähigkeit bei der Temperatur $t' + (t - t')/2$ entsprechen; um sie untereinander vergleichbar zu machen,

sind sie mit Hülfe der sich aus ihnen ergebenden Temperaturcoefficienten auf 0°, bezw. 99° reducirt. Die römischen Ziffern hinter der Druckangabe fassen die mit gleicher Gasfüllung angestellten Versuche zusammen.

Tabelle V. Apparat I. Luft.

| p mm | | t' = 0° | | t' = 99° | |
|---------|-----|---------|--------------------------|----------|---------------------------|
| | | t - t' | L ₀ /(t - t') | t - t' | L ₉₉ /(t - t') |
| 680 | I | 6,53° | 0,002 448 | — | — |
| 365 | II | 6,86 | 2 172 | — | — |
| 190 | I | 7,43 | 2 170 | — | — |
| 91 | II | 7,01 | 2 188 | — | — |
| 46 | I | 7,50 | 2 163 | — | — |
| 22 | II | 7,11 | 2 121 | — | — |
| 11 | I | 7,55 | 2 145 | 6,43° | 0,002 822 |
| — | | 4,89 | 2 153 | 4,18 | 2 826 |
| 10 | III | 6,14 | 2 102 | — | — |
| 5,2 | II | 8,48 | 2 067 | 6,43 | 2 622 |
| — | | 5,85 | 2 075 | 4,23 | 2 623 |
| — | | 4,00 | 2 071 | — | — |
| 2,5 | I | 7,43 | 1 995 | 6,55 | 2 603 |
| — | | 4,84 | 1 989 | 4,32 | 2 572 |
| 1,2 | II | 7,20 | 1 867 | 6,33 | 2 427 |
| — | | 4,66 | 1 867 | 4,20 | 2 396 |
| 0,3 | II | 7,80 | 1 344 | — | — |
| 0,07 | II | 15,7 | 497 | — | — |

Tabelle VI. Apparat I. Wasserstoff.

| p mm | | t' = 0° | | t' = 99° | |
|---------|-----|---------|--------------------------|----------|---------------------------|
| | | t - t' | L ₀ /(t - t') | t - t' | L ₉₉ /(t - t') |
| 181 | I | 4,41° | 0,01503 | 4,46° | 0,01972 |
| — | | 1,97 | 1540 | — | — |
| 43 | I | 8,05 | 1458 | 6,98 | 1891 |
| — | | 4,64 | 1480 | 4,14 | 1897 |
| 40 | II | 6,88 | 1565 | 6,30 | 2028 |
| — | | 4,02 | 1600 | 3,74 | 2013 |
| 34 | III | 6,70 | 1513 | 6,02 | 1957 |
| — | | 3,91 | 1550 | 3,53 | 2011 |
| 10 | I | 8,96 | 1292 | 4,70 | 1657 |
| — | | 5,18 | 1301 | — | — |
| 8,5 | II | 7,30 | 1473 | 6,48 | 1871 |
| — | | 4,32 | 1488 | 3,94 | 1841 |

Tabelle VII. Apparat I. Kohlensäure.

| p mm | | $t' = 0^\circ$ | | $t' = 99^\circ$ | |
|-----------|-----|----------------|----------------|-----------------|-------------------|
| | | $t - t'$ | $L_0/(t - t')$ | $t - t'$ | $L_{99}/(t - t')$ |
| 46 | I | 10,40° | 0,001 289 | — | — |
| — | — | 6,02 | 1 290 | — | — |
| 15 | III | 9,83 | 1 275 | — | — |
| — | — | 5,65 | 1 272 | — | — |
| 5 | II | 10,10 | 1 248 | 8,63° | 0,001 914 |
| — | — | 5,78 | 1 243 | 5,15 | 1 943 |
| 2,6 | I | 10,88 | 1 236 | 9,17 | 1 892 |
| — | — | 6,27 | 1 239 | 5,45 | 1 918 |

Tabelle VIII. Apparat II. Luft.

| p mm | | $t' = 0^\circ$ | | $t' = 99^\circ$ | |
|-----------|-----|----------------|----------------|-----------------|-------------------|
| | | $t - t'$ | $L_0/(t - t')$ | $t - t'$ | $L_{99}/(t - t')$ |
| 35 | I | 8,89° | 0,002 682 | — | — |
| — | — | 6,00 | 2 702 | — | — |
| 10 | II | 9,04 | 2 625 | 8,22° | 0,003 291 |
| — | — | 6,11 | 2 639 | 5,63 | 3 320 |
| 5 | III | 9,40 | 2 572 | 8,68 | 3 241 |
| — | — | 6,33 | 2 585 | 5,88 | 3 278 |
| — | — | 3,91 | 2 604 | — | — |
| 2,5 | II | 9,64 | 2 476 | 8,84 | 3 140 |
| — | — | 6,50 | 2 488 | 5,94 | 3 157 |
| — | — | 3,72 | 2 518 | — | — |
| 1,2 | III | 10,18 | 2 321 | — | — |
| — | — | 6,84 | 2 349 | — | — |

Tabelle IX. Apparat II. Wasserstoff.

| p mm | | $t' = 0^\circ$ | | $t' = 99^\circ$ | |
|-----------|----|----------------|----------------|-----------------|-------------------|
| | | $t - t'$ | $L_0/(t - t')$ | $t - t'$ | $L_{99}/(t - t')$ |
| 215 | I | 5,89° | 0,01987 | 5,06° | 0,02609 |
| — | — | 4,02 | 1989 | 3,84 | 2618 |
| 214 | II | 5,88 | 2004 | 5,35 | 2587 |
| — | — | 4,12 | 2006 | — | — |
| 41 | I | 5,17 | 1941 | 5,15 | 2513 |
| — | — | 3,85 | 1935 | 4,15 | 2371 |
| 40 | II | 6,34 | 1907 | 5,67 | 2438 |
| — | — | 4,34 | 1906 | 4,10 | 2439 |
| 7,2 | II | 7,99 | 1629 | 6,84 | 2009 |
| — | — | 5,06 | 1626 | 4,85 | 2037 |
| 6,8 | I | 6,13 | 1685 | 5,79 | 2017 |
| — | — | 4,31 | 1700 | 4,19 | 2046 |

Tabelle X. Apparat II. Kohlensäure.

| p mm | | $t' = 0^{\circ}$ | | $t' = 99^{\circ}$ | |
|---------|----|------------------|----------------|-------------------|-------------------|
| | | $t - t'$ | $L_0/(t - t')$ | $t - t'$ | $L_{99}/(t - t')$ |
| 13 | I | 11,12° | 0,001 580 | — | — |
| — | | 5,13 | 1 581 | — | — |
| 5 | II | 9,10 | 1 549 | 7,65° | 0,002 369 |
| — | | 5,23 | 1 553 | 4,72 | 298 |
| 2,5 | I | 9,33 | 1 510 | 8,39 | 384 |
| — | | 5,34 | 1 521 | 4,58 | 402 |

Die Uebereinstimmung der Zahlen, soweit sie unmittelbar vergleichbar sind, halte ich für befriedigend. Die Werthe für denselben Druck zeigen Differenzen von 1—2 Proc., wie man sie im voraus erwarten konnte. Für verschiedene Drucke ändern sich die Zahlen gesetzmässig. Wenn man von den Zahlen für Apparat I Wasserstoff, Füllung I absieht, findet man nur bei den Versuchen mit Apparat II Wasserstoff, $p = 41$ mm, 99° , und $p = 6,8$ mm, 0° , sowie Kohlensäure $p = 5$ mm, 99° , Abweichungen, die 2 Proc. übersteigen. Die erwähnten Werthe Apparat I Wasserstoff sind dadurch fehlerhaft geworden, dass der die Pumpe abschliessende Hahn während der Messungen nach aussen undicht wurde, und so Luft in den Apparat eindrang. Deshalb sind diese Werthe zu niedrig. Sie sind trotzdem mit angeführt worden, da sie zur Berechnung des Temperaturcoefficienten gleichfalls benutzt werden können. Derselbe ergab sich für Luft und Wasserstoff merklich gleich, kann daher auch an einem Gemisch beider Gase ermittelt werden. Wie sich aus den Zahlen, insbesondere der Reihe App. I, Luft ersehen lässt, ist der Einfluss der Strömungen gering. Dagegen ist die Abnahme der Leitungsfähigkeit mit sinkendem Druck bei kleinen Drucken sehr merklich.

Um die Wärmeleitungsfähigkeiten bei 0° zu berechnen, hat man aus den Tabellen diejenigen Werthe von $L_0/(t - t')$ auszusuchen, welche bei verschiedenem Druck möglichst wenig voneinander abweichen. Es sind das für den Apparat I bei Luft die Werthe im Intervall $p = 91$ bis $p = 10$ mm, bei Wasserstoff $p = 40$ und 34 mm, bei Kohlensäure $p = 5$ und $2,6$ mm. Ebenso für den Apparat II bei Luft $p = 35$ bis

$p = 5$ mm, bei Wasserstoff $p = 41$ und 40 mm, bei Kohlensäure $p = 5$ und $2,5$ mm. Die Auswahl der Werthe geschieht am besten an der Hand einer graphischen Darstellung, worin dieselben als Ordinaten zu den Drucken als Abscissen aufgetragen sind. Die Curven, welche man durch Verbindung der aufgetragenen Punkte erhält, zeigen im wesentlichen gleiches Verhalten. Sie steigen bei den kleinsten Drucken sehr steil an und biegen bei einem gewissen Druck, ungefähr bei dem oben als untere Grenze angenommenen, scharf um. Von da ab sollte die Curve geradlinig und parallel zur Abscissenaxe verlaufen, wenn die Wärmemengen L allein durch Leitung übergeführt wären. Der Einfluss der Strömungen zeigt sich nun darin, dass die Curve nicht einer der Druckaxe parallelen, sondern einer schwach ansteigenden, geraden Linie folgt. Die durch Strömung übergeführte Wärme ist also ungefähr der Dichte des Gases proportional. Wären die Beobachtungen vollkommen genau oder so zahlreich, dass die Curven mit völliger Sicherheit gezogen werden könnten, so würde die Verlängerung des geradlinigen Theiles auf der Ordinatenaxe denjenigen Werth von $L/(t-t')$ abschneiden, welcher der Dichte Null entspricht, also von dem Einfluss der Strömungen frei ist. Bei den vorliegenden Beobachtungen ziehe ich vor, die Mittelwerthe der oben bezeichneten Zahlen zur Berechnung der Leitungsfähigkeiten zu verwenden. Diese sind:

| | Luft | Wasserstoff | Kohlensäure |
|--|-----------|-------------|-------------|
| App. I | 0,002 137 | 0,015 57 | 0,001 242 |
| App. II | 0,002 630 | 0,019 22 | 0,001 533. |
| (Für Luft, App. I, liefert die Curve 0,002 141.) | | | |

Aus diesen Zahlen ergeben sich die Wärmeleitungsfähigkeiten k_0 bei 0° :

| | Luft | Wasserstoff | Kohlensäure |
|-----------|-----------------------|-------------|-------------------------|
| App. I | $k_0 = 0,000\ 056\ 5$ | 0,000 411 | 0,000 032 8 |
| App. II | $k_0 = 0,000\ 055\ 9$ | 0,000 409 | 0,000 032 6 |
| im Mittel | $k_0 = 0,000\ 056\ 2$ | 0,000 410 | 0,000 032 7 g / cm sec. |

In den Tabellen V bis X sind die Angaben enthalten, welche zur Berechnung der Temperaturcoefficienten der Wärmeleitung erforderlich sind. Die Werthe derselben, wie sie sich für die einzelnen Beobachtungen ergeben, finden sich in den Tabellen XI und XII in den Spalten unter γ .

Tabelle XI. Temperaturcoefficienten. Apparat I.

| Luft | | Wasserstoff | | Kohlensäure | |
|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| p | γ | p | γ | p | γ |
| 11 I | 0,00318 | 181 I | 0,00315 | 5 II | 0,00539 |
| — | 316 | 43 I | 300 | — | 568 |
| 5,2 II | 271 | — | 285 | 2,6 I | 537 |
| — | 268 | 40 II | 299 | — | 553 |
| 2,5 I | 308 | — | 261 | Mittel: 0,00549 | |
| — | 296 | 34 III | 296 | | |
| 1,2 II | 303 | — | 300 | | |
| — | 286 | 10 I | 277 | | |
| Mittel: 0,00296 | | 8,5 II | 273 | | |
| | | — | 240 | | |
| | | Mittel: 0,00285 | | | |

Tabelle XII. Temperaturcoefficienten. Apparat II.

| Luft | | Wasserstoff | | Kohlensäure | |
|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| p | γ | p | γ | p | γ |
| 10 II | 0,00256 | 215 I | 0,00316 | 5 II | 0,00534 |
| — | 260 | — | 319 | — | 485 |
| 5 III | 263 | 214 II | 294 | 2,5 I | 584 |
| — | 271 | 41 I | 298 | — | 584 |
| 2,5 II | 271 | — | 228 | Mittel: 0,00547 | |
| — | 272 | 40 II | 281 | | |
| Mittel: 0,00266 | | — | 283 | | |
| | | 7,2 II | 236 | | |
| | | — | 256 | | |
| | | 6,8 I | 200 | | |
| | | — | 206 | | |
| | | Mittel: 0,00265 | | | |

Die Mittelzahlen aus den mit beiden Apparaten erhaltenen Werthen sind:

| | | |
|--------------------|-------------|-------------|
| Luft | Wasserstoff | Kohlensäure |
| $\gamma = 0,00281$ | 0,90275 | 0,00548 |

Die Einzelwerthe der Temperaturcoefficienten stimmen begreiflicherweise schlecht miteinander, und selbst die Mittelwerthe der beiden Apparate zeigen noch ziemliche Differenzen. Wie aus der Betrachtung der Einzelwerthe hervorgeht, ist die gute Uebereinstimmung der Mittelzahlen für die Kohlensäure nur zufällig. Ebenso zufällig mag es sein, dass der Apparat I bei allen drei Gasen grössere Werthe geliefert hat, als der Apparat II. Da die Wärmeleitungsfähigkeit

unter ihren normalen Werth sinkt, sobald die mittlere Weglänge der Molecüle mit den Dimensionen des Apparates vergleichbar wird, und aus den Temperaturcoëfficienten geschlossen wird, dass die Weglänge bei steigender Temperatur wächst, so sollte man erwarten, dass die Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitung abnehmen, sobald diese selbst mit abnehmender Gasdichte kleiner wird. Wenn diese Abnahme schon bei den hier benutzten Drucken eintreten sollte, so geben doch die Versuche dafür keinen sicheren Anhalt; möglich, dass die Abnahme durch die Beobachtungsfehler verdeckt wird.—

Die aus meinen Versuchen sich ergebenden Werthe der Wärmeleitungsfähigkeiten sind, namentlich für den Wasserstoff, erheblich grösser, als die von anderen Beobachtern gefundenen. Ich will daher noch einiges anführen, was zur Unterstützung meiner Resultate dienen kann.

Man wird finden, dass die Uebereinstimmung der Resultate unter sich der Art ist, wie man sie in Betracht der verwendeten Hülfsmittel a priori erwarten konnte. Diese Uebereinstimmung besteht auch für Beobachtungen, welche bei verschiedener Aufstellung und Empfindlichkeit des Stromstärkegalvanometers ausgeführt sind. In dieser Hinsicht sind zu vergleichen die Werthe $L_0/(t-t')$ für Luft, App. I bei den Drucken 11 und 10 mm. Sie weichen voneinander nicht mehr ab als Beobachtungen, die kurz nacheinander und bei unveränderter Empfindlichkeit des Galvanometers angestellt sind.

Sir W. Thomson¹⁾ hat gelegentlich der Versuche des Hrn. Bottomley die Temperaturvertheilung auf einem durch den Strom erwärmten Draht, dessen Enden auf constanter Temperatur erhalten werden, berechnet. Unsere Versuche liefern die mittlere Temperatur des zwischen den Electroden befindlichen Drahtstückes, und die Berechnung geschieht unter der Annahme, dass die Temperatur dieses mittleren Stückes gleichförmig sei, der Wärmestrom daher allein in der der Richtung der Cylinderradien erfolgt. Eine Anwendung

1) W. Thomson, Proc. Roy. Soc. 37. p. 187. 1884.

der Thomson'schen Rechnung auf die vorliegenden Versuche würde schon darum auf Schwierigkeiten stossen, weil die Enden des Drahtes nicht unmittelbar in das Bad ausmünden¹⁾, und ihre Temperatur deshalb nicht genau angegeben werden kann. Dass der Fehler infolge der erwähnten Annahme nicht beträchtlich sein kann, geht daraus hervor, dass die beiden verschieden gestalteten Apparate so nahe gleiche Werthe ergeben haben. Dasselbe lehrt auch die Uebereinstimmung meiner früheren Strahlungsbeobachtungen mit denen des Hrn. Bottomley, welcher viel längere Drähte benutzt und dadurch den betreffenden Fehler jedenfalls verkleinert hat.

Einen weiteren Einwand glaubte ich durch einen besonderen Versuch entkräften zu sollen. Die in den Glasapparaten gespannten Drähte waren, da das Haus tagüber häufig Erschütterungen ausgesetzt ist, nicht selten auch während der Versuche in zitternder Bewegung. Die Geschwindigkeit dieser Schwingungsbewegung ist freilich nur gering, da die Amplituden in der Mitte des Drahtes selten $\frac{1}{2}$ mm erreichen, und die Schwingungsdauer ziemlich gross ist. Indessen war es doch denkbar, dass der Draht im ruhenden Zustande merklich weniger Wärme abgibt, als während dieser Schwingungen, und dass aus diesem Grunde die Leitungsfähigkeiten zu gross gefunden worden seien. Es wurden deshalb eines Abends nach 10 Uhr, als das Haus sich in vollkommener Ruhe befand, hintereinander fünf Messungen der Leitungsfähigkeit von Luft, $p = 10$ mm, bei 0° mit dem Apparat I ausgeführt. Bei Nr. 1, 3 und 5 der Versuche blieb der Apparat in Ruhe, indem der Blechkasten, welcher das Eiswasser enthielt, noch durch untergeschobene Klötze möglichst festgelegt wurde. Bei dem zweiten und vierten Versuche dagegen wurde der Kasten während der ganzen Dauer der Messungen durch rasch aufeinanderfolgende Stösse mit der Hand erschüttert, und so der Draht in viel stärkere Schwin-

1) Wenn die Drähte ohne Vermittelung der dickeren Enden direct in das Bad ausmündeten, würde ein Ausglühen derselben nur mit Gefahr für den Apparat möglich sein. Das Ausglühen ist aber nöthig, um ein für die Strahlungsmessungen brauchbares Vacuum zu erhalten.

gungen versetzt, als dies bei den übrigen Beobachtungen der Fall war. Die fünf Werthe für $L_0/(t-t')$ sind:

| | | | | |
|-------------------|-----------|-----------|-----------|-------------------|
| Draht in Ruhe . . | 0,002 112 | 0,002 113 | 0,002 081 | Mittel 0,002 102, |
| in Schwingungen . | 0,002 110 | 0,002 093 | — | " 0,002 102. |

Die Uebereinstimmung der Mittelwerthe zeigt, dass die Erschütterungen ohne Einfluss sind.

Dass die äussere Oberfläche der Apparate die Temperatur des Bades besitzt, darf man bei der Kleinheit der übergeführten Wärmemengen wohl annehmen. Die grösste Wärmemenge, welche das Bad abzuleiten hatte, betrug 0,0009 g-Calorie pro Secunde für 1 qcm Oberfläche (Apparat II, Wasserstoff, 100°). Allerdings kommt der Fall, dass die Versuche mit der grösseren Temperaturdifferenz eine kleinere Zahl ergeben, als die bei kleinerer Differenz, häufiger vor als der umgekehrte. Dies würde sich daraus erklären, dass die Temperatur der äusseren Glasfläche etwas die des Bades übersteigt, wenn die übertragenen Wärmemengen gross sind. Indessen fallen die Abweichungen in die Grenzen der Versuchsfehler; man darf daher annehmen, dass die Resultate durch die Ausbildung einer wärmeren Schicht um die Apparate nicht erheblich gefälscht sind.

Ein zweiter Grund, weshalb die Messungen zu niedrige Werthe ergeben könnten, besteht darin, dass infolge der geringen Leitungsfähigkeit des Glases zwischen der inneren und äusseren Fläche der Apparate eine Temperaturdifferenz auftritt. Aus den bekannten Wärmemengen, welche im stationären Zustande durch die Glaswand gehen, lässt sich berechnen, um wieviel die Temperatur der Innenfläche höher ist, als die der äusseren Fläche. Unter der Annahme, dass die Temperatur der Aussenfläche gleich der des Bades und die Leitungsfähigkeit des Glases ¹⁾ = 0,002 g/cm sec ist, findet man, dass die Werthe für Wasserstoff um etwa 0,5 Proc. zu vergrössern sind. Diese Correction ist an den mitgetheilten Zahlen bereits angebracht; für Luft und Kohlensäure ist sie verschwindend.

Unter den früheren Beobachtungen über die Leitungs-

1) Everett, Units a. Physical Const. II ed. p. 112. 1886.

fähigkeit der drei hier untersuchten Gase sind die der Herren Winkelmann¹⁾ und Grätz²⁾ als die genauesten anzusehen. Beide haben auf die Strahlung Rücksicht genommen und die Constanten ihrer Apparate genau bestimmt. Die von ihnen gefundenen Zahlen stelle ich mit den meinigen zusammen:

| | Winkelmann ³⁾ | Grätz ⁴⁾ | S. |
|-------------|--------------------------|---------------------|-------|
| Luft | $k_0 = 0,000\ 051\ 4$ | 04844 | 0562 |
| Wasserstoff | $k_0 = 0,000\ 325\ 6$ | 3086 | 410 |
| Kohlensäure | $k_0 = 0,000\ 030\ 5$ | 03135 | 0327. |

Meine Zahlen sind also beträchtlich grösser und dies um so mehr, je besser das betreffende Gas leitet. Die Abweichungen bei Luft und besonders bei Wasserstoff sind so gross, dass sie über das Maass der zufälligen Beobachtungsfehler, das allerdings bei der Schwierigkeit der Messung mehrere Procente betragen mag, hinausgehen. Da ich nun keinen Grund auffinden konnte, aus dem meine Resultate bei den verschiedenen Gasen in verschiedenem Grade fehlerhaft geworden sein könnten, so bin ich geneigt zu glauben, dass die Ursache der Abweichungen gegeben sei in den von den früheren Beobachtern benutzten Methoden. Nach beiden Methoden wird die Leitungsfähigkeit aus der Abkühlungsgeschwindigkeit eines Thermometergefässes bestimmt. Da die Abweichungen der Resultate beider Beobachter von den meinigen nach der gleichen Richtung liegen, darf man vermuthen, dass die Fehlerquelle beiden Untersuchungen gemeinsam sei. Sie könnte z. B. darin bestehen, dass die Angabe des Thermometers zurückbleibt hinter der Temperatur der Oberfläche des Gefässes. Infolge davon würde die Abkühlungsgeschwindigkeit zu klein gefunden. Das Zurückbleiben wird um so beträchtlicher sein, je besser das Gas leitet; es würde sich hieraus erklären, weshalb die Abweichungen wachsen mit der Leitungsfähigkeit der Gase und gerade beim Wasserstoff am grössten sind. Unsere Annahme wird durch

1) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 156. p. 497. 1875.

2) L. Grätz, Wied. Ann. 14. p. 232. 1881.

3) Die Winkelmann'schen Zahlen sind auf 0° reducirt.

4) Hr. Grätz hält die mit seinem Apparat II erhaltenen Zahlen für unsicher, deshalb sind hier nur die Zahlen für den Apparat I angeführt.

einen Versuch, den Hr. Winkelmann¹⁾ selbst über diesen Punkt angestellt hat, wenigstens qualitativ bestätigt. In denselben Apparat brachte er zwei verschieden schwere Thermometergefässe von äusserlich gleicher Gestalt. Ihre Massen verhielten sich wie 27 zu 11, die Abkühlungsgeschwindigkeiten in Luft wie 48 zu 114. Das schwerere Gefäss mit der kleineren Abkühlungsgeschwindigkeit ergab einen um 2,5 Proc. grösseren Werth der Wärmeleitungsfähigkeit, als das leichtere. Der Versuch ist nicht vollkommen beweisend, da die Strahlung nicht eliminirt, sondern für beide Gefässe als gleich angenommen ist. Ein gleicher Versuch mit Wasserstoff wäre entscheidender gewesen.

Aus dem gleichen Grunde dürften die Beobachtungen des Hrn. Grätz zu niedere Werthe ergeben haben. Da sich jedoch die beiden von ihm benutzten Apparate nur wenig in ihren Dimensionen unterscheiden, lässt sich aus den mitgetheilten Zahlen hierüber kein Anhalt gewinnen.

Es liegt bereits eine ziemlich ausführliche Discussion zwischen den Herren Winkelmann²⁾ und Grätz³⁾ über ihre Arbeiten vor, und ich begnüge mich, hier darauf zu verweisen. Danach scheinen mir die Winkelmann'schen Zahlen grösseres Vertrauen zu verdienen. In Bezug auf diese sei nur das Folgende noch erwähnt. Es könnte fraglich sein, ob die Depression des Quecksilbers in dem capillaren Steigrohr des Luftthermometers (von ca. 1,5 mm Durchmesser) während des Ansteigens die gleiche ist, wie für den schliesslich erreichten Ruhezustand. Ein Versuch darüber, wobei die Depressionsdifferenz des gleichzeitig in einem weiten und einem engen Rohr aufsteigenden Quecksilbers in Bewegung und in Ruhe verglichen wurde, hat mir gezeigt, dass der Unterschied hier jedenfalls nicht in Betracht kommt. Bei den Versuchen mit Wasserstoff ist mit einer Ausnahme die Abkühlungsgeschwindigkeit gegen Ende des Versuches um 2—4 Proc. kleiner als zu Anfang. Dies scheint mir darauf zu deuten, dass sich, wenigstens bei diesem gutleitenden Gase,

1) A. Winkelmann, Pogg. Ann. 156. p. 517. 1875.

2) A. Winkelmann, Wied. Ann. 14. p. 534. 1881; 19. p. 649. 1883.

3) L. Grätz, Wied. Ann. 14. p. 232 u. 541. 1881.

um die Apparate eine Schicht von höherer Temperatur als die des Bades ausbildete. Wie bereits erwähnt, konnte ich in meinen Versuchen den Betrag dieser Fehlerquelle durch Beobachtung bei verschiedenen grossen Temperaturdifferenzen beurtheilen. Eine kleine Unsicherheit haftet schliesslich den Winkelmann'schen Zahlen noch insofern an, als in der Arbeit sich keine Angabe über die specifische Wärme der benutzten Messinggefässe findet. Nach Regnault unterscheiden sich die specifischen Wärmen von hartem und ausgeglühtem Kupfer um 1,7 Proc.; noch grössere Unterschiede finden sich bei den von verschiedenen Beobachtern angegebenen Zahlen für reines Kupfer und für reines Zink. Ist die specifische Wärme der Messinggefässe nicht besonders bestimmt worden, sondern aus anderen Beobachtungen entnommen, so könnte der zur Berechnung verwandte Werth auch mit Rücksicht auf die variable Zusammensetzung des Messings um einen ähnlichen Betrag fehlerhaft sein. In der Berechnung der Leitungsfähigkeiten würde der Fehler procentisch ebenso gross sein, und es wäre möglich, dass aus diesem Grunde die Differenz zwischen unseren Resultaten in Wahrheit etwas geringer ist.

Die Theorie verlangt bei denjenigen Gasen, deren specifische Wärme unabhängig von der Temperatur ist, dass die Temperaturcoefficienten der Wärmeleitung gleich den entsprechenden der Reibung sind. In der That würden meine Resultate die Theorie bestätigen, da die von Hrn. v. Obermayer¹⁾ gefundenen Werthe der Temperaturcoefficienten der Reibung, welche früher als die genauesten anzusehen waren, nämlich für Luft 0,00279 und für Wasserstoff 0,00257 nahe genug an den oben angegebenen liegen. Indessen hat Hr. Schumann²⁾ die von Hrn. v. Obermayer mittelst Strömung durch Capillaren erhaltenen Resultate in Zweifel gezogen und aus seinen eigenen Schwingungsbeobachtungen für Luft den Werth 0,00364 abgeleitet. Er wendet gegen die Strömungsbeobachtungen ein, dass sich bei höherer Temperatur

1) A. v. Obermayer, Wien. Ber. 73. II. Abth. p. 433. 1876.

2) O. Schumann, Wied. Ann. 23. p. 353. 1894.

die Dicke der auf der Glaswand verdichteten Gasschicht vermindert, deshalb der Röhrenradius zu klein angenommen und die Reibungsconstante zu niedrig gefunden wird. Mit dieser Erklärungsweise scheint mir nicht vollständig übereinzustimmen, dass bei der in stärkerem Maasse als Luft adsorbirten Kohlensäure die Differenz zwischen dem Werthe des Hrn. v. Obermayer 0,00348 und dem des Hrn. Schumann 0,00388 viel kleiner ist als bei Luft. Bei dieser Unsicherheit ist eine Vergleichung von Theorie und Beobachtung bei der Kohlensäure um so weniger beweisend, als hier noch die Veränderung der specifischen Wärme mit der Temperatur in Betracht kommt. Bezeichnet η die Reibungsconstante, c die specifische Wärme bei constantem Volumen, so sollte sein: $1 + 100 \gamma = \eta_{100} \cdot c_{100} / \eta_0 \cdot c_0$. Das Verhältniss c_{100} / c_0 ist aus den Versuchen des Hrn. Wüllner¹⁾ bekannt; der Werth des Hrn. v. Obermayer ergibt $\gamma = 0,00511$, der des Hrn. Schumann $\gamma = 0,00560$. Zwischen beiden liegt der von mir gefundene Werth $\gamma = 0,00548$. Wenn die theoretische Constante $k_0 / \eta_0 c_0$ eine Function des Verhältnisses zwischen Atom- und Molecularenergie ist, so würde, da sich bei der Kohlensäure dieses Verhältniss mit der Temperatur ändert, auch diese Aenderung in dem Temperaturcoefficienten ihren Ausdruck finden. Da ferner die Kohlensäure nicht vollständig diatherman ist, obwohl sie nach den Versuchen des Hrn. Röntgen²⁾ Wärme von so geringer Brechbarkeit, wie sie Körper von 0° oder 100° ausstrahlen, weniger stark absorbirt, so könnte der Temperaturcoefficient auch noch von der Aenderung der Absorption abhängen. Es ist also auch mit Rücksicht auf diese beiden Punkte der berechnete Werth des Temperaturcoefficienten unsicher.

Hr. Winkelmann hat ebenfalls die Temperaturcoefficienten in mehreren Arbeiten untersucht. Die zuletzt von ihm gefundenen Werthe³⁾, nach einer von Hrn. Christiansen angegebenen Methode während des stationären Zustandes bestimmt, sind 0,00206 für Luft und für Wasserstoff,

1) A. Wüllner, Wied. Ann. 4. p. 321. 1878.

2) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 23. p. 263. 1884.

3) A. Winkelmann, Wied. Ann. 29. p. 68. 1886.

0,00366 für Kohlensäure. Indessen sind die Werthe Mittelzahlen aus Messungen mit zwei verschiedenen dicken Gasschichten (0,0474 und 0,1026 cm) und zeigen sich in auffälliger Weise von der Dicke der Gasschicht abhängig. Bei Luft und Kohlensäure¹⁾ ergibt sich der Temperaturcoefficient bei der dickeren Gasschicht regelmässig um 20 Proc. kleiner als bei der dünneren, ohne dass die Ursache dieser Abhängigkeit hinreichend aufgeklärt wäre. Man darf daher bezweifeln, ob der richtige Werth durch das Mittel aus den beiden Versuchsreihen dargestellt wird.

Bei einer Vergleichung der beobachteten Wärmeleitungsfähigkeiten mit den theoretischen Berechnungen ist zu beachten, dass die Theorie keinen Aufschluss darüber gibt, in welchem Verhältniss sich die moleculare und die intramoleculare Energie an der Wärmeleitung theilnimmt. Man nahm an, dass dieses Verhältniss dasselbe sei, in welchem die beiden Energien in dem im Wärmegleichgewicht befindlichen Gase stehen. Danach sollte der Werth des Quotienten $k/\eta c$ für alle Gase gleich gross sein, und zwar nach der Maxwell'schen Theorie = 2,5, nach der Clausius'schen zufolge der von Hrn. O. E. Meyer unter Berücksichtigung des Maxwell'schen Vertheilungsgesetzes ausgeführten Berechnung = 1,53. Die beobachteten Zahlen liegen zwischen den Werthen, welche diese beiden Berechnungen liefern. Zur Vervollkommenung der Theorie sind von Hrn. Boltzmann und von Hrn. O. E. Meyer Hypothesen über die Theilung der Atomenergie aufgestellt und mit deren Hülfe Werthe berechnet worden, welche mit den früheren Beobachtungen theilweise genügend übereinstimmen. Da indessen diese Hypothesen noch wenig gesichert erscheinen, so sehe ich von einer Vergleichung der danach berechneten Werthe mit meinen Zahlen ab, will aber umgekehrt den Werth des Verhältnisses $k/\eta c$ berechnen, welcher demselben nach meinen Beobachtungen bei 0° zukommt. Hierzu benutze ich die von Hrn. v. Obermayer gefundenen Reibungsconstanten, welche mit denen des Hrn. Schumann für Luft und Kohlensäure

1) Wasserstoff ist nur in der dickeren Schicht untersucht.

gut übereinstimmen, sowie die aus den Versuchen von Regnault, Hrn. E. Wiedemann und Hrn. Röntgen¹⁾ bekannten specifischen Wärmen bei constantem Volumen. Die folgende Zusammenstellung enthält ausserdem noch die auf Luft bezogenen relativen Leistungsfähigkeiten k' , wie sie sich aus der Theorie (ohne Rücksicht auf die erwähnten Hypothesen) und aus meinen Beobachtungen ergeben.

| | k_0 | η_0 | c_0 | $k_0/\eta_0 c_0$ | k' theor. | k' beob. |
|--------------|-------------|-------------|---------|------------------|-------------|------------|
| Luft | 0,000 056 2 | 0,000 167 8 | 0,16902 | 1,982 | 1 | 1 |
| Wasserstoff | 0,000 410 | 0,000 086 1 | 2,461 | 1,935 | 7,47 | 7,30 |
| Kohlensäure | 0,000 032 7 | 0,000 138 3 | 0,14886 | 1,589 | 0,726 | 0,581 |

Es ergibt sich also auch aus meinen Beobachtungen, dass die Theorie einer Erweiterung bedarf. Doch dürfte es zur Zeit schwer sein, die Abänderung mit Sicherheit zu bestimmen. Für viele Gase ist ausser der Wärmeleitungsfähigkeit die Reibungsconstante oder die specifische Wärme bei constantem Volumen noch zu wenig genau bekannt, wie z. B. die Zahlen verschiedener Beobachter für die Reibungsconstante des Wasserstoffes noch erheblich voneinander abweichen. Da die zweiatomigen Gase Luft und Wasserstoff einen sehr viel grösseren Werth für $k/\eta c$ liefern, als 1,53, und da selbst für die dreiatomige Kohlensäure dieser Werth noch merklich grösser ist, halte ich für bewiesen, dass die Berechnung des Hrn. O. E. Meyer in ihrer jetzigen Form den thatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht. Denn der betreffende Werth wird sich voraussichtlich bei einem einatomigen Gas, bei dem die Wärmeleitung in der Fortpflanzung von nur progressiver Energie besteht, und daher die Theorie ohne weitere Hypothesen anwendbar sein müsste, noch grösser als für Luft oder Wasserstoff herausstellen.

Karlsruhe, März 1888.

1) Vgl. A. Wüllner, Wied. Ann. 4. p. 321. 1878.

III. Ueber den Einfluss der Dicke und Helligkeit der strahlenden Schicht auf das Aussehen des Spectrums; von A. Wüllner.

1. Unter dem oben stehenden Titel veröffentlichte Hr. H. Ebert im ersten Hefte der Annalen dieses Jahres eine Notiz, in welcher er einen Versuch bespricht, welchen ich im 14. Bande der Annalen (Neue Folge) und im zweiten Bande der vierten Auflage meiner Experimentalphysik beschrieben und als Beweis dafür angeführt habe, dass lediglich durch Vermehrung der Dicke der strahlenden Schicht eines Gases ein Linienspectrum in ein schattirtes Bandenspectrum verwandelt werden kann. Der Versuch besteht im wesentlichen darin, dass ein doppelt T förmiges Rohr von überall gleicher 2 cm betragender lichter Weite hergestellt wurde, dessen Querbalken eine Länge von etwa 10 cm hatten, während das die Querröhren verbindende Rohr eine Länge von 26 cm besass. In die Enden der Querröhren werden Electroden eingefügt. Wurde das Rohr mit passend verdünnten Gasen gefüllt, so konnte man den Inductionsstrom an dem einen Ende des einen Querrohres eintreten und am anderen Ende des anderen Querrohres austreten lassen, sodass der Strom das Gas in der Hälfte der beiden Querröhren und dem 26 cm langen Verbindungsrohr zum Leuchten brachte. Indem man entweder ein Querrohr oder das Verbindungsrohr, letzteres so, dass die ganze 26 cm lange Schicht ihr Licht strahlen konnte, vor den Spalt eines Spectrometers brachte, konnte man das von einer 2 cm dicken Schicht des leuchtenden Gases gelieferte Spectrum mit dem von einer 26 cm langen Schicht gelieferten Spectrum vergleichen, während ein und derselbe Strom das Gas in der überall gleich weiten Röhre zum Leuchten brachte. Man konnte somit das Spectrum zweier Schichten von erheblich verschiedener Dicke aber gleicher Temperatur vergleichen. Ich zeigte, dass man bei Füllung des Rohres mit Kohlensäure unter 2—4 mm Druck als Spectrum der 2 cm dicken Schicht nur vier schmale Streifen erhält, die Beginne der vier hellsten Kohlebanden

mit den Wellenlängen 5,61—5,20—4,83,—4,51 zehntausendstel Millimeter, als Spectrum der 26 cm langen leuchtenden Schicht ein sehr schön ausgebildetes Bandenspectrum, wie es die sehr viel heller leuchtenden capillaren Theile der Spectralröhren mit capillarem Zwischenstück zeigen.

Nach Beschreibung des Versuches fährt Hr. Ebert fort: „Es fragt sich, ob dieses Experiment, welches ich unter genau denselben Bedingungen und mit demselben Erfolge angestellt habe, uns wirklich der Uebergang eines linienartigen Spectrums in ein Bandenspectrum lediglich durch Vermehrung der Schichtdicke zeigt. Da das Absorptionsvermögen des Gases in dem Zustande, in den wir es überführen, wenn wir es zum Leuchten bringen, für die emittirten Strahlengattungen sicher nicht so gross ist, dass nicht auch das Licht derjenigen Schichten, welche tiefer liegen als 2 cm, durch die davor befindlichen zu uns dringen könnte, so ist es ganz unvermeidlich, mit der Dicke der strahlenden Schicht zugleich die Helligkeit zu steigern“.

Hr. Ebert sucht dann zu zeigen, dass es in der That die Vermehrung der Helligkeit sei, welche die Veränderung des Spectrums bewirke, dass somit mein Versuch kein Beweis für die Abhängigkeit des Aussehens eines Spectrums von der Dicke der leuchtenden Schicht sei.

Was Hr. Ebert mit dieser Notiz eigentlich beweisen, beziehungsweise, welche von mir ausgesprochene Ansicht er widerlegen will, ist mir durchaus unerfindlich, denn ich habe überall, wo ich über die Entwicklung der Spectra mich geäussert habe¹⁾, deutlich hervorgehoben, dass nach dem Kirchhoff'schen Satze die Menge des von den Gasen ausgesandten Lichtes, also die Helligkeit desselben es sei, welche mit der Dicke der strahlenden Schicht zunehme. Ist e das Emissionsvermögen eines vollkommen schwarzen Körpers für Licht irgend einer Wellenlänge bei irgend einer Temperatur, ist a das Absorptionsvermögen einer Schicht irgend einer Substanz, deren Dicke gleich Eins ist, und in

1) Man sehe u. a. in dem 2. Bde. der IV. Aufl. meines Lehrbuches der Experimentalphysik § 48 u. 49 insbesondere p. 235—238.

welcher die Dichtigkeit der Substanz gleich Eins ist, für die gleiche Wellenlänge und die gleiche Temperatur, so ist die Lichtmenge E dieser selben Wellenlänge, welche eine Schicht dieser Substanz von der Dicke d und der Dichtigkeit δ bei derselben Temperatur aussendet:

$$E = e \{1 - (1 - a)^{d\delta}\}.$$

Bei constantem Werthe von e , also bei constanter Temperatur nimmt für alle die Wellenlängen, für welche a von 0 und von 1 verschieden ist, die Menge des ausgesandten Lichtes mit der Dicke der Schicht zu, und zwar von der Menge $a \cdot e$, wenn wir von der Schicht mit der Dicke eins ausgehen bis zu e , wenn die Dicke der Schicht beziehungsweise das Product $d\delta$ unendlich gross wird.

Die zunehmende Dicke einer strahlenden Schicht bei constanter Temperatur bewirkt demnach für jede Wellenlänge, für welche a nicht Null oder Eins ist, qualitativ dasselbe wie steigende Temperatur, sie vermehrt die Helligkeit des von der strahlenden Schicht ausgesandten Lichtes.

Das von einer strahlenden Schicht überhaupt ausgesandte Licht ist dargestellt durch:

$$S = \sum e \{1 - (1 - a)^{d\delta}\},$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Lichtwellen beziehen soll. Es wird somit durch Vermehrung der Schichtdicke die Gesammthelligkeit des ausgesandten Lichtes vermehrt, da für jede Welle, für welche a zwischen Null und Eins liegt, die Helligkeit zunimmt.

Hiernach muss das Spectrum der leuchtenden Gase in den Temperaturen, in welchen die Werthe von a klein sind, mit wachsender Dicke der Schicht nothwendig reichhaltiger werden, es sei denn, dass a in der That für die nicht bei dünner Schicht bereits sichtbaren Wellen absolut Null sei. Nehmen wir z. B. an, es sei im Spectrum der strahlenden Schicht die Grenze der Helligkeit, bei welcher das Vorhandensein der betreffenden Welle noch wahrgenommen werden kann, gleich $0,01 e$. Bei einer leuchtenden Schicht, deren Dicke als Einheit angenommen werden soll, wären dann überhaupt nur jene Wellen sichtbar, für welche a zwischen $0,01$ und 1 liegt. Wird die Schichtdicke, wie bei meinem Versuche, auf das

13fache vergrößert, so wird die Helligkeit aller derjenigen Wellen, für welche a zwischen 0,01 und 0,00077 liegt, so gross, dass sie im Spectrum sichtbar werden; würde die Dicke auf das 100fache zunehmen, so werden alle Wellen sichtbar, deren Werth von a bis auf 0,0001 herabgeht.

Diese Folgerung aus dem Kirchhoff'schen Satze sollte mein Versuch zur Anschauung bringen und thut das, wie ja auch Hr. Ebert constatirte, in schönster Weise.

2. Zu der Notiz des Hrn. Ebert, soweit sie sich mit meinem Versuch beschäftigt, habe ich nichts weiter zu bemerken, es sei mir indess gestattet, noch einiges über das Leuchten der Gase überhaupt und speciell über das electriche Leuchten hinzuzufügen.

Die Helligkeit der electriche leuchtenden Gase ist bei Anwendung capillarer Röhren erheblich grösser als in weiteren Röhren; das Spectrum ist indess wesentlich dasselbe, nur vielleicht noch reichhaltiger als in schon recht dicken Schichten des in weiten Röhren leuchtenden Gases. Es ist mir nicht zweifelhaft, dass die Ursache dieser grösseren Helligkeit wesentlich die gleiche ist wie die Vergrösserung der Dicke der strahlenden Schicht, nämlich die erheblich grössere Zahl von leuchtenden Molecülen im Querschnitt der capillaren Röhre gegenüber den im Querschnitt der weiten Röhre leuchtenden Molecülen.

Nach allen darüber vorliegenden Beobachtungen ist die Temperatur der in den Spectralröhren leuchtenden Gase eine keineswegs sehr hohe. Man hat ja deshalb das Leuchten der Gase im electriche Strome als etwas ganz anders denn als eine Glüherscheinung aufgefasst, man hat das Leuchten ein phosphorisches genannt.

Ein vom Glühen verschiedenes Leuchten halte ich überhaupt nur bei dem durch absorbirtes Licht bewirkten Leuchten für vorhanden, also bei der Fluorescenz und Phosphorescenz im engeren Sinne des Wortes. Denn eine Lichtemission von seiten eines Körpers ist nur möglich, wenn die körperlichen Molecüle Schwingungen vollführen, welche die als Lichtwellen sich fortpflanzenden Aetherschwingungen hervor-

rufen, also mit den letzteren isochron sind. Ob das Schwingungen der Molecüle als solche sind, oder wie es Hr. v. Helmholtz in seiner Dispersionstheorie annimmt, Schwingungen der Atome im Molecül, in welchem schwere centrale Massen gewissermassen fest liegen, ist in der Sache einerlei.

Diese Schwingungen der körperlichen Molecüle werden erregt, einmal wenn Schwingungen des Aethers die Molecüle treffen, welche mit den Schwingungen der letzteren isochron sind; wir erhalten im allgemeinen Absorption des Lichtes, in einzelnen Fällen Fluorescenz und Phosphorescenz. Die Schwingungen werden ebenfalls erregt, wenn die Wärmebewegung eine gewisse lebendige Kraft erhalten hat, die die Molecüle eine gewisse Temperatur erreicht haben, die wir die Glühtemperatur nennen. Bei den festen und flüssigen Körpern kann diese die Lichtaussendung bedingende schwingende Bewegung wegen des innigen Zusammenhanges der Molecüle nur eintreten, wenn die Wärmebewegung aller Molecüle eine so lebhafte geworden ist, dass sie der oben definirten Glühtemperatur entspricht. Es muss also der ganze Körper die Glühtemperatur haben. Eben deshalb glühen feste und flüssige Körper stets mit so grosser Intensität und senden wohl ausnahmslos alle die Wellenlängen aus, welche bei der betreffenden Temperatur ausgesandt werden können; sie liefern continuirliche Spectra wie ein schwarzer Körper, wenn auch vielleicht mit etwas anders vertheilter Helligkeit.

Bei den Gasen sind nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie die Verhältnisse andere; die Molecüle einer Gasmasse bewegen sich unabhängig voneinander mit erheblich verschiedener Geschwindigkeit, somit erfolgen die Stösse der Molecüle, durch welche bei hinreichender Stärke die lichterregenden Schwingungen entstehen, mit sehr verschiedener lebendiger Kraft. Es ist demnach keineswegs ausgeschlossen, ja selbst wahrscheinlich, dass bei allen Temperaturen einzelne Molecüle einer ausgedehnten Gasmasse derartig stark gegeneinander prallen, dass die den Molecülen möglichen lichterregenden Schwingungen entstehen, dass es somit für die Gase überhaupt keine bestimmte Glühtemperatur in dem für feste und flüssige Körper gültigen Sinne

gibt, das heisst also, dass bei einer gegebenen Gasmasse Bedingung der Lichtaussendung nicht eine bestimmte Temperatur der Gasmasse als solcher ist. Wir werden ein Gas leuchten sehen, wenn eine hinreichende Anzahl von Moleculen Stösse erhält, welche genügen, um die Moleculé in Schwingungen zu versetzen, sodass die fortgepflanzten Schwingungen eine hinreichend grosse Amplitude besitzen, um wahrgenommen zu werden.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen wird auch bei den Gasen das Leuchten beginnen, wenn die ganze Gasmasse eine bestimmte Temperatur besitzt, welche aber ganz erheblich höher sein kann, als die Glühtemperatur der festen und flüssigen Körper, da es immer nur eine geringe Zahl von Moleculen ist, welche bei letzterer lichterregende Schwingungen vollführen. Dafür sprechen auch die Beobachtungen des Hrn. Siemens über das Dunkelbleiben der Gase in Flammöfen bei Temperaturen von 1600 bis 2000° C.¹⁾ Es ist indess keineswegs unmöglich, dass, wenn hinreichend dicke und dichte Schichten eines Gases betrachtet werden, diese Lichtemission auch bei erheblich niedrigeren Temperaturen beobachtet werden kann. In hohen Temperaturen wird die Menge des ausgesandten Lichtes nicht allein zunehmen, weil die Zahl der leuchtenden Moleculé wächst, sondern weil auch durch die mit steigender Temperatur wachsende Lockerung der Moleculé dieselben schon bei schwächeren Stössen in leuchtende Schwingungen gerathen; es nimmt also das Absorptionsvermögen der Gase, die Grösse a unserer Gleichungen zu.

Wenn durch andere Kräfte in einer gegebenen Gasmasse eine hinreichende Anzahl von Moleculen in jene die Aussendung des Lichtes bedingende Bewegung versetzt wird, so kann eine Lichtaussendung eintreten, wenn auch die mittlere Temperatur der ganzen Gasmasse eine niedrige ist; den lichtaussendenden Gasmoeculén muss man aber nach der jetzigen Auffassung der Temperatur die Glühtemperatur zuschreiben. Die Temperatur der Gasmasse als solche ist eine niedrige, weil es nur eine kleine Zahl von Moleculen ist, welche die Glühtemperatur besitzt.

1) Siemens, Wied. Ann. 18. p. 311. 1883.

Derartige Kräfte können chemische sein; so wird das phosphorische Leuchten der vom Phosphor aufsteigenden Dämpfe eine Glüherscheinung einer beschränkten Anzahl von Molecülen sein, welche durch die Oxydation des Phosphors zum Glühen gebracht werden. Das leuchtende Gemisch von Phosphordampf und Luft kann dabei, weil es doch eine geringe Zahl von Molecülen ist, welche glüht, eine von derjenigen der Umgebung nicht merklich verschiedene Temperatur haben.

Ganz besonders kann eine solche partielle Glüherscheinung durch electriche Kräfte erregt werden. In dem electricen Büschel einer Electrisirmaschine sind es immer nur wenige Molecüle, welche durch die electricen Bewegungen in die Licht erregenden Schwingungen versetzt werden, deshalb ist das leuchtende Büschel kalt. Ganz das Gleiche findet in den Spectralröhren statt, auch dort ist die Zahl der Molecüle, welche durch die Entladung getroffen und auf die Glüh-temperatur gebracht werden, eine relativ kleine. Die mittlere Temperatur der Gasmasse kann deshalb eine recht niedrige sein; das Gas leuchtet aber nicht bei dieser Temperatur, sondern das leuchtende Gas hat in der That die vielleicht sehr hohe Glüh-temperatur, während die nicht von der Ladung getroffenen Molecüle kalt sind.

Dass in der That die electriche Entladung nicht alle Molecüle in den Spectralröhren, beziehungsweise in den capillaren Theil derselben auf die gleiche hohe Temperatur bringt, ergibt sich schon aus dem Verhalten gemischter Gase, wie ich es bei der Untersuchung der Spectra kohlehaltiger Gase beobachtet habe.¹⁾ Ich zeigte dort, dass in einem Gemische von Aethylen und Wasserstoff innerhalb weiter Druckgrenzen im Spectrum das Vorhandensein des Wasserstoffs gar nicht zu erkennen ist, dass ebenso in einem Gemenge von Kohlensäure und Stickstoff das Spectrum keine Spur des Stickstoffs zeigt. Man kann allerdings darauf hinweisen, dass es sich bei dieser Beobachtung um verschiedene Gase handelt, während, wenn die Röhre nur ein Gas enthält, kein Grund da-

1) Wüllner, Pogg. Ann. 144. p. 481. 1872.

für vorhanden sei, dass ein Molecül eher als das andere auf die Glühtemperatur gebracht würde. Die kinetische Gastheorie scheint mir jedoch einerseits einen solchen Unterschied in dem Verhalten eines Gases gegenüber einem Gemische kaum zu gestatten, andererseits führt gerade diese Theorie unmittelbar zu der Auffassung, dass es immer nur eine von der Stärke der Entladung abhängige beschränkte Zahl von Molecülen ist, welche zur Glühtemperatur gebracht werden. Die electriche Entladung vermehrt die lebendige Kraft der bewegten Molecüle in den Spectralröhren; ist die Entladung schwach, so kann sie nur jene Molecüle in die zur Glüherscheinung erforderliche Bewegung versetzen, welche nach dem Gesetze der Geschwindigkeitsvertheilung schon der, kurz ausgedrückt, Glühgeschwindigkeit nahe sind; je stärker die Entladung ist, um so mehr Molecüle des Gases, welche von der Glühgeschwindigkeit weiter und weiter entfernt sind, werden auf dieselbe gebracht. Der Strom durchsetzt hinreichend weite nicht zu lange Röhren bei passendem Drucke ohne jede Lichterscheinung, weil bei einer solchen Ausbreitung der electriche Entladung kein Molecül auf die Glühtemperatur gebracht wird; in capillaren Röhren, in denen die Entladung im geringen Querschnitt erfolgen muss, werden vielleicht alle Molecüle, deren Geschwindigkeit bis nahe an die mittlere hinabgeht, in die Glühgeschwindigkeit versetzt. Es bedarf deshalb durchaus nicht einmal der Annahme, dass die Temperatur der wirklich leuchtenden Molecüle in capillaren Röhren eine erheblich höhere ist, als in weiteren, der ganz erheblich höhere Procentsatz der auf die Glühtemperatur gebrachten Molecüle kann schon bewirken, dass im Querschnitt der capillaren Röhre auch absolut mehr Molecüle Licht aussenden, als in den weiten, dass also das von der capillaren Schicht ausgesandte Licht heller ist, als das von dicken Schichten in weiten Röhren ausgesandte Licht. Ist es wesentlich diese Vermehrung der glühenden Molecüle, welche die grössere Helligkeit bewirkt, so müsste das Spectrum des von einer hinreichend dicken Gasschicht ausgesandten Lichtes bei gleicher Helligkeit dem der capillaren Röhren in allen Theilen wesentlich gleich sein; würde dagegen die Erhöhung der Temperatur der glühenden

Moleküle in den engen Röhren eine wesentliche Rolle spielen, so würde das nicht der Fall sein, es würde die Helligkeitsvertheilung im Spectrum der engen Röhre im allgemeinen eine andere sein, als in dem der tiefen Gasschicht eines weiteren Rohres.¹⁾

3. Hr. Ebert bemerkt am Schlusse seiner Notiz, dass meine Ableitung der Spectralerscheinungen glühender Gase aus dem Kirchhoff'schen Satze nicht bestehen könne gegenüber der Thatsache, dass in dem Spectrum der Sonnenfackeln und Protuberanzen die Wasserstofflinien ebenso scharf auftreten, wie in dem Spectrum der Geissler'schen Röhren, trotzdem es sich dort um viele Kilometer dicke Schichten handle; er schliesst, dass der Einfluss der Dicke, „der ja nach dem Kirchhoff'schen Satze zu erwarten ist,“ ein sehr minimaler sein muss. Weshalb die Uebereinstimmung in dem Auftreten der scharfen Wasserstofflinien im Spectrum der Protuberanzen und in dem der Spectralröhren einen solchen Schluss bedinge, sagt Hr. Ebert nicht. Diese Thatsache würde für meine Auffassung der Spectralerscheinungen nur dann eine Schwierigkeit bieten, wenn das Spectrum der Protuberanzen lediglich aus den wenigen hellen Linien des Wasserstoffs auf sonst ganz dunklem Grunde bestände. Denn das im Bandenspectrum des Wasserstoffs bei niedrigerer Temperatur auftretende Licht kann in den dicken Schichten des Wasserstoffs, dessen Dichtigkeit in den Protuberanzen allerdings wohl eine sehr geringe ist, nur unter gewissen Voraussetzungen ganz fehlen. Ich habe allerdings nie ein Spectrum der Sonnenfackeln oder Protuberanzen zu sehen Gelegenheit gehabt; nach den mir bekannten Beschreibungen von Secchi, Young u. a. erscheinen in diesen Spectren die Linien des Wasserstoffs auf dem continuirlichen, zum Theil Fraunhofer'sche Linien zeigenden Spectrum als helle Linien. Secchi gibt in seinem Buche über die Sonne (deutsche Ausgabe, p. 470) an, dass man bei Protuberanzbeobachtungen den Spalt so einstellen

1) Mit dem im nächsten Paragraphen erwähnten langen Stickstoffrohr habe ich nur ganz geringe Verschiedenheiten zwischen dem Spectrum einer 1 m langen Schicht in einem 2 cm weiten Rohre und dem eines Spectralrohres gewöhnlicher Form gefunden.

könne, dass das Spectrum in der Nähe des Sonnenrandes die Wasserstofflinien dunkel zeige, daneben im Protuberanzspectrum hell und noch weiter vom Sonnenrand entfernt weder hell noch dunkel.

Die Beobachtungen in Geissler'schen Röhren von 2 cm Weite zeigen, dass das aus den vier Linien im sichtbaren Theile bestehende Spectrum des Wasserstoffs auftritt bei Funkenentladung, und zwar zunächst bei den schwächsten in Form von Funken durchgehenden Entladungen als ganz scharfe Linien, wie es auch die in den Bandenspectren der Gase auftretenden Linien sind, ja aus welcher wohl die Bandenspectra überhaupt zusammengesetzt sind. Je heller man die Bandenspectra macht, um so mehr erkennt man wenigstens, dass die Banden aus feinen, helleren und weniger hellen, mehr oder weniger dicht liegenden Linien zusammengesetzt sind, welche sich auch, wie ich mich überzeugt habe, durch Vermehrung der Schichtdicke nicht verbreitern. Ich habe ein wie das anfänglich beschriebene eingerichtete Spectralrohr, dessen langes Rohr eine Länge von 1 m hatte, mit Stickstoff gefüllt und damit ein Stickstoffbandenspectrum erhalten, welches ebenso hell war als das in capillaren Röhren auftretende, vielleicht noch heller als die der gewöhnlichen Stickstoffspectralröhren. Man konnte in dem Spectrum erkennen, dass auch die Felder im gelbrothen und gelbgrünen Theile des Stickstoffspectrums aus Linien zusammengesetzt sind, und konnte wenigstens an der weniger brechbaren Seite dieser Felder ganz scharfe helle Linien wahrnehmen.

Bekanntlich führt die Dispersionstheorie des Hrn. v. Helmholtz zu dem Satze, dass in solchen Medien, in welchen die Molecüle ihre mit dem Licht in Beziehung stehenden Schwingungen ohne Reibung vollführen, das Absorptionsvermögen nur für jene Wellen überhaupt von Null verschieden sein kann, welche denjenigen Schwingungen entsprechen, welche die körperlichen Molecüle infolge der vorhandenen elastischen Verhältnisse vollführen können, für jede andere Schwingung ist das Absorptionsvermögen absolut Null.¹⁾ Für solche

1) Man sehe u. a. meine Experimentalphysik IV. Aufl. 2. p. 311.

Schwingungen kann somit eine noch so grosse Vermehrung der strahlenden Schichtdicke nur den Erfolg haben, dass die Linien eine grössere Helligkeit annehmen, eine Verbreiterung derselben ist nicht möglich.

Die Schärfe der Wasserstofflinien in dem Spectrum der schwachen Funken führt zu dem Schlusse, dass dieselben wie die im Bandenspectrum vorhandenen Linien solchen Schwingungen ihre Entstehung verdanken, welche ohne Widerstand erfolgen, sie werden deshalb in dem Spectrum auch der dicksten Schichten nichts von ihrer Schärfe einbüssen. Würden wir im Stande sein, hinreichend dicke Schichten des Wasserstoffs auf jene Temperatur zu bringen, welche die von den schwachen Funken getroffene Molecülreihe annimmt; so müssten diese dasselbe Spectrum zeigen, welches wir meist bei den capillaren Spectralröhren sehen, in denen das positive Büschellicht durch eine schwache Funkenentladung eingeleitet wird, das Bandenspectrum und das Linienspectrum des Wasserstoffs. Dieses Spectrum zeigen uns die Protuberanzen in passender Entfernung von dem Sonnenrande, nur dass wegen der Vermischung mit anderem Lichte, dem der Corona und dem in der Atmosphäre reflectirten Sonnenlichte, die Schattirungen, welche das Bandenspectrum des Wasserstoffs zeigt, nicht sichtbar sind.

In weiterer Entfernung vom Sonnenrande zeigt nach Secchi das Spectrum der Protuberanzen die hellen Linien des Wasserstofflinienspectrums nicht mehr, es zeigt aber an dessen Stelle auch keine dunklen Linien. Es lässt sich das durchaus so auffassen, dass wir dort, soweit das Spectrum dem Wasserstoff angehört, das Bandenspectrum des Wasserstoffs vor uns haben, also das Spectrum, welches der niedrigeren Temperatur angehört, bei welcher noch keine Molecüle vorhanden sind, welche die den Linien H_{α} ... entsprechenden Schwingungen vollführen. Dass wir dort ebenfalls die Schattirungen des Bandenspectrums nicht sehen, hat seinen Grund wieder in der Mischung des Wasserstofflichtes mit dem der Corona und dem in der Atmosphäre reflectirten Sonnenlicht.

In der Nähe des Sonnenrandes und ebenso in den Sonnenfackeln zeigen sich die Linien des Wasserstofflinien-

spectrums verbreitert, sie zeigen sich so, wie wir das Spectrum in Wasserstoffspectralröhren sehen, wenn wir stärkere und stärkere Entladungen durch das Gas senden, wie wir sie erhalten, wenn wir dem Gase eine grössere und grössere Dichtigkeit geben. Man kann, wie ich im Jahre 1869 gezeigt habe, durch hinreichende Stärke der Entladung die Linien in helle Felder verwandeln, welche schliesslich zusammenwachsen und ein unschattirt continuirliches Spectrum geben, wie es glühende feste Körper liefern. Die Verbreiterung der Linien tritt bei der höheren Temperatur ein, und dem entspricht es eben, dass wir an der Sonne diese Verbreiterung der Linien in der Nähe des Sonnenrandes und in den Sonnenfackeln sehen.

4. Es ist früher gegen meine Auffassung der Spectralerscheinungen der Gase als ein Einwurf geltend gemacht, dass ich bei derselben eine Aenderung des Absorptionsvermögens und dadurch bedingt des Emissionsvermögens mit der Temperatur annehmen müsse. Ich habe diesen Einwurf als unberechtigt nachgewiesen, indem ich, abgesehen von anderweitig bekannten Erscheinungen, welche im allgemeinen eine Zunahme und damit eine Aenderung des Absorptionsvermögens beweisen, zeigte, dass man bei dem Stickstoff direct die Verschiebung der Maxima im Spectrum mit der Temperatur beobachten kann. Es scheint mir nun auch, dass man in Verfolgung eines von Hrn. Boltzmann in seiner Abhandlung über die Natur der Molecüle¹⁾ ausgesprochenen Gedankens die Aenderung des Absorptionsvermögens, beziehungsweise das Auftreten ganz neuer Linien in höherer Temperatur als durchaus wahrscheinlich, ja vielleicht als nothwendig erkennen kann. Hr. Boltzmann kommt in dieser Abhandlung zu folgendem Schlusse: „Das gesammte Aggregat, welches ein einzelnes Gasmolecül bildet, und welches sowohl aus ponderabeln Atomen als auch etwa damit verbundenen Aetheratomen bestehen kann, verhält sich wahrscheinlich bei seiner progressiven Bewegung und bei dem Zusammenstosse mit anderen Molecülen nahezu wie ein

1) Boltzmann, Wien. Ber. 74. p. 553. 1876.

fester Körper. Das Licht, welches die Molecüle ausstrahlen, hat wahrscheinlich seinen Grund in Erzitterungen, die den Moment des Zusammenstosses begleiten, und ist dem Schalle vergleichbar, welcher von Elfenbeinkugeln im Moment des Zusammenstosses ausgeht.“

Die Form der Molecüle muss je nach dem Verhältniss ihrer specifischen Wärmen eine verschiedene sein; die Molecüle der einatomigen Gase, für welche das Verhältniss der specifischen Wärmen 1,66 ist, verhalten sich wie elastische Kugeln; die Molecüle der zweiatomigen Gase, für welche das Verhältniss der specifischen Wärmen 1,4 ist, müssen aus mindestens zwei Aggregaten bestehen, wie sie das einatomige Molecül darstellt, sie müssen generell aus mehreren solchen Aggregaten zusammengesetzt sein, welche sich zu einem Rotationskörper geordnet haben. Die Gase, bei denen das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen 1,33 ist, müssen aus mehreren solchen Aggregaten zusammengesetzt sein, welche nicht die Form eines Rotationskörpers bilden. Sinkt das Verhältniss der specifischen Wärmen mit steigender Temperatur unter den Werth 1,33, so beweist das, dass die Verbindung der Einzelaggregate im Molecül gelockert wird, dass sie gegeneinander beweglich werden.

Hiernach sind im Molecül eine Anzahl ganz verschiedener Schwingungen möglich, welche bei verschieden starken Stössen, somit bei verschieden hohen Temperaturen eintreten und damit auch eine die andere modificiren können. Es sind Schwingungen der Aetheratome, der Körperatome in den Einzelaggregaten, welche den Molecülen der einatomigen Gase entsprechen, möglich und Schwingungen der Einzelaggregate im Molecül. In den niedrigeren Temperaturen sind das alles kurze Erzitterungen, in den höchsten Temperaturen werden die Schwingungen erheblicher, und da alle diese Bewegungen gleichzeitig stattfinden, so müssen die Theile des Molecüls wegen ihres inneren Zusammenhanges sich verhalten wie die Molecüle eines festen Körpers, sie müssen ein unschattirt continuirliches Spectrum liefern. In der That zeigen nach meinen und den Untersuchungen des Hrn. Cazin alle Gase, bei denen die Erscheinungen bis zu

hinreichend starken electrischen Entladungen verfolgt sind, in den höchsten Temperaturen ein continuirliches Spectrum, in welchem die Linien verschwinden, entweder indem dieselben sich ausbreiten wie bei dem Wasserstoff und zum Theil bei dem Sauerstoff, oder indem sie in dem hellen Hintergrunde gewissermassen versinken.

Welche Schwingungen bei den schwächsten Stössen zuerst merkbar werden, ob diejenigen der Aetheratome oder die der Körperatome in den Einzelaggregaten oder auch die der Einzelaggregate gegeneinander, ist schwer anzugeben.

Es liegt die Annahme nahe, dass es im allgemeinen zuerst etwa die Aetheratome sind, welche in zitternde Bewegung gerathen; dieser würde die grosse Zahl Linien entsprechen, welche das reichlich schattirte Bandenspectrum geben. Bei der geringen Masse der in Erzitterung gerathenen Atome kann das einzelne Molecül während seiner Erzitterung nur wenig lebendige Kraft abgeben, es bedarf deshalb immer Schichten ziemlicher Dicke, damit das Licht wahrnehmbar wird. Auch in dicken Schichten sind es zunächst immer nur relativ wenig Molecüle, welche in diese Erzitterung gerathen. In höherer Temperatur treten die Schwingungen der Körperatome hinzu; wegen der grösseren Masse der direct in Bewegung versetzten Atome geben diese Schwingungen mehr Licht aus, deshalb können wir diese Schwingungen schon wahrnehmen, wenn die von dem Funken getroffene Molecülreihe in dieselben versetzt wird, sie würden also die Linien des Funkenspectrums geben. Erst bei den stärksten Stössen gerathen im allgemeinen die Einzelaggregate in Schwingungen, und wenn so das ganze Molecül in allen seinen Theilen in Erschütterung geräth, entwickelt sich das continuirliche Spectrum. Dass unter Umständen einzelne Schwingungen der zweiten und dritten Art schon mit der ersteren zusammen auftreten können, ist keineswegs ausgeschlossen. Es sind in dem Falle aber die geringen, rasch vorübergehenden Erzitterungen, welche nur scharfe Linien geben können. Eine Verbreiterung der Linien, resp. das Continuirllichwerden des Spectrums kann erst eintreten, wenn die Schwingungen nicht mehr als freie statt-

finden, wenn sie bei ihrer Bewegung einen Widerstand zu überwinden haben.

Die Spectra z. B., welche uns der Wasserstoff liefert, würden sich in folgender Weise sehr einfach und ungezwungen ableiten lassen. Durch die schwächeren Stösse würden die Körper- und Aetheratome der Molecüle in Erzitterung versetzt, welche das reichhaltig schattirte Bandenspectrum des Wasserstoffs liefern. Bei einer gewissen hohen Temperatur sind die Stösse hinreichend, um auch die Einzelaggregate im Molecül als solche in zitternde Bewegung zu versetzen. Diese Erschütterungen liefern das Linienpectrum, dessen Linien erheblich heller sind, als die des ersten Spectrums, weil es unvergleichlich grössere Massen sind, welche durch diese Stösse in Bewegung versetzt werden. Während wir es auch hier zunächst, nach der Anschauung Boltzmann's, mit rasch vorübergehenden Erschütterungen zu thun haben, welche uns scharfe Linien bieten, gehen bei noch höheren Temperaturen infolge der immer stärker werdenden Stösse diese Erschütterungen in eigentliche Schwingungen über, welche unter einem der Reibung ähnlichen Widerstande stattfinden. Der Erfolg ist die Verbreiterung der hellen Linien, die Verwandlung derselben in helle Felder, welche allmählich zu dem continuirlichen Spectrum zusammenwachsen.

Eine allerdings wohl sehr schwer auszuführende experimentelle Prüfung dieser Auffassung würde durch Messung der specifischen Wärme der Gase möglich sein. Von denjenigen Temperaturen an, bei denen die Ausbreitung der hellen Linien, beziehungsweise das continuirliche Spectrum auftritt, müsste die specifische Wärme der Gase zunehmen, und das Verhältniss der beiden specifischen Wärmen der Gase unter jenen Werth sinken, den er dem Bau der Molecüle entsprechend haben müsste.

Aachen, Mitte März 1888.

IV. Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermoströme; von H. Lorberg.

Bekanntlich hat W. Thomson durch Anwendung der beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf einen Thermostrom folgende Gleichungen abgeleitet. Es sei ein Kreis aus zwei Metallen a und b gegeben, deren Löthstellen die absoluten Temperaturen T_1 und $T_2 > T_1$ haben, und in denen ein Thermostrom an der Löthstelle T_1 von b nach a geht; es bezeichne $H(T)$ die an einer Contactstelle von der Temperatur T beim Uebergange der Electricitätseinheit von a nach b erzeugte Peltier'sche Wärme; ferner sei $\sigma_a dT$ die in dem Metall a von aussen aufgenommene Wärme, während die Electricitätseinheit von einem Punkte von der Temperatur T zu einem Punkte von der Temperatur $T + dT$ übergeht. Der Satz von Joule, dass die in einem geschlossenen Strome durch die Electricitätseinheit entwickelte galvanische Wärme gleich der electromotorischen Kraft E des Stromes ist, in Verbindung mit dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, wonach diese Wärmemenge gleich der ganzen an den Contactpunkten und im Inneren eines jeden Metalles aufgenommenen Wärme ist, liefert dann die Gleichung:

$$(I) \quad E = H(T_1) - H(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b) dT,$$

und der zweite Hauptsatz:

$$(\alpha) \quad \int \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{liefert die Gleichung:}$$

$$\frac{H(T_1)}{T_1} - \frac{H(T_2)}{T_2} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_a - \sigma_b}{T} dT = 0, \quad \text{woraus:}$$

$$(II) \quad \sigma_a - \sigma_b = \frac{dH}{dT} - \frac{H}{T},$$

mittels welcher Gleichung die Gl. (I) sich auch schreiben lässt:

$$(I_a) \quad E = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} dT.$$

Ein Schritt über diese Resultate hinaus ist in neuester Zeit in zwei interessanten Abhandlungen von Duhem¹⁾ und von Lorentz²⁾ unternommen worden; es scheint mir nicht ohne Interesse zu sein, die Uebereinstimmung beider Theorien nachzuweisen und einige mögliche Einwürfe zu besprechen, von denen einer von Budde³⁾ gegen die Entwicklungen von Lorentz erhoben worden ist.

Duhem leitet die Gleichungen (I) und (II) aus der von ihm aufgestellten Theorie des thermodynamischen Potentials Φ ab; nach ihm⁴⁾ ist die Energie eines mit einer Electricitätsmenge e geladenen Leiters von der Entropie S , der gewöhnlichen Energie U_0 und der electrostatischen Energie $W = \frac{1}{2} e V$:

$$(a) \quad U = \Phi + TS = U_0 + W + (\vartheta + h) e.$$

Dabei sind ϑ und h zwei dem Leiter eigenthümliche, nur von seiner Natur, aber nicht von seiner Gestalt und Grösse abhängige Constanten; und zwar ist die Potentialdifferenz χ zweier im Contact und im electrostatischen Gleichgewicht befindlichen Metalle a und b , sowie die beim Uebergang der Electricitätseinheit von a nach b erzeugte Peltier'sche Wärme II :

$$(1) \quad \chi = V_a - V_b = \vartheta_b - \vartheta_a, \quad II = h_a - h_b.$$

Hiernach ist $e d(\vartheta + h)/dT$ die Erhöhung der Wärmecapacität des Metalles durch die Ladung; setzen wir also:

$$(2) \quad \sigma = \frac{d(\vartheta + h)}{dT},$$

$$(3) \quad q = \vartheta_a + h_a - (\vartheta_b + h_b) = II - \chi, \quad \text{also:}$$

$$(3_a) \quad \sigma_a - \sigma_b = \frac{dq}{dT},$$

so können wir σ als „die spezifische Wärme der positiven Electricitätseinheit“ bezeichnen; in einem Metalle a wird also beim Uebergang der Electricitätseinheit von einem Punkte von der Temperatur T zu einem Punkte von der Temperatur

1) Duhem, Ann. de l'éc. Norm. (3) 2. 1885.

2) H. A. Lorentz, Arch. Néerl. 20. p. 129. 1886.

3) Budde, Wied. Ann. 30. p. 664. 1887.

4) Duhem, Le potentiel thermodynamique et ses applications. Paris 1886. p. 209 u. 222.

$T + dT$ eine Wärmemenge $\sigma_a dT$ verbraucht. Mittelst (3) und (3a) gehen die Gleichungen (II) und (I) oder (Ia) über in:

$$(II_b) \quad H = T \frac{d\chi}{dT}, \quad (I_b) \quad E = \chi(T_1) - \chi(T_2).$$

Die Definition der Grösse σ in den Gleichungen (I) und (II) ist allerdings bei Duhem eine andere, auch stellt er keine Beziehung zwischen σ und den Constanten ϑ und h auf, mithin auch nicht die Gleichungen (2), (Ib), (IIb); er definiert nämlich, wenn in einem Metall ein Electricitätstheilchen de von einem Punkte von der Temperatur T zu einem Punkte von der Temperatur $T + dT$ übergeht, die Entropieänderung dS durch die Gleichung:

$$dS = \frac{\sigma}{T} dT de.$$

Nun kann man aber die Entropieänderung dS auch dadurch entstehend denken, dass de an seiner Stelle bleibt, und hier T um dT wächst; da dies eine umkehrbare Zustandsänderung ist, so ist die dabei aufgenommene Wärme $d(U - U_0) = T dS$, also nach Gl. (a):

$$\frac{d(\vartheta + h)}{dT} dT de = T dS = \sigma dT de,$$

woraus sich die Gl. (2) ergibt, und damit auch die Gl. (3) (3a) (Ib) (IIb).

Lorentz setzt die Energie eines mit einer Electricitätsmenge e geladenen Metalles:

$$(b) \quad U = U_0 + W + U',$$

mithin den Wärmeverbrauch in dem Metall beim Uebergange eines Electricitätstheilchens de von einem Punkte von der Temperatur T zu einem Punkte von der Temperatur $T + dT$:

$$\sigma dT de = \frac{d}{dT} \left(\frac{dU'}{de} \right) dT de,$$

was mit (a), (2) und (3a) übereinstimmt, wenn man setzt:

$$(c) \quad U' = e(\vartheta + h), \quad \text{mithin} \quad q = \frac{dU'_a}{de} - \frac{dU'_b}{de}.$$

Die Gl. (3) leitet Lorentz auf folgendem Wege ab. Es seien G_a und G_b zwei resp. aus den Metallen a und b bestehende Leiter von der Temperatur T , verbunden durch einen langen und dünnen, aus den Metallen a und b zusammengesetzten Draht, dessen Contactpunkt mit einem Wärme-

reservoir von der Temperatur T verbunden ist; dieselben befinden sich im electrostatischen Gleichgewicht und haben die Ladungen e_a und e_b und die Potentiale V_a und V_b . Durch eine mittelst äusserer Kräfte bewirkte Deformation wird die Capacität C_a von G_a um dC_a vergrössert, die von G_b um dC_b verkleinert, sodass $V_a dC_a = V_b dC_b = de$ ist; es geht dann die Electricitätsmenge de von G_b durch den Contact auf G_a über, sodass schliesslich die Potentiale wieder V_a und V_b sind; dabei wird aus dem Reservoir eine Wärmemenge dQ aufgenommen, und zwar am Contactpunkte, da bei Bewegung von Electricität innerhalb eines homogenen Leiters von constantem Potential und constanter Temperatur weder die electrostatische Energie W , noch der Theil U' der Gesamtenergie sich ändern kann; dQ muss also gleich der am Contactpunkt absorbirten Peltier'schen Wärme Πde sein. Nun ist $W_a = \frac{1}{2} e_a V_a$, $e_a = C_a V_a$, also, da bei der Aenderung von C_a V_a als constant betrachtet werden darf, die dabei verbrauchte Arbeit der äusseren Kräfte:

$$dA_a = \delta W_a = \frac{1}{2} d \left(\frac{e_a^2}{C_a} \right) = -\frac{1}{2} \frac{e_a^2}{C_a^2} dC_a = -\frac{1}{2} V_a^2 dC_a = -\frac{1}{2} V_a de,$$

ferner die Aenderung der gesammten Energie nach (b):

$$dU_a = dW_a + \frac{dU'_a}{de} de = \frac{1}{2} V_a de + \frac{dU'_a}{de} de,$$

mithin die aufgenommene Wärme:

$$dQ_a = -dA_a + dU_a = \left(V_a + \frac{dU'_a}{de} \right) de, \quad \text{also:}$$

$$(d) \quad \Pi = V_a + \frac{dU'_a}{de} - \left(V_b + \frac{dU'_b}{de} \right) = \chi + q,$$

übereinstimmend mit Gl. (3). Da χ und Π von der Ladung, der Gestalt und Grösse der Leiter unabhängig, also bloss Functionen von T sind, so muss nach Gl. (d) dasselbe auch für q gelten, mithin auch für den auf ein einzelnes Metall bezüglichen Werth dU'/de , d. h. U' muss die Form $eF(T)$ haben, was nach Gl. (c) ebenfalls mit der Theorie von Duhem übereinstimmt.

Budde¹⁾ macht darauf aufmerksam, dass die bei diesem

1) Budde, l. c. p. 668.

Process vorkommenden Werthe von U' sich auf eine Oberflächenladung beziehen und daher wahrscheinlich von dem sich auf im Inneren der Leiter strömende Electricität beziehenden Werth verschieden seien, da „eine Oberflächenladung sicherlich nicht in dem Metalle, sondern in der aus der Luft adsorbirten Adhäsionshaut steckt, und daher der ihr entsprechende Werth von U' vorwiegend von diesem Isolator abhängt“; er unterscheidet daher die auf eine Oberflächenladung bezügliche Energie U'_w von der auf innere Electricität bezüglichen U'_i . Ich will diese Unterscheidung vorläufig beibehalten, obwohl sie sich später als wahrscheinlich unnöthig herausstellen wird. Setzen wir demnach:

$$(e) \quad U'_{ia} - U'_{ib} = q_i, \quad U'_{wa} - U'_{wb} = q_w,$$

und bezeichnen mit H die in einem electrischen Strome beim Uebergange der Electricitätseinheit von b nach a an der Contactstelle absorbirte Peltier'sche Wärme, so gibt der Lorentz'sche Process statt (d):

$$(f) \quad H + q_w - q_i = \chi + q_w,$$

$$\text{wo:} \quad q_w - q_i = \left(\frac{dU'_{wa}}{de} - \frac{dU'_{ia}}{de} \right) + \left(\frac{dU'_{ib}}{de} - \frac{dU'_{wb}}{de} \right)$$

die aufgenommene Wärme bezeichnet, wenn die Electricitätseinheit in a aus dem Inneren auf die Oberfläche und in b von der Oberfläche ins Innere geht; an Stelle der Gl. (3) tritt also:

$$(3_b) \quad H = \chi + q_i.$$

Ein weiteres Bedenken dagegen, ob dieser Werth von H mit der in einem geschlossenen Strom absorbirten Peltier'schen Wärme identisch sei, könnte sich daran knüpfen, dass bei dem beschriebenen Lorentz'schen Process $\chi = V_a - V_b$ die Contact-Potentialdifferenz zweier in electrostatischem Gleichgewicht befindlichen Leiter bezeichnet, welche möglicherweise von der in einem Stromkreis am Contactpunkt stattfindenden Potentialdifferenz $V'_a - V'_b$ verschieden sein könnte; wäre dies der Fall, und denkt man sich, wie Lorentz thut, die zwei mit G_a und G_b verbundenen Drähte an einen Stromkreis, z. B. einen Thermokreis, auf beiden Seiten des Contact-

punktes (a, b) angelegt, so könnte man entweder, falls G_a und G_b die Gleichgewichtspotentiale V_a und V_b haben, aus dem Lorentz'schen Process nichts über den Werth von Π im Strom schliessen; oder wenn G_a und G_b die Potentiale V'_a und V'_b hätten, so würden sie nicht in electrostatischem Gleichgewicht sein, man könnte also nicht durch Aenderung der Capacitäten Electricität von G_b nach G_a hinübertreiben. Dieses Bedenken erscheint insofern berechtigt, als wir über die in einem Hydro- oder Thermoström an den einzelnen Contacten herrschenden factischen Potentialdifferenzen aus der Beobachtung nichts wissen; in einem Hydroström ist bekanntlich die bei geschlossener oder offener Kette beobachtete electromotorische Kraft ganz unabhängig von den beim Contact je zweier Bestandtheile der Kette beobachteten Gleichgewichtspotentialdifferenzen — was sich auch aus der von Duhem aufgestellten Theorie der Hydroströme ergibt —; und bei einem Thermoström lehrt uns die Gl. (I) oder (I^a) nichts über den Zusammenhang der electromotorischen Gesamtkraft mit den factischen Potentialdifferenzen an den Contactpunkten und über den Zusammenhang dieser mit den Gleichgewichtspotentialdifferenzen; dass die Grössen $\Pi(T_1)$ und $\Pi(T_2)$ nicht mit den letzteren identisch sind, ist durch die Beobachtung bewiesen. Nehmen wir aber die von Duhem¹⁾ aufgestellte Theorie des galvanischen Stromes an, so gibt uns diese über die obige Frage Aufschluss. Denken wir uns nämlich in einem geschlossenen Hydro- oder Thermoström in zwei sich berührenden Metallen a und b zwei unendlich nahe Querschnitte 1 und 2 und bezeichnen mit V_1 und V_2 die hier wirklich stattfindenden Potentiale, so ist nach Duhem die beim Uebergang einer Electricitätseinheit von 1 nach 2 durch den Contact erzeugte nicht compensirte Arbeit oder Wärme $= V_1 + \vartheta_a - (V_2 + \vartheta_b)$; andererseits aber ist dieselbe gleich der in diesem Leiterstück durch die durchgehende Electricitätseinheit im Strom erzeugten galvanischen Wärme, also unendlich klein, mithin ist $V_1 - V_2 = \vartheta_b - \vartheta_a = \chi$, d. h. die factische Potentialdifferenz

1) Duhem, Le potentiel thermodynamique.

im Strom ist dieselbe, als wenn die zwei sich berührenden Metalle sich in electrischem Gleichgewicht befänden. Danach ist — mit der oben erwähnten Modification — der Lorentz'sche Schluss berechtigt, und Gl. (3_b) gibt die wirklich im Strom absorbirte Peltier'sche Wärme.

Lorentz vermeidet die Anwendung der Gl. (α) auf den Thermostrom, woraus wir oben die Gl. (II) abgeleitet haben, und zwar aus dem Grunde, weil die Gl. (α) sich nur auf einen reversiblen Process bezieht, während die im Thermostrom vorkommende Wärmeleitung ein irreversibler Process ist. Dieses Bedenken scheint mir nicht begründet. Denn die Wärmeproduction an den Contactstellen und die Thomson'sche Wärmeproduction ist ein reversibler Process, mithin auch die gesammte Wärmeabgabe nach aussen, wenn man, was zur Ableitung der Gl. (II) genügt, die Stromstärke als unendlich klein, mithin die irreversible, Joule'sche Wärmeproduction als ein unendlich Kleines zweiter Ordnung annimmt, und wenn man die Wärmeaufnahme an der warmen und die Wärmeabgabe an der kalten Contactstelle, welche zur Erhaltung constanter Temperaturen an diesen Stellen nöthig ist, vernachlässigt; dass neben diesem reversiblen Process noch ein irreversibler, nämlich Wärmeleitung, nebenher läuft, kann die Anwendbarkeit der Gl. (α) auf den ersteren Process nicht beeinträchtigen. Indessen gelangt Lorentz dadurch, dass er an Stelle des Thermostromes einen vollkommen reversiblen Kreisprocess setzt, zu einer — abgesehen von der oben besprochenen eventuellen Modification — meines Erachtens unanfechtbaren Gleichung, welche neben der Gl. (II) bestehen muss. Er betrachtet nämlich einen Thermokreis aus zwei Metallen a und b , deren Contactpunkte die Temperaturen T und $T + dT$ haben und mit zwei Wärmereservoirs von denselben Temperaturen verbunden sind; die zwei schon oben betrachteten „Uebertrager“ G_a und G_b stehen mit zwei Gasmassen in Verbindung, durch deren Compression oder Dilatation ihre Temperatur adiabatisch geändert werden kann. Zuerst werden G_a und G_b , welche die Temperatur T haben, durch Drähte aus denselben Metallen mit zwei dem Contact T benachbarten Punkten verbunden und durch Aenderung ihrer Capacitäten

eine Electricitätsmenge de von G_b auf G_a hinübergetrieben, wobei die Uebertrager nach Gl. (d) eine Wärmemenge $\chi + q_w$ aus dem ersten Reservoir aufnehmen; dann werden die Uebertrager abgetrennt und ihre Temperatur adiabatisch auf $T + dT$ gebracht, wodurch zugleich ihre Potentiale die am zweiten Contact herrschenden Werthe annehmen; darauf werden sie mit dem zweiten Contact verbunden und durch Aenderung ihrer Capacitäten de wieder von G_a auf G_b getrieben; dann werden sie wieder abgetrennt und ihre ursprünglichen Temperaturen und Potentiale adiabatisch wieder hergestellt; schliesslich werden sie mit dem ersten Wärmereservoir verbunden und durch Druckänderung auch die ursprünglichen Volumina ihrer Gasmassen wieder hergestellt. Da die Uebertrager hierbei einen umkehrbaren Kreisprocess durchgemacht haben, so lässt sich die Gl. (a) anwenden; hinsichtlich der Ableitung verweise ich auf die Abhandlung, in welcher aber, da hier nur Oberflächenladungen vorkommen, überall U'_w statt U zu setzen ist. Es ergibt sich so die Gl. (A) p. 150 der Lorentz'schen Abhandlung, nämlich $q = T d\chi/dT - \chi$, oder mit der erwähnten Modification.

$$(4) \quad q_w = T \frac{d\chi}{dT} - \chi.$$

Will man den obigen Nachweis, dass die Gleichgewichtspotentialdifferenz der Uebertrager mit der im Strom an den Contactstellen herrschenden Potentialdifferenz identisch ist, nicht gelten lassen, so muss man sich statt des Thermokreises ein Paar von Drähten a, b von der Temperatur T und ein davon isolirtes Paar aus denselben Metallen von der Temperatur $T + dT$ denken und auf dieses System den Lorentz'schen Process anwenden; man erhält dann wieder die Gl. (4), worin χ die Gleichgewichtspotentialdifferenz bezeichnet; bedeutet ferner $II_w de$ die Wärme, welche an der Contactstelle zweier in electrischem Gleichgewicht befindlichen Metalle a und b erzeugt wird, wenn man durch Veränderung der Capacitäten oder durch einen Inductionsstrom, der in einem aus ihnen gebildeten geschlossenen Kreise erzeugt wird, eine Electricitätsmenge de von a nach b hinübertreibt, so erhält man nach Gl. (f) statt (3_b) die Gleichung:

$$(g) \quad H_w = \chi + q_w = T \frac{d\chi}{dT}.$$

Ueber einen Thermostrom lässt sich dann aus dem Lorentz'schen Process nichts über die Gleichungen (I) und (II) Hinausgehendes schliessen.

Nimmt man dagegen die im Thermostrom vorkommenden Potentialdifferenzen als identisch mit den Gleichgewichtspotentialdifferenzen an, so gilt die Gl. (3_b); ferner muss nach dem oben Bemerkten auch die Gl. (II) oder:

$$\frac{dq_i}{dT} = \frac{dH}{dT} - \frac{H}{T}$$

gültig sein, welche mittelst (3_b) übergeht in:

$$q_i = T \frac{d\chi}{dT} - \chi,$$

woraus nach Gl. (4) folgt:

$$(5) \quad q_w = q_i = q.$$

Unter der Voraussetzung also, dass die im Thermostrom an den Contactstellen stattfindenden Potentialdifferenzen mit den Gleichgewichtspotentialdifferenzen χ bei denselben Temperaturen identisch sind, lassen sich sämtliche im Thermostrom vorkommende Grössen durch χ ausdrücken, indem sich die Gleichungen (I_a), (II), (3_b), (4) folgendermassen schreiben lassen:

$$(A) \quad E = \chi(T_1) - \chi(T_2) \quad \text{oder:}$$

$$(A') \quad E = H(T_1) - H(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b) dT = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} dT,$$

$$(B) \quad H = \chi + q = T \frac{d\chi}{dT}, \quad \text{wo} \quad q = \frac{dU_a}{de} - \frac{dU_b}{de},$$

$$(C) \quad \sigma_a - \sigma_b = \frac{dq}{dT} = \frac{dH}{dT} - \frac{H}{T} = T \frac{d^2\chi}{dT^2}.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den oben aus der Theorie von Duhem abgeleiteten überein, ebenso mit den von Lorentz aufgestellten; nur haben wir hier die Gl. (A) aus dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie abgeleitet, während sie bei Lorentz als Hypothese erscheint. Ferner ist unter der obigen Voraussetzung nach Gl. (g) die an einem

Gleichgewichtscontact erzeugte Peltier'sche Wärme gleich der in einem Strom an dieser Contactstelle erzeugten.

Die Gl. (A) ist bekanntlich von Avenarius¹⁾ für solche Fälle, wo E als eine quadratische Function von T_1 und T_2 betrachtet werden kann, experimentell bestätigt worden. Aus dieser Gleichung aber zu schliessen, dass die electromotorische Kraft des Thermoströmes nur an den Contactstellen ihren Sitz habe, wie Lorentz (p. 159) thut, scheint mir nicht völlig gerechtfertigt; denn dieser Schluss beruht auf der unbewiesenen Annahme, dass der einer einzelnen Contactstelle entsprechende Theil der electromotorischen Gesamtkraft gleich der daselbst herrschenden Potentialdifferenz sei; lässt man diese Annahme fallen, so könnte man mit demselben Recht aus der zweiten Form von E in Gl. (A') schliessen, dass die electromotorische Kraft nur in den homogenen Theilen ihren Sitz habe, wie bekanntlich Kohlrausch annimmt, und aus der ersten, dass dieselbe theils an den Contactstellen, theils in den homogenen Theilen entspringe. Letztere Annahme macht bekanntlich Budde in seiner auch von Clausius adoptirten Theorie; er nimmt nämlich $\Pi(T_1)$ und $\Pi(T_2)$ als die electromotorischen Kräfte an den Contactstellen an, setzt aber in seiner letzten, oben erwähnten Abhandlung im Anschluss an die Gleichung $\Pi = \chi + q$ von Lorentz voraus, dass diese electromotorischen Kräfte keine blossen Potentialdifferenzen sind, also nicht aus rein electrischen Kräften entspringen; dann muss nothwendig der zweite Theil $\int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b) dT$ in Gl. (A') eine in den homogenen Theilen wirksame electromotorische Kraft sein. Um diese zu erklären, setzt er $\Pi = T(\psi_a - \psi_b)$, welcher Ausdruck der Form nach mit Gl. (B) übereinstimmt; dann wird nach Gl. (C):

$$\sigma_a - \sigma_b = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi}{T} \right) = T \left(\frac{d\psi_a}{dT} - \frac{d\psi_b}{dT} \right) dT,$$

$$\text{also: } E = \Pi(T_1) - \Pi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} T \frac{d\psi_a}{dT} dT + \int_{T_2}^{T_1} T \frac{d\psi_b}{dT} dT,$$

1) Avenarius, Pogg. Ann. 122. p. 193. 1864. Vgl. Wüllner, Physik. 3. Aufl. 4. p. 528.

und man kann nun $T d\psi_a/dT \cdot dT$ als eine electromotorische Kraft von derselben Art wie II ansehen, welche innerhalb des Metalles a zwischen zwei Querschnitten von verschiedener Temperatur infolge einer durch die Temperaturverschiedenheit hervorgerufenen Structurverschiedenheit wirkt. Allerdings erscheint aber die Annahme von Lorentz weit natürlicher; denn die in der angegebenen Weise modificirte Budde'sche Theorie bleibt die Erklärung dafür schuldig, weshalb die electromotorische Kraft an einem Gleichgewichtscontact $= \chi = V_a - V_b$ ist, dagegen an einem Contact im Thermostrome noch einen Zuwachs q erhält, oder weshalb die Peltier'sche Wärme II , welche nach dem obigen in beiden Fällen $= \chi + q$ ist, im zweiten Falle gleich der am Contact wirkenden electromotorischen Kraft ist, im ersten dagegen nicht.

Die Gl. (5) oder $U'_w = U'_i$ ist zufolge der Gl. (f) identisch mit der Bedingung, dass in einem Leiter, auf welchem sich die Electricität im Gleichgewicht befindet, d. h. in einem Raume von constantem Potential, beim Uebergange eines Electricitätstheilchens aus dem Inneren auf die Oberfläche keine Arbeit geleistet wird. Dies lässt sich erklären, wenn man annimmt, dass, sowie W die potentielle Energie der Ladung bezeichnet, U' derjenige Theil der kinetischen Energie der Electricität ist, welcher sich durch Uebertragung auf die Körpermoleculé in Energie der Wärmebewegung umsetzt; bewegt sich also ein Electricitätstheilchen in einem Raume von constantem Potential, so bleibt seine kinetische Energie ungeändert, mithin wahrscheinlich auch der in Wärmeenergie umsetzbare Theil derselben, also auch das für eine bestimmte Temperaturerhöhung von aussen zuzuführende Quantum von Wärmeenergie, mag nun das Electricitätstheilchen sich innerhalb des homogenen Theiles des Leiters bewegen oder nach der Ansicht von Budde auf eine gasförmige Oberflächenschicht übergehen.

Strassburg, im März 1888.

V. Beiträge zur electromagnetischen Lichttheorie;
von Franz Koláček.

In zwei vor kurzem erschienenen Aufsätzen¹⁾ versuchte ich auf Grund der electromagnetischen Lichttheorie die Farbenzerstreuung unter Zuhülfenahme selbständiger electriccher Oscillationen in den ponderablen Moleculen zu erklären. Dieser Aufsatz behandelt in ähnlicher Weise die Doppelbrechung und das Reflexionsproblem.

Die Möglichkeit derartiger Eigenschwingungen setzt voraus, dass die Moleculmasse dielectricch polarisirbar sei; es lässt sich nachweisen, dass die daher stammenden dielectricchen Polarisationsströme gegen die Leitungsströme selbst bei sehr guten Leitern und mässiger Dielectricitätsconstante nicht verschwinden, wenn vorausgesetzt wird, dass die Eigenperiode der Schwingungen von der Ordnung der Lichtschwingungen oder noch kleiner sei. Sei beispielsweise K die Dielectricitätsconstante, k der Widerstand eines Würfels von der Kantenlänge eins auf Quecksilber als Einheit bezogen, ϵ der Widerstand desselben mit Quecksilber angefüllten Würfels, r die Periode einer electromotorischen Kraft $X = \sin(2\pi/r)t$; dann ist das Verhältniss zwischen der Amplitude des Polarisationsstromes und jener des Leitungsstromes gegeben durch $Kk\epsilon/2\tau$. Nun ist ϵ im electromagnetischen (cgs) Maasse gegeben durch $10^9/1,06$, im absoluten electrostatischen Maasse hingegen, in dem auch K ausgedrückt sein soll, durch $10^9:1,06 (3 \cdot 10^{10})^2$, sodass obiges Verhältniss in:

$$Kk:1,06 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^5$$

übergeht, wenn λ den Weg bedeutet, welchen das Licht im Vacuum während einer Schwingungsdauer zurücklegt. Bei gewöhnlichen Oscillationen von Condensatoren, deren 10000 bis 100 000 auf eine Secunde gehen, ist obiges Verhältniss bei mässigem K und k verschwindend; dagegen wird es selbst bei guten Leitern, etwa Quecksilber, dem $k=1$ entspricht, endliche Werthe bei Werthen des λ erreichen, die von der Ordnung 10^{-5} sind, also Lichtschwingungen entsprechen, und dies

1) Koláček, Wied. Ann. 32. p. 224 u. 429. 1887.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

schon bei mässig grossen Werthen der Diëlectricitätsconstante K . Die Theorie zeigt, dass bei electricischen Oscillationen an Stelle der kinetischen Energie die electrostatische tritt, während der potentiellen Energie elastischer Deformationen die electrokinetische Energie entspricht. Absorption ist der Hauptsache nach Umsatz in Joule'sche Wärme.

Die Möglichkeit von Eigenschwingungen ist ferner an gewisse, an der Grenzfläche der schwingenden Massen zu erfüllende Bedingungen gebunden. Dieselben ergeben sich in unserem Falle leicht unter der Voraussetzung, dass die Molecüle in einem Medium enthalten sind, das weder diëlectrisch polarisirbar ist, noch Leitungsströme gestattet. Es liefert dann das Maxwell'sche Stromcontinuitätsprincip die einzige Bedingung, dass die Normalcomponente der totalen electricischen Strömung an der Oberfläche zu verschwinden habe. In einzelnen Fällen, wo es sich etwa um kugelförmige Molecüle handelt, lassen sich diese Eigenperioden durch den Radius, die Diëlectricitätsconstante und den specifischen Widerstand ohne Mühe ausdrücken. Behufs Aufstellung allgemeiner optischer Theorien ist die Kenntniss der Moleculform und infolge dessen die Kenntniss des geometrischen Verlaufes der Strombahnen erlässlich; es genügt, zu wissen, dass die Strömungen periodisch sind. Wir können uns nämlich vorstellen, dass der Werth der electromotorischen Kraft an irgend einer Stelle bei vorausgesetzter Kenntniss der geometrischen Eigenschaften der den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Strombahnen durch n -Grössen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$, die etwa den Amplituden der Partialschwingungen entsprechen, eindeutig bestimmt sei; wir setzen mithin die Existenz von n allgemeinen Lagrange'schen Coordinaten voraus, von der Eigenschaft, dass irgend eine electromotorische Kraft oder Strömung an irgend einer Stelle durch dieselben und gewisse, blos von der Ordnung der Partialschwingungen abhängige Functionen des Ortes eindeutig darstellbar wird. Der geometrische Charakter dieser allgemeinen Raumfunctionen soll nun erhalten bleiben, wenn das die Molecüle umgebende Medium ein polarisirbarer Aether ist. Wir denken dabei an ähnliche Vorgänge in der Akustik, wo z. B. unter

der Voraussetzung, dass sich die Schwingungen einer Saite durch die Fourier'sche Reihe, jene elastischen Kugeln durch Kugelfunction darstellen lassen, exacte Lösungen sich auch dann gewinnen lassen, wenn die tönenden Körper in Flüssigkeiten sich befinden.¹⁾ Geht nun durch den Aether eine Lichtwelle, so treten zu den allgemeinen Kraftcomponenten, die von den Stromschwankungen in den ponderablen Moleculen herrühren, noch unabhängig inducirende Wirkungen des Aethers als Erreger der Schwingungen hinzu. Umgekehrt äussern die Stromschwankungen in den Moleculen inducirende Wirkungen auf den Aether, die mit einer von Farbe und Schwingungsrichtung abhängigen Aenderung des Trägheitswiderstandes des Aethers parallelisirt werden könnten, wenn es gestattet wäre, die betreffenden Gleichungen vom mechanischen Standpunkte zu erklären. In dieser Weise wird Dispersion und Doppelbrechung erklärbar. Die aufgestellten Differentialgleichungen selbst besitzen mit jenen des Hrn. Ketteler eine gewisse äussere Aehnlichkeit.

Gegenüber der mechanischen Lichthypothese, welche den periodischen, die Lichtenergie charakterisirenden Lichtvector unmittelbar mit den Aetherexcursionen identificirt, ist die hier vertretene Theorie insofern im Nachtheile, als sie über mehrere solcher periodischen Vektoren verfügt. Man hat es im allgemeinen zu thun mit electromotorischen Kräften, die theils von Stromschwankungen im Aether, theils von jenen in den Moleculen herrühren, ebenso mit dem Totalwerthe derselben und den entsprechenden diëlectrischen Verschiebungen. Diese Vektoren sind nebstbei von magnetischen Kräften und den entsprechenden magnetischen Polarisationen begleitet. Bei isotropen Körpern ist der Gang der Dispersion das Hauptproblem, und um dieses zu lösen, genügt es, irgend einen der Vektoren mit dem Lichtvector zu identificiren, da die Amplituden derselben zu einander Verhältnisse besitzen, welche an eine Richtung nicht gebunden sind. In den zwei ersten Aufsätzen über diesen Gegenstand wurde die von den Stromschwankungen im Aether allein herrührende

1) Koláček, Wien. Ber. 87. p. 1147. 1883.

Kraft (oder diëlectrische Verschiebung) als Lichtvector aufgefasst, weil dieselbe bezüglich der räumlichen und zeitlichen Aenderungen Differentialgleichungen genügt, denen mit endlicher Geschwindigkeit fortgepflanzte Wellen als Integrale entsprechen; der von den Molecülen herrührende Antheil genügt hingegen der Laplace'schen Gleichung. Dies ist jedoch eine überflüssige Einschränkung, da sich die Totalwerthe der Kraft mit derselben Geschwindigkeit und in denselben Wellenebenen fortpflanzen, wie die Partialwerthe allein, trotzdem ein Summand den Differentialgleichungen nicht genügt. Es liegt in der Form der Gleichungen, dass zu dem ersten Partialwerthe, der sich fortgepflanzt hat, der zweite Theil, durch keine Fortpflanzung vermittelt, instantan hinzutritt. Lässt man nun den Lichtvector mit dem Totalwerthe der diëlectrischen Verschiebung zusammenfallen, so ergeben sich für durchsichtige Krystalle in aller Strenge Fresnel's Gleichungen, jedoch mit dem Unterschiede, dass die Lage der optischen Axen von der Farbe abhängig wird. Die Discussion der für absorbirende Medien aufgestellten Gleichungen, die mit Rücksicht auf die verdienstvollen Arbeiten von Ketteler, Voigt, Lommel unterlassen wurde, ergibt Dichroismus und Polychroismus. Dieselbe Annahme über den Lichtvector ergibt im Problem der Reflexion die Fresnel'schen Gleichungen und dessen Definition der Polarisations-ebene. Gleich consequent wäre jedoch die Annahme, dass der Lichtvector mit den magnetischen Verschiebungen zu identificiren sei. Dies deutet darauf hin, dass die Frage nach der Lage der Schwingungsrichtung zur Polarisations-ebene in der electromagnetischen Lichttheorie keinen Sinn besitzt; diëlectrische Ströme und magnetische Kräfte sind eben gleichzeitig vorhanden. Deshalb wird man nach Belieben das Verhalten des einen oder des anderen Vectors bei Reflexion und Brechung getrennt untersuchen können, da der Zusammenhang ihrer Amplituden ein äusserst einfacher ist. Die exacte Durchführung der Doppelbrechungstheorie ergibt vom Standpunkte der Elasticitätshypothese Gesetze, die mit Fresnel übereinstimmen nur dann, wenn die Schwingungsrichtung in die Polarisations-ebene hineinfällt. Das Re-

flexionsproblem selbst ist wieder nur dann einer Lösung zugänglich, wenn man an der Grenzfläche beider Aethermedien von den ponderablen Moleculen herrührende Kräfte annimmt, die bei dem Vorgange der Reflexion und Brechung keine Wellenarbeit leisten. Dies ist das berühmte Kirchhoff'sche Princip, das zu derselben Definition der Polarisations-ebene führt, und dies auch in der dankenswerthen Verallgemeinerung von Voigt. Die analytisch elegante Lösung dieser Probleme legt es nahe, nicht die dielectricische Verschiebung, sondern die magnetische Kraft und ihr Verhalten bei Reflexion und Brechung zu untersuchen unter Zugrundelegung von bereits aufgestellten Grenzbedingungen, welche vom Standpunkte der Electrodynamik unanfechtbar sind. Dies führt dann unmittelbar zu den Hauptgleichungen von Kirchhoff, Voigt und Drude, und insofern ist die nähere Ausführung des Problems für Metallreflexion etc. mit Rücksicht auf die Arbeiten von Voigt und Drude¹⁾ unterblieben. Es steht uns jedoch vollkommen frei, aus den Formeln die Fresnel'sche Definition der Polarisations-ebene herauszulesen, wenn wir die dielectricische Verschiebung mit den sogenannten Lichtschwingungen zusammenfallen lassen, weil die dielectricische Verschiebung auf der magnetischen Kraft und Wellennormale immer senkrecht steht.

I. Um den Zusammenhang nicht zu stören, schicken wir folgenden leicht beweisbaren algebraischen Satz voraus. Es seien $\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n$ n lineare Functionen von $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$, ferner sei Ω eine quadratische Function derselben Grössen, und $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n$ n lineare Functionen von der Eigenschaft, dass $\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 \dots \varphi_n \psi_n$ identisch Null ist. Dann ist $\Phi_m, m = 1 \dots n$, immer in der Form $\Phi_m = d\Omega/d\varphi_m + \psi_m$ darstellbar.

Von diesem Satze machen wir folgenden Gebrauch. Die auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogenen Componenten der Leitungsströme $\bar{u} \bar{v} \bar{w}$ lassen sich als lineare Functionen der electromotorischen Kräfte XYZ in der Form darstellen:

1) Drude, Wied. Ann. 32. p. 584. 1887.

$$u = \frac{d\bar{\Omega}}{dX} + \rho Y - \tau Z, \quad v = \frac{d\bar{\Omega}}{dY} - \rho X + \sigma Z,$$

$$\bar{w} = \frac{d\bar{\Omega}}{dZ} + \tau X - \sigma Y.$$

$\bar{\Omega}$ ist eine quadratische Function von XYZ , $\rho \sigma \tau$ sind Constante, deren Vorhandensein Effecte von der Natur des Hall'schen Phaenomens bedingt.

Es sei ferner Ω dieselbe quadratische Function von $\dot{X} = dX/dt$, \dot{Y} , \dot{Z} , sodass:

$$(1_a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\Omega}{d\dot{X}} + \rho \dot{Y} - \tau \dot{Z}, \quad \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\Omega}{d\dot{Y}} + \sigma \dot{Z} - \rho \dot{X}, \\ \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{d\Omega}{d\dot{Z}} + \tau \dot{X} - \sigma \dot{Y}. \end{array} \right.$$

Die Componenten der dielectricischen Polarisation sind gleichfalls lineare Functionen der Kräfte XYZ , doch dürfen die disymmetrischen Coëfficienten wie $\rho \sigma \tau$ nicht vorkommen; widrigenfalls würde ein solcher Körper von Kugelform im homogenen electrostatischen Felde continuirliche Rotationen ausführen. Stellt man sich nämlich vor, dass durch den Act der Polarisation in einem Volumelemente Electricitäten entgegengesetzter Art an die Grenzflächen desselben getrieben werden, so lassen sich jene Schlüsse wiederholen, die auf dem Gebiete der magnetischen Induction zu ähnlichem Resultate¹⁾ führen. Es sei P eine quadratische Function der $\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$, dann gilt, wenn mit $u'v'w'$ die Verschiebungsströme bezeichnet werden, $\partial u'/\partial t = \partial/\partial t \cdot dP/d\dot{X}$ etc.

Ist deshalb uvw der Totalstrom, so folgt durch Addition $u = u' + u$:

$$(1) \quad \frac{du}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{dP}{d\dot{X}} + \frac{d\Omega}{d\dot{X}} + \rho \dot{Y} - \tau \dot{Z} \text{ etc.}$$

Nun hängen nach Maxwell die Werthe uvw mit XYZ vermöge der Relationen zusammen²⁾:

1) Maxwell, Electricity and Magn. 2. p. 60.

2) Das zu Grunde liegende Maasssystem ist das electromagnetische, magnetische Induction ist unberücksichtigt geblieben mit Rücksicht auf die Untersuchungen des Hrn. Hertz über schnell verlaufende electricische Oscillationen.

$$4\pi \frac{du}{dt} = \Delta X - \frac{dS}{dx}, \quad S = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}, \quad A = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \text{ etc.}$$

Mit Hülfe dieser und der Gleichungen (1) ergeben sich, wenn der Factor 4π in den Coëfficienten von Ω und P eingegriffen wird, die folgenden Hauptgleichungen:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{X}} \right) + \frac{d\Omega}{d\dot{X}} + \rho \dot{Y} - \tau \dot{Z} = \Delta X - \frac{dS}{dx}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{Y}} \right) + \frac{d\Omega}{d\dot{Y}} + \sigma \dot{Z} - \rho \dot{X} = \Delta Y - \frac{dS}{dy}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{Z}} \right) + \frac{d\Omega}{d\dot{Z}} + \tau \dot{X} - \sigma \dot{Y} = \Delta Z - \frac{dS}{dz}. \end{cases}$$

Diese allgemein gültigen Gleichungen benutzen wir, um die electricischen Bewegungen in einem sich selbst überlassenen, in einem polarisationsfreien Aether befindlichen Molecül-complex zu eruiiren. An der Oberfläche der Molecüle hat die Normalcomponente Null zu sein. Dies soll zu der Lösung der Aufgabe führen, und der allgemeine Charakter der Lösung soll der sein, dass sich die Grössen XYZ unter Zuhülfenahme gewisser als bekannt vorausgesetzter Functionen des Ortes in eindeutiger Weise als Functionen von n allgemeinen Coordinaten $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_n$, deren jeder nur von t abhängt, darstellen lassen sollen. Damit ergibt sich:

$$(3) \quad \begin{cases} \delta X = \sum \frac{dX}{d\varphi_n} \delta \varphi_n, & \dot{X} = \sum \frac{dX}{d\varphi_n} \dot{\varphi}_n, \\ \delta Y = \sum \frac{dY}{d\varphi_n} \delta \varphi_n, & \dot{Y}_n = \sum \frac{dY}{d\varphi_n} \dot{\varphi}_n, \\ \delta Z = \sum \frac{dZ}{d\varphi_n} \delta \varphi_n, & \dot{Z}_n = \sum \frac{dZ}{d\varphi_n} \dot{\varphi}_n, \end{cases}$$

und aus dem zweiten Tripel (3):

$$(4) \quad \frac{\partial \dot{X}}{\partial \dot{\varphi}_n} = \frac{dX}{d\varphi_n}, \quad \frac{\partial \dot{Y}}{\partial \dot{\varphi}_n} = \frac{dY}{d\varphi_n}, \quad \frac{\partial \dot{Z}}{\partial \dot{\varphi}_n} = \frac{dZ}{d\varphi_n}.$$

Wir multipliciren nun die Gleichungen in (2) der Folge nach mit δX , δY , δZ und addiren. Wir bekommen in dieser Operation zuerst einen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{X}} \right) \delta X + \frac{d}{dt} \left(\frac{dP}{d\dot{Y}} \right) \delta Y + \frac{d}{dt} \left(\frac{dP}{d\dot{Z}} \right) \delta Z \\
 &= \frac{d}{dt} \left[\delta X \frac{dP}{d\dot{X}} + \delta Y \frac{dP}{d\dot{Y}} + \delta Z \frac{dP}{d\dot{Z}} \right] \\
 &\quad - \left[\delta \dot{X} \frac{dP}{d\dot{X}} + \delta \dot{Y} \frac{dP}{d\dot{Y}} + \delta \dot{Z} \frac{dP}{d\dot{Z}} \right].
 \end{aligned}$$

Der erste Klammerausdruck rechts ist aber wegen (3) bis auf das Symbol $\partial/\partial t$ gegeben durch:

$$\sum \delta q_n \left[\frac{dP}{d\dot{X}} \frac{dX}{dq_n} + \frac{dP}{d\dot{Y}} \frac{dY}{dq_n} + \frac{dP}{d\dot{Z}} \frac{dZ}{dq_n} \right]$$

oder wegen (4) durch:

$$\sum \delta q_n \left[\frac{dP}{d\dot{X}} \frac{d\dot{X}}{dq_n} + \frac{dP}{d\dot{Y}} \frac{d\dot{Y}}{dq_n} + \frac{dP}{d\dot{Z}} \frac{d\dot{Z}}{dq_n} \right] = \sum \delta q_n \frac{dP}{d\dot{q}_n}.$$

Der zweite Klammerausdruck rechts ist δP , weil die quadratische Function $P(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ constante Coëfficienten besitzt, oder in allgemeinen Coordinaten:

$$\delta \dot{q}_n \frac{dP}{d\dot{q}_n} + \frac{dP}{dq_n} \delta q_n.$$

Der Ausdruck J geht deshalb über in:

$$\sum \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial P}{d\dot{q}_n} - \frac{dP}{dq_n} \right] \delta q_n.$$

Ähnlich ist:

$$\frac{d\Omega}{d\dot{X}} \delta X + \frac{d\Omega}{d\dot{Y}} \delta Y + \frac{d\Omega}{d\dot{Z}} \delta Z = \sum \delta q_n \frac{d\Omega}{d\dot{q}_n}.$$

Die Ausdrücke $(\rho \dot{Y} - \tau \dot{Z}) \delta X + (\sigma \dot{Z} - \rho \dot{X}) \delta Y + (\tau \dot{X} - \sigma \dot{Y}) \delta Z$ gehen durch Substitution für $\delta X, \dot{X}$ etc. über in:

$$\sum [\rho R_n + \sigma S_n + \tau T_n] \delta q_n,$$

wobei die nach $\dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n$ linearen Ausdrücke R_n, S_n, T_n den Bedingungen genügen:

$$R_1 \dot{q}_1 + R_2 \dot{q}_2 + \dots + R_n \dot{q}_n \equiv 0,$$

$$S_1 \dot{q}_1 + S_2 \dot{q}_2 + \dots + S_n \dot{q}_n \equiv 0,$$

$$T_1 \dot{q}_1 + T_2 \dot{q}_2 + \dots + T_n \dot{q}_n \equiv 0.$$

Das Zeichen $\equiv 0$ bedeutet identisches Nullwerden.

Die Ausführung der oben angedeuteten Operation ergibt auf der linken Seite des Gleichheitszeichens:

$$(5) \quad \sum \delta \varphi_n \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{\varphi}_n} \right) - \frac{dP}{d\varphi_n} + \frac{d\Omega}{d\dot{\varphi}_n} + \rho R_n + \sigma S_n + \tau T_n \right].$$

Rechts dagegen steht:

$$(6) \quad \left(\Delta X - \frac{dS}{dx} \right) \delta X + \left(\Delta Y - \frac{dS}{dy} \right) \delta Y + \left(\Delta Z - \frac{dS}{dz} \right) \delta Z.$$

Die Formen (5) und (6) multiplicire man mit dem Volumendifferential des Molecüls $d\tau$, und integriere über einen bestimmten Molecülcomplex, etwa jenen, der sich in einer gegen eine Wellenlänge sehr kleinen Volumseinheit des optischen Mediums befinde. Die Grössen φ_n hängen nur von t ab; man kann demnach, wenn $H = \int \Omega d\tau$, $T = \int P d\tau$ zwei quadratische Functionen der $\dot{\varphi}_n$ mit von φ_n , $n = 1, 2 \dots$, abhängigen Coëfficienten bezeichnen, schreiben:

$$(V) \quad \sum \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}_n} \right) - \frac{dT}{d\varphi_n} + \frac{dH}{d\dot{\varphi}_n} + \rho R'_n + \sigma S'_n + \tau T'_n \right] \delta \varphi_n;$$

dabei ist $R'_n = \int R_n d\tau$ etc. gesetzt. Dieselbe Integration auf (6) angewendet, ergibt, wie sogleich nachgewiesen werden wird, $\sum \delta \varphi_n \cdot \Phi_n$, wobei $\Phi_n = dF(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)/d\varphi_n$ ist. Setzt man dieses Resultat dem in (V) gleich, so ergibt die lineare Unabhängigkeit der Variationen $\delta \varphi_1 \dots \delta \varphi_n$ die Gleichungenreihe:

$$(VII) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}_n} \right) - \frac{dT}{d\varphi_n} + \frac{dH}{d\dot{\varphi}_n} + \rho R'_n + \sigma S'_n + \tau T'_n = \Phi_n; \quad n = 1, 2 \dots$$

Um den Ausspruch $\Phi_m = (dF/\partial \varphi_m)(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n)$, $m = 1, 2 \dots n$ rechtz fertigen, setze man in:

$$\sum \delta \varphi_n \Phi_n = \int d\tau \left[\left(\Delta X - \frac{dS}{dx} \right) \delta X + \left(\Delta Y - \frac{dS}{dy} \right) \delta Y + \left(\Delta Z - \frac{dS}{dz} \right) \delta Z \right]$$

vermöge einer Relation von Maxwell (in der $\alpha \beta \gamma$ die magnetischen Kraftcomponenten bedeuten, welche ihren Ursprung in den Strömen des Molecüls besitzen), und welche:

$$\dot{\alpha} = \frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \text{ lautet, statt: } \Delta X - \frac{dS}{dx} \dots \frac{d\dot{\gamma}}{dy} - \frac{d\dot{\beta}}{dz},$$

und bedenke, dass die Integration auch auf den intramolecularen Aether ausgedehnt werden kann, da in diesem die

magnetischen Kräfte den Bedingungen $(d\gamma/\partial y) - (d\beta/dz) = 0$ etc. genügen. Dehnt man die Integration bis zu einer unendlich fernen Kugel aus, in welcher alle Kräfte Null sind, so ergibt sich:

$$\sum \delta \varphi_n \Phi_n = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\left(\frac{d\dot{\gamma}}{\partial y} - \frac{d\dot{\beta}}{dz} \right) \delta X + \left(\frac{d\dot{\alpha}}{dz} - \frac{d\dot{\gamma}}{\partial x} \right) \delta Y + \left(\frac{d\dot{\beta}}{dz} - \frac{d\dot{\alpha}}{\partial y} \right) \delta Z \right].$$

Die Integration per partes ausgeführt, ergibt zuvörderst das Volumintegral:

$$(VIII) \left\{ \begin{aligned} & - \int d\tau \left[\dot{\alpha} \delta \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{\partial y} \right) + \dots \right] = - \int d\tau [\dot{\alpha} \delta \dot{\alpha} + \dots] \\ & = - \delta \frac{1}{2} \int d\tau \left[\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{\partial x} - \frac{dX}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dX}{\partial y} - \frac{dY}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \right.$$

und dies reducirt sich nach Einführung der Werthe für X etc. offenbar auf:

$$+ \delta F(\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n).$$

Das Flächenintegral auf der unendlich fernen Kugel ist Null, jenes an den Molecüloberflächen ist eine Summe von Differenzen, in denen Minuend und Subtrahend die Form besitzen:

$$\begin{aligned} & \int [\delta X (\dot{\gamma} \cos ny - \dot{\beta} \cos nz) + \delta Y (\dot{\alpha} \cos nz - \dot{\gamma} \cos nx) \\ & + \delta Z (\dot{\beta} \cos nx + \dot{\alpha} \cos ny)]; \end{aligned}$$

$\cos nx, \cos ny, \cos nz$ sind in Minuend und Subtrahend Richtungscosinuse derselben Oberflächennormale, nur gehören im Minuend die Grössen $\dot{\alpha} \dot{\beta} \dot{\gamma} \delta X \dots$ Oberflächenpunkten im Molecül, während sie im Subtrahend solchen im Aether entsprechen.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Richtungscosinuse einer Strecke der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} \cos ny - \dot{\beta} \cos nz &= \dot{\theta} \lambda_1, \\ \dot{\alpha} \cos nz - \dot{\gamma} \cos nx &= \dot{\theta} \lambda_2, \\ \dot{\beta} \cos nx - \dot{\alpha} \cos ny &= \dot{\theta} \lambda_3. \end{aligned}$$

Die Strecke fällt offenbar in die Molecüloberfläche. Quadriert man und addirt diese drei Gleichungen, so ist bis auf das Differentiationssymbol $\partial/\partial t$ $\dot{\theta}$ ersichtlich dem in die Molecüloberfläche fallenden Antheil der magnetischen Kraft

gleich. Unsere Differenz ist also ein Unterschied zweier Glieder:

$$\int \dot{\theta} (\delta X \cdot \lambda_1 + \delta Y \cdot \lambda_2 + \delta Z \cdot \lambda_3).$$

Nun lässt sich nachweisen¹⁾, dass bei eventuellen Discontinuitäten an einer Fläche die ihr parallele magnetische Kraftcomponente (hier $\dot{\theta}$), ebenso wie die gleichgemeinte electrische Kraftcomponente $X\lambda_1 + Y\lambda_2 + Z\lambda_3$, somit auch die virtuelle Aenderung $\delta X \cdot \lambda_1 + \delta Y \cdot \lambda_2 + \delta Z \cdot \lambda_3$ continuirlich beim Durchtritte durch die Fläche bleiben muss. Aus diesem Grunde verschwinden die Oberflächenintegrale, und ist der Satz $\sum \delta \varphi_n \cdot \Phi_n = \delta F(\varphi_1 \dots \varphi_n)$ gerechtfertigt.

Wir werden von nun an die Coëfficienten $\rho \sigma \tau$ in (VII) ausser Acht lassen. Ein genaueres Eingehen auf den Einfluss derselben würde zu Circularpolarisation, resp. elliptischer Doppelbrechung in durchsichtigen²⁾ Medien führen, eventuell zur magnetischen Drehung der Polarisationssebene, wenn das Vorhandensein von $\rho \sigma \tau$ an die Existenz eines Magnetfeldes gebunden ist. Es sollen hier nur symmetrische Medien in Betracht gezogen werden.

Sollen die sich selbst überlassenen Molecüle selbständige Eigenschwingungen ausführen, deren Periode von der Amplitude nicht abhängt, so muss $dT/d\varphi_n$, in welchem Quadrate des φ_n vorkommen, verschwinden, d. h. die Coëfficienten von T dürfen von $\varphi_1 \dots \varphi_n$ nicht abhängen. Dies wird erreicht, wenn sich die Kräfte XYZ darstellen lassen wie:

$$X = \sum \varphi_n f_n,$$

$$Y = \sum \varphi_n g_n,$$

$$Z = \sum \varphi_n h_n,$$

wobei die Grössen $f_n g_n h_n$ nur von xyz abhängen. Mit dieser Annahme wird auch F eine quadratische Function von $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$. Diese den geometrischen Charakter der Partialschwingungen charakterisirenden Grössen haben nach Einführung der Werthe XYZ in (2) den Bedingungen zu genügen:

1) Kolářek, Wied. Ann. 32. p. 430. 1887.

2) In absorbirenden Medien besteht, selbst wenn sie symmetrisch sind, keine andere als elliptische Doppelbrechung.

$$(IX) \quad \begin{cases} v_n^2 \frac{dP}{df_n} + v_n \frac{d\Omega}{df_n} = \Delta f_n - \frac{d\sigma_n}{dx}, \\ v_n^2 \frac{dP}{dg_n} + v_n \frac{d\Omega}{dg_n} = \Delta g_n - \frac{d\sigma_n}{dy}, \\ v_n^2 \frac{dP}{dh_n} + v_n \frac{d\Omega}{dh_n} = \Delta h_n - \frac{d\sigma_n}{dz}, \end{cases} \quad \sigma_n = \frac{df_n}{dx} + \frac{dg_n}{dy} + \frac{dh_n}{dz}.$$

Es leuchtet dies ein, wenn man in (2) die particuläre Lösung:

$X = \varphi_n f_n, \quad Y = \varphi_n g_n, \quad Z = \varphi_n h_n, \quad \varphi_n = e^{n\tau}$ einführt, und unter $P\Omega$ jene Functionen versteht, die entstehen, wenn in diese Functionen, die vordem mit den Argumenten $X Y Z$ versehen waren, statt dieser Argumente $f_n g_n h_n$ eingeführt werden.

Es sollen noch Betrachtungen über die Coëfficienten von $\varphi_n^2, \varphi_m^2, \varphi_n \varphi_m$ im Ausdrücke F angestellt werden. Setzt man in:

$$F = -\frac{1}{2} \int d\tau \left[\left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx} \right)^2 \right]$$

statt XYZ ihre Werthe $\Sigma f_n \varphi_n, \Sigma \varphi_n g_n, \Sigma \varphi_n h_n$ ein, so ist nach Ausführung der Integration der halbe Coëfficient von $\varphi_m \varphi_n$ in $+2F$ gegeben durch:

$$M_{nm} = - \int d\tau \left[f_m \left(\Delta f_n - \frac{d\sigma_n}{dx} \right) + g_m \left(\Delta g_n - \frac{d\sigma_n}{dy} \right) + h_m \left(\Delta h_n - \frac{d\sigma_n}{dz} \right) \right].$$

Die Integration bezieht sich laut (VIII) auf das ganze allerseits ins Unendliche ausgedehnte Medium. Mit Rücksicht auf (IX) folgt:

$$M_{nm} = - \int d\tau \left[\left(f_m \frac{dP}{df_n} + g_m \frac{dP}{dg_n} + h_m \frac{dP}{dh_n} \right) v_n^2 + v_n \left(f_m \frac{d\Omega}{df_n} + g_m \frac{d\Omega}{dg_n} + h_m \frac{d\Omega}{dh_n} \right) \right].$$

Man hätte aber auch schreiben können, wenn n und m vertauscht würden:

$$M_{nm} = - \int d\tau \left[\left(f_n \frac{dP}{df_m} + g_n \frac{dP}{dg_m} + h_n \frac{dP}{dh_m} \right) v_m^2 + v_m \left(f_n \frac{d\Omega}{df_m} + g_n \frac{d\Omega}{dg_m} + h_n \frac{d\Omega}{dh_m} \right) \right].$$

Dies gibt, wenn $A_{nm} B_{nm}$ Integrationsresultate bezeichnen:

$$(X) \quad M_{nm} = -(A_{nm} \nu_n^2 + \nu_n B_{nm}), \quad M_{nn} = -(A_{nn} \nu_n^2 + \nu_n B_{nn});$$

denn es ist:

$$f_n \frac{dP}{df_n} + \dots = f_m \frac{dP}{df_n} + \dots \quad \text{und} \quad f_n \frac{d\Omega}{df_m} + \dots = f_m \frac{d\Omega}{df_n} + \dots$$

Setzt man $n = m$, so ist:

$$M_{mm} = -(\nu_m^2 A_{mm} + \nu_m B_{mm}),$$

$$A_{mm} = \int d\tau \, 2 \cdot P(f_m, g_m, h_m), \quad B_{mm} = 2 \int d\tau \, \Omega(f_m, g_m, h_m),$$

also ist der Coefficient von φ_m^2 in $2F$ leicht auszudrücken.

Aus Gl. (X) folgt, wenn entweder das Medium durchsichtig ist, somit Ω und mit ihm B_{nm} entfällt, oder wenn die Functionen P und Ω proportionale Coefficienten besitzen, sodass A_{nm} und B_{nm} nur um einen constanten von ν_n und ν_m unabhängigen Factor sich unterscheiden, $M_{nm} = 0$, da ν_n und ν_m nicht gleich sein sollen. Der letztere auf absorbirende Medien bezügliche Fall tritt ein, wenn das Moleculmaterial isotrop ist, oder wenn bei Anisotropie desselben die Hauptaxen der dielectricischen Polarisirung und Leitungsfähigkeit zusammenfallen. In diesem Falle ist F eine rein quadratische Function von $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$. M_{nm} verschwindet aber auch, wenn diese beschränkenden Annahmen über die Constitution der Moleculmaterie nicht gemacht werden.

Die Functionen T und H enthalten nämlich zweimal $n(n-1)$ doppelte Producte $\varphi \varphi_m$. Setzt man an Stelle der n Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ andere n Grössen $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n$, die mit ihnen linear durch n^2 Coefficienten verbunden sind, so reichen von ihnen $n(n-1)$ aus, um die doppelten Producte in T und H zum Verschwinden zu bringen. Man kann sich also ein φ -System denken, in welchem die Grösse T rein quadratisch ist. Zu Anfang des Abschnittes II wird gezeigt, dass dann die Gl. (11) oder:

$$\int d\tau \left(f_n \frac{dP}{df_n} + g_n \frac{dP}{dg_n} + h_n \frac{dP}{dh_n} \right) = 0$$

bestehen muss. Dies hat zur Folge:

$$M_{nm} = -\nu_n B_{nm} = -\nu_m B_{mn} \quad \text{oder} \quad B_{nm}(\nu_n - \nu_m) = 0.$$

Und dies führt zu $B_{nm} = 0$, somit auch zu $M_{nm} = 0$, solange v_n und v_m verschieden sind.

Wir setzen also:

$$\begin{aligned} 2T &= a_1 \dot{q}_1^2 + a_2 \dot{q}_2^2 + \dots \\ 2\Omega &= b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2 + \dots \\ + 2F &= c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + \dots, \end{aligned}$$

wobei die $+a, b$ und die $(-c)$ ihrer Bedeutung nach immer positiv sind. Dadurch reduciren sich die Gleichungen (10) auf:

$$(8) \quad a_n \ddot{q}_n + b_n \dot{q}_n = c_n q_n \quad n = 1, 2, \dots, n, \dots$$

Die Grössen f, g, h , welche die geometrische Seite der Partialschwingungen zum Ausdruck bringen, sind durch die Differentialgleichungen (IX) definirt. Hat man f_m, g_m, h_m diesen Gleichungen entsprechend bestimmt und setzt dieselben in die an der Oberfläche zu erfüllende Continuitätsbedingung ein, so ergibt sich die Gleichung zur Bestimmung von v_n selbst. Wir können uns also immer vorstellen, dass die Functionen f_m, g_m, h_m , als auch v_m bekannt seien, wiewohl es nur in den allereinfachsten Fällen (etwa bei kugelförmigen Moleculen) gelingen wird, die angedeutete Richtung thatsächlich auszuführen.

II. Es sollen nun aus der Thatsache, dass sich die Grösse:

$$T = \int d\tau P = \int d\tau [A_{11} \dot{X}^2 + A_{22} \dot{Y}^2 + 2A_{12} \dot{X} \dot{Y} + \dots]$$

auf eine rein quadratische Function der $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots$ reduciren lässt; Schlüsse gezogen werden.¹⁾ Setzt man hierin:

$$\dot{X} = \sum \dot{q}_n f_n \quad \dot{Y} = \sum \dot{q}_n g_n \quad Z = \sum \dot{q}_n h_n$$

ein, so folgt:

$$T = \sum \dot{q}_n^2 a_n; \quad a_n = \int d\tau [A_{11} f_n^2 + A_{22} g_n^2 + 2A_{12} f_n g_n + \dots].$$

Das Verschwinden der doppelten Producte $\dot{q}_n \dot{q}_m$ in T fordert für $m \leq n$:

$$(11) \quad 0 = \int d\tau [A_{11} f_n f_m + A_{22} g_n g_m + A_{12} (f_n g_m + f_m g_n) + \dots].$$

Mit Hülfe von (11) ergibt sich folgender Satz:

1) Bezüglich ähnlicher Schlüsse sehe man Rayleigh, Schall I, Uebersetzung von Neesen.

Lassen sich drei beliebige Functionen von xyz , die $\xi \eta \zeta$ heissen sollen, durch Reihen der Form:

$$(12) \quad \xi = \sum_{m=1}^{m=\infty} f_m \psi_m \quad \eta = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_m \psi_m \quad \zeta = \sum_{m=1}^{m=\infty} h_m \psi_m \dots$$

darstellen, so sind die von xyz unabhängigen Coëfficienten ψ_m in folgender Weise eindeutig bestimmbar. Man bilde den Ausdruck:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int d\tau [\xi A_{11} f_m + \eta A_{22} g_m + \zeta A_{33} h_m + (\xi g_m + \eta f_m) A_{12} \dots] \\ & = \int d\tau \left[f_m A_{11} \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n \psi_n + g_m A_{22} \sum_{n=1}^{n=\infty} g_n \psi_n + \dots \right] \end{aligned} \right.$$

Dann reducirt sich die rechte Seite desselben vermöge (11) auf:

$$\begin{aligned} & \psi_m \int d\tau [A_{11} f_m^2 + A_{22} g_m^2 + 2 A_{12} f_m g_m \dots] \\ & = \psi_m \int d\tau P(f_m, g_m, h_m), \end{aligned}$$

und weil die doppelte linke Seite mit:

$$\int d\tau \left[\xi \frac{dP}{df_m} + \eta \frac{dP}{dg_m} + \zeta \frac{dP}{dh_m} \right]$$

identisch ist, so folgt zur Bestimmung von ψ_m die Gleichung:

$$(14a) \quad 2 \psi_m \int d\tau P(f_m, g_m, h_m) = \int d\tau \left[\xi \frac{dP}{df_m} + \eta \frac{dP}{dg_m} + \zeta \frac{dP}{dh_m} \right].$$

Die Coëfficienten $A_{11} A_{12}$ sind durch die Lage der Coordinatenaxen gegen die Hauptaxen der electrostatischen Induction und den Werth der Hauptdiëlectricitätsconstanten leicht auszudrücken.

Dass die Gleichungen (12) bestehen, dass mithin beliebige Functionen der xyz in Reihen dieser Art sich verwandeln lassen, und dass diese Reihen für $n = \infty$ convergiren, ist noch zu beweisen. Die Sache verhält sich ganz ähnlich, wie mit den Entwicklungen in Fourier'sche Reihen. Wird die Möglichkeit vorausgesetzt, dass beliebige Functionen durch Fourier'sche Reihen darstellbar sind, so ist es gegenwärtig leicht, die Coëfficienten zu finden, und dies ist Fourier's Verdienst. Dass aber diese Entwicklung möglich sei, dass also die Fourier'sche Reihe thatsächlich jene Function ergibt, die bei Bildung der Coëfficienten benutzt wurde, hat

hier, wie auch bei den Kugelfunctionen, erst Dirichlet bewiesen. Um im vorliegenden Falle den Beweis zu führen, dass die Reihen $\sum \psi_m f_m$, $\sum \psi_m g_m$, $\sum \psi_m h_m$ thatsächlich gleich sind jenen Functionen, die bei Bildung der ψ_m benutzt wurden, müssen diese Reihen wirklich in anderer, directer Weise summirt werden, und dies ist eine Aufgabe, die ohne Zweifel noch schwieriger sein dürfte, als das von Dirichlet gelöste Problem. Vielleicht würde bei einem eventuellen Versuche dieses Beweises folgende Bemerkung von Nutzen sein. Ist der Werth der Reihen $\sum f_m \psi_m$ etc., respective $\xi_0 \eta_0 \psi_0$, die bei Bildung von ψ benutzte Function aber ξ, η, ξ , so ergibt sich sehr leicht die Relation:

$$\int d\tau \left[\frac{dP}{df_m} (\xi - \xi_0) + \frac{dP}{dg_m} (\eta - \eta_0) + \frac{dP}{dh_m} (\xi - \xi_0) \right] = 0, \\ m = 1 \dots n.$$

Gelingt der Nachweis, dass letztere Gleichung nur Null ist für $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\xi = \xi_0$, so ist die Möglichkeit der Entwicklung jeder Function $\xi \eta \xi$ nachgewiesen.

Die Voraussetzung dieser Möglichkeit ist eine Hauptbedingung für die Richtigkeit aller im Nachfolgenden gezogenen Schlüsse. Doch ist diese Voraussetzung durchaus nicht absolut willkürlich. Man erinnere sich, dass die electrischen Bewegungen in den Molecülen erst dann eindeutig bestimmt sind, wenn sie beliebigen Anfangsbedingungen ($t=0$) bezüglich der Werthe XYZ , sowie jener $\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}$ Rechnung tragen. Hält man sich an die viel plausiblere Voraussetzung, dass durch die Annahmen $X = \sum q_n f_n$ etc. alle möglichen particulären Lösungen erschöpft sind, so ergibt diese Annahme im Verein mit der Ueberzeugung, dass die Anfangszustände beliebig wählbar sind, den Satz, dass beliebige Functionen von XYZ durch die Reihen $\sum q_n(t=0) f_n$ darstellbar sein müssen. Aehnliche Schlüsse plausibler Natur sind es ja, auf Grund deren wir Bewegungen eines transversal schwingenden Stabes, solche von Klangplatten etc. durch die Anfangszustände ausdrücken, und in ähnlichem Sinne mögen die vorstehenden Erörterungen aufgefasst werden. Es sei noch ausdrücklich hervorgehoben, dass, wenn $\xi = \sum q_n f_n$ etc. besteht, keineswegs Gleichungen bestehen müssen, die durch

Anwendung desselben Operationssymbols auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gewonnen werden. Kann doch die Reihenentwicklung divergent werden; die Theorie der Fourier'schen Reihen bietet hierfür zahlreiche Belege.

III. In dem allgemeinsten Falle, wo Aether und Molecüle sich gegenseitig beeinflussen, hat man es mit einem Gleichungencomplexe zu thun, welcher für Molecüle und Aether nach dem Muster der Gleichungen (2) gebildet werden kann. Sind $X Y Z$ die Componenten der gesammten electromotorischen Kraft, so sind dieselben als Functionen von $xyz t$ so zu bestimmen, dass sie für die Molecüle, resp. den Aether folgenden sechs Gleichungen genügen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{X}} \right) + \frac{d\Omega}{dX} = \Delta X - \frac{dS}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{Y}} \right) + \frac{d\Omega}{dY} = \Delta Y - \frac{dS}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dP}{d\dot{Z}} \right) + \frac{d\Omega}{dZ} = \Delta Z - \frac{dS}{\partial z}, \end{array} \right\} \text{(Molecüle).}$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Pi}{d\dot{X}} \right) = \Delta X - \frac{dS}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Pi}{d\dot{Y}} \right) = \Delta Y - \frac{dS}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\Pi}{d\dot{Z}} \right) = \Delta Z - \frac{dS}{\partial z}. \end{array} \right\} \text{(Aether).}$$

Π ist eine quadratische Function von $\dot{X} \dot{Y} \dot{Z}$ und reducirt sich für den Fall als das Coordinatensystem in die Dielectricitätshauptaxen des Aethers gelegt wird auf $2\Pi = K_1 \dot{X}^2 + K_2 \dot{Y}^2 + K_3 \dot{Z}^2$.

Der thatsächliche Verlauf von $X Y Z$ im Aether ist selbstredend namentlich in der Nähe der Molecüle stark variabel, wir setzen deshalb an Stelle der wirklichen Vorgänge im Aether Mittelwerthe derselben, welche nach einem nicht näher zu erörternden Verfahren gewonnen werden, wenn man ein Volumenelement in Betracht zieht, das, obwohl gegen eine Wellenlänge sehr klein, nichtsdestoweniger äusserst viele Molecüle umfasst. Nebenbei empfiehlt es sich, die electromotorischen Kraftcomponenten $X Y Z$ in zwei Bestandtheile zu trennen, deren erster $\xi \eta \zeta$ von den Stromschwankungen im Aether, deren zweiter $X' Y' Z'$ von solchen

in den Molecülen herstammt. Die ersteren Grössen, die im Aether den Bedingungsgleichungen $4\pi du/dt = \Delta \zeta - d\sigma/dx$ genügen, werden ausserhalb desselben, also in den Molecülen Gleichungen der Form $0 = \Delta \xi - d\sigma/dx$ genügen, wobei σ für $d\xi/dx + d\eta/dy + d\zeta/dz$ geschrieben ist. Aus eben demselben Grunde werden die Grössen $X' Y' Z'$ im Aether Gleichungen der Form $\Delta X' - dS'/dx = 0$ etc. genügen.

Wenden wir uns zuvörderst zu den für die Molecüle geltenden Formeln (14). Führt man rechts statt XYZ ihre Werthe $X' + \xi$, $Y' + \eta$, $Z' + \zeta$ ein, so verbleibt rechter Hand wegen $\Delta \xi - d\sigma/dx = 0$ nur $\Delta X' - dS'/dx$ etc.

Nun entwickle man $\xi \eta \zeta$ in die Reihen $\sum \psi_n f_n$, $\sum \psi_n g_n$, $\sum \psi_n h_n$ und desgleichen X' in $\sum q_n f_n$ etc, so ist linker Hand in (14) für XYZ einzuführen: $X = \sum (q_n + \psi_n) f_n$, $Y = \sum (q_n + \psi_n) g_n$, $Z = \sum (q_n + \psi_n) h_n$; rechts dagegen muss für $X' Y' Z'$ $\sum q_n f_n$ $\sum q_n g_n$ $\sum q_n h_n$ eingesetzt werden. Dadurch gewinnt man aus den Formeln (14) in ähnlicher Weise wie früher die Gleichungen $a_n \ddot{q}_n + b_n \dot{q}_n = c_n \dot{q}_n$ jetzt:

$$(16) \quad a_n (\ddot{q}_n + \ddot{\psi}_n) + b_n (\dot{q}_n + \dot{\psi}_n) = c_n \dot{q}_n \quad n = 1, 2, \dots$$

Die Grössen ψ ergeben sich aus Formel (14_a) als lineare Functionen von ξ, η, ζ , da wir ξ, η, ζ in einem gegen die Wellenlänge kleinen Volumenelemente als constant voraussetzen.

Laut Formel (14_a) werden die Grössen ψ gewonnen durch Division zweier Raumintegrale, die über eine gewisse, nicht näher festgestellte Anzahl von Molecülen ausgedehnt wurden. Dass es auf die Zahl dieser Molecüle nicht ankommt, also ψ_n davon unabhängig ist, wird klar, wenn man erwägt, dass bei einer Integration über eine doppelte Anzahl von Molecülen sich Zähler und Nenner verdoppelt, vorausgesetzt, dass die Bewegungen im einfachen und doppelten Volumen vollkommen homogen sind. Wir wollen deshalb diejenigen Integrationen, welche bei der Bildung von $T \Omega F$ intervenirten, ausgedehnt denken über eine unendlich kleine Volumeneinheit, d. h. wir wollen für den Fall, als die Integration über jene Molecüle auszudehnen ist, die in dem Volumenelement

des Aethermolecülgemisches dV enthalten sind, das Resultat der Integration mit TdV , ΩdV , FdV bezeichnen.

Setzt man in (16) $\psi_n = \alpha_n \xi + \beta_n \eta + \gamma_n \zeta$, so ergeben sich für die Molecüle die Differentialgleichungen:

$$(17) \quad n = 1, 2 \dots n \quad a_n \ddot{\varphi}_n + b_n \dot{\varphi}_n - c_n \varphi_n + \left(a_n \frac{d^2}{dt^2} + b_n \frac{d}{dt} \right) (\alpha_n \xi + \beta_n \eta + \gamma_n \zeta) = 0.$$

Die Gleichungen für den Aether (15) gehen, wenn die Dielectricitätshauptaxen des Aethers zu Coordinatenaxen gewählt werden, über in:

$$(18) \quad \begin{cases} K_1 \left(\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \Sigma A_n \ddot{\varphi}_n \right) = \Delta \xi - \frac{d\sigma}{dx}, \\ K_2 \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \Sigma B_n \ddot{\varphi}_n \right) = \Delta \eta - \frac{d\sigma}{dy}, \\ K_3 \left(\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \Sigma C_n \ddot{\varphi}_n \right) = \Delta \zeta - \frac{d\sigma}{dz}, \quad \sigma = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}. \end{cases}$$

Denn linker Hand ist der Totalwerth der Kraftcomponenten XYZ zu ersetzen durch die vom Aether herrührenden Antheile ξ, η, ζ vermehrt um jene Antheile, welche von den Molecülen herrühren, und welche in ihrem Mittelwerthe lineare Functionen von $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_n$ sein müssen.

Die Gleichungen (17) und (18) genügen selbstverständlich dem Energieprincip, weil sie aus den electrodynamischen Gleichungen (2) abgeleitet wurden, welche nach passender Umformung den Satz ergeben, dass die in der Zeit dt erfolgende Abnahme der gesammten Energie in der Joule'schen Wärme zu suchen ist, welche während derselben Zeit entwickelt wurde.

Zwischen den Coëfficienten $\alpha_n \beta_n \gamma_n A_n B_n C_n n = 1.2 \dots$ ergeben sich noch Beziehungen. Die Art und Weise, wie nämlich bei gegebenen Stromschwankungen die in einem bestimmten Augenblicke vorhandenen inducirenden Kräfte räumlich vertheilt sind, ist davon unabhängig, ob das Medium leitend ist oder nicht, d. h. die Grössen $A_n B_n C_n \alpha_n \beta_n \gamma_n$ werden sich nicht ändern können, wenn wir die Molecüle uns als absolut isolirend denken und jene partiellen Strombahnen als vorgeschrieben vorstellen, die sich in Wirklichkeit von

selbst einfinden. Wir denken uns deshalb in (17) die Grössen b_n der Null gleichgesetzt.

Um die zwischen den $\alpha_n \beta_n \gamma_n A_n B_n C_n$ bestehende Relation zu finden, multipliciren wir die drei Gleichungen in (18) folgeweise mit ξ, η, ζ , addiren; die Summe multipliciren wir mit dem Volumendifferential des intramolecularen Aethers und integriren über den gesammten intramolecularen Aether bis ins Unendliche, wo voraussetzungsgemäss keine electricische Bewegung statthaben soll. Von dem Resultate dieser Operation auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens lässt sich nachweisen, dass es ein vollständiges Zeitdifferential ist.

Bedeutend $\alpha \beta \gamma$ die Componenten der magnetischen Kraft, $F G H$ die Vectorpotentiale, deren negative Zeitdifferentialquotienten die electromotorische Kraft liefern, (hier stammen diese magnetischen Kräfte, Vectorpotentiale etc. nur von den Stromschwankungen des Aethers), so gilt nach Maxwell:

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

$$\text{also: } \dot{\alpha} = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \quad \dot{\beta} = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \quad \dot{\gamma} = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx};$$

der Ausdruck $\Delta \xi - d\sigma/dx$ ist dann nichts anderes als $d\dot{\gamma}/dy - d\dot{\beta}/dz$, und das Integral rechter Hand geht über in:

$$J = \int dt \left[\left(\frac{d\dot{\gamma}}{dy} - \frac{d\dot{\beta}}{dz} \right) \xi + \left(\frac{d\dot{\alpha}}{dz} - \frac{d\dot{\gamma}}{dx} \right) \eta + \left(\frac{d\dot{\beta}}{dx} - \frac{d\dot{\alpha}}{dy} \right) \zeta \right].$$

Der Werth von J bleibt ungeändert, wenn wir die Integration auch noch über die von der Integration unberührten Molecülräume ausdehnen. Denn ausserhalb des Aethers sind die von seinen Stromschwankungen herrührenden magnetischen Kraftcomponenten durch Differentialquotienten eines Massenpotentials darstellbar, somit:

$$\frac{d\dot{\alpha}}{dy} - \frac{d\dot{\beta}}{dz} = \Delta \xi - \frac{d\sigma}{dx} \text{ etc.}$$

der Null gleich. Die Integration per partes ergibt dann neben dem Volumenintegral:

$$L = - \int d\tau \left[\dot{\gamma} \left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} \right) + \dot{\alpha} \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} \right) + \dot{\beta} \left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} \right) \right]$$

noch ein auf die unendlich ferne Oberfläche bezogenes, nach dem Obigen Null zu setzendes Oberflächenintegral, und auch

noch Differenzen von Oberflächenintegralen an der Oberfläche der Molecüle. Der Minuend einer dieser Differenzen ist:

$$\int ds \left[\dot{\gamma} [\xi \cos ny - \eta \cos nx] + \dot{\alpha} [\eta \cos nz - \xi \cos ny] + \dot{\beta} [\xi \cos nx - \xi \cos ny] \right].$$

Die in ihm vorkommenden Werthe $\dot{\alpha} \dot{\beta} \dot{\gamma} \xi \eta \zeta$ seien Werthe dieser Grössen knapp an der Oberfläche im Aether. Der Subtrahend hat genau dieselbe Form, nur bedeuten $\dot{\alpha} \dot{\beta}$ etc. Werthe knapp an der Oberfläche im Molecül. $\cos nx, \cos ny, \cos nz$ sind in beiden Fällen Richtungscosinuse derselben Oberflächennormale.

Wir setzen nun:

$$\xi \cos ny - \eta \cos nx = \dot{\theta} \cos \nu_1, \quad \eta \cos nz - \xi \cos ny = \dot{\theta} \cos \lambda_1, \\ \xi \cos nx - \xi \cos nz = \dot{\theta} \cos \mu_1.$$

Quadrirt und addirt man, so ergibt sich $\dot{\theta}$ als die Componente der Resultirenden von $\xi \eta \zeta$, welche in die Oberfläche des Molecüls fällt. Nebenbei ist $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ eine ebenfalls in die Oberfläche gehörige Richtung. Somit sind die Ausdrücke $\xi \cos ny - \eta \cos nx$ etc. Componenten der nach der Zeit differenzirten Kraft, und zwar einer solchen, die in die Oberfläche hineinfällt. An anderer Stelle¹⁾ ist nachgewiesen worden, dass die Componenten der Vectorpotentiale, resp. jene der magnetischen Kraft, welche an einer Discontinuitätsfläche in diese selbst hineinfällt, durch diese Fläche continuirlich hindurchgehen. Infolge dessen werden Minuend und Subtrahend, welche die Form:

$$\int \dot{\theta} (\dot{\alpha} \cos \lambda_1 + \dot{\beta} \cos \mu_1 + \dot{\gamma} \cos \nu_1) ds$$

annehmen, einander gleich. Setzt man nun noch für $(d\xi/dy) - (\partial \eta/\partial x)$ den Werth $\ddot{\gamma}$ ein, so reducirt sich das gesammte Resultat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf:

$$L = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau [\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2].$$

Linkerhand die angedeutete Operation ausführend, können wir mit Rücksicht darauf, dass $\xi \eta \zeta$ in einem viele Molecüle

1) Kolářek, Wied. Ann. 32. p. 430. 1887.

umfassenden Volumenelement des Aethermolecülgemenges dV als constant betrachtet werden kann, statt des Volumendifferentials des intramolecularen Aethers $d\tau$ auch $dV \cdot \epsilon$ schreiben, wenn im Volumenelement dV der Aether den Raum ϵdV einnimmt. So folgt nach Ausführung der oben angedeuteten Operation:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \int \epsilon dV \left[K_1 \frac{d^2 \xi}{\partial t^2} \frac{d\xi}{dt} + K_2 \frac{d^2 \eta}{\partial t^2} \frac{d\eta}{dt} + K_3 \frac{d^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{d\zeta}{dt} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau [\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2] + \int \epsilon dV [K_1 (A_1 \ddot{q}_1 + A_2 \ddot{q}_2 + \dots) \dot{\xi} \\ & + K_2 (B_1 \ddot{q}_1 + B_2 \ddot{q}_2 - \dots) \dot{\eta} + K_3 (C_1 \ddot{q}_1 + C_2 \ddot{q}_2 \dots) \dot{\zeta}] = 0. \end{aligned} \right.$$

Aus Gl. (17) folgt, wenn man mit \dot{q}_n multiplicirt, alle so entstehenden Gleichungen addirt, mit dV die Summe multiplicirt und über den ganzen, Aether und Molecüle umfassenden Raum integrirt:

$$(20) \int dV \left[\sum a_n \ddot{q}_n \dot{q}_n + c_n \dot{q}_n \dot{q}_n + a_n (\alpha_n \ddot{\xi} + \beta_n \ddot{\eta} + \gamma_n \ddot{\zeta}) \dot{q}_n \right] = 0.$$

Durch Addition von (19) und (20) gewinnen wir das Resultat, dass der Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \int dV \left[\sum a_n (\alpha_n \ddot{\xi} + \beta_n \ddot{\eta} + \gamma_n \ddot{\zeta}) \dot{q}_n \right. \\ & \left. + \epsilon K_1 \dot{\xi} \sum (A_n \ddot{q}_n) + \epsilon K_2 \dot{\eta} \sum (B_n \ddot{q}_n) + \epsilon K_3 \dot{\zeta} \sum (C_n \ddot{q}_n) \right] \end{aligned}$$

ein Differentialquotient nach t sein soll, welcher Bedingung genügt wird durch $a_n \alpha_n : K_1 A_n = a_n \beta_n : K_2 B_n = a_n \gamma_n : K_3 C_n$; damit ergeben sich folgende definitive Differentialgleichungen:

$$(21) \left\{ \begin{aligned} & K_1 \ddot{\xi} + \sum_{n=1}^{n=n} \ddot{q}_n \alpha_n h_n = \Delta \xi - \frac{d\sigma}{dx}, \\ & K_2 \ddot{\eta} + \sum_{n=1}^{n=n} \ddot{q}_n \beta_n h_n = \Delta \eta - \frac{d\sigma}{dy}, \\ & K_3 \ddot{\zeta} + \sum_{n=1}^{n=n} \ddot{q}_n \gamma_n h_n = \Delta \zeta - \frac{d\sigma}{dz}, \quad \sigma = \frac{d\xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned} \right. \text{Aether.}$$

$$(22) \left\{ \begin{aligned} & a_n \ddot{q}_n + b_n \dot{q}_n + c_n q_n + \left(a_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b_n \frac{\partial}{\partial t} \right) (\alpha_n \xi + \beta_n \eta + \gamma_n \zeta) = 0, \\ & n = 1, 2 \dots (\text{Molecüle}). \end{aligned} \right.$$

Für $+c_n$ haben wir bequemlichkeitshalber $-c_n$ geschrieben, h_n ist eine von der Ordnungszahl n abhängige Constante.

IV. Als Integrale von (21) und (22) nehmen wir, unter $\alpha\beta\gamma$ l , m , n , Φ_n complexe Grössen verstehend, und $H = \nu t + \nu\delta(lx + my + nz)$ setzend an:

$$\xi = \alpha e^H, \quad \eta = \beta e^H, \quad \zeta = \gamma e^H, \quad q_n = \Phi_n e^H.$$

Dabei ist $\nu = (2\pi/\tau)\sqrt{-1}$, τ die Schwingungsdauer, t die Zeit, δ eine dem Sinne nach noch festzustellende Constante. Die Substitution in (21) und (22) ergibt:

$$\begin{aligned} (K_1\alpha + \sum \alpha_n h_n \Phi_n) &= \alpha \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) - \delta^2 l (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ (K_2\beta + \sum \beta_n h_n \Phi_n) &= \beta \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) - \delta^2 m (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ (K_3\gamma + \sum \gamma_n h_n \Phi_n) &= \gamma \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) - \delta^2 n (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ \Phi_n (a_n \nu^2 + b_n \nu + c_n) &+ (a_n \nu^2 + b_n \nu) (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{oder: } \Omega_n = -\frac{a_n \nu^2 + b_n \nu}{a_n \nu^2 + b_n \nu + c_n} \text{ gesetzt } \Phi_n = \Omega_n (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma)$$

Durch Substitution für Φ_n :

$$\begin{aligned} K_1\alpha + \sum \alpha_n h_n \Omega_n (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma) &= \alpha \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \\ &\quad - \delta^2 l (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ K_2\beta + \sum \beta_n h_n \Omega_n (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma) &= \beta \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \\ &\quad - \delta^2 m (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ K_3\gamma + \sum \gamma_n h_n \Omega_n (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma) &= \gamma \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \\ &\quad - \delta^2 n (l\alpha + m\beta + n\gamma). \end{aligned}$$

Es sei ferner:

$$2F_0 = \sum h_n \Omega_n (\alpha_n \alpha + \beta_n \beta + \gamma_n \gamma)^2,$$

$$2G_0 = K_1 \alpha^2 + K_2 \beta^2 + K_3 \gamma^2,$$

ferner $S = F_0 + G_0$ eine quadratische Function von $\alpha\beta\gamma$ mit Coefficienten, die von ν abhängig sind.

In dieser Weise ergeben sich die drei Hauptgleichungen:

$$(23) \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \alpha (l^2 + m^2 + n^2) \delta^2 - \delta^2 l (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = \beta (l^2 + m^2 + n^2) \delta^2 - \delta^2 m (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ \frac{\partial S}{\partial \gamma} = \gamma (l^2 + m^2 + n^2) \delta^2 - \delta^2 n (l\alpha + m\beta + n\gamma). \end{cases}$$

Behufs weiterer Entwicklungen sollen zuvörderst die vollkommen durchsichtigen Krystalle behandelt werden. In

diesem Falle ist $b_n = 0$ zu setzen, $\alpha\beta\gamma$ seien reell, desgleichen lmn . Die Werthe ξ, η, ζ sind dann:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha \cos \left[\frac{2\pi}{\tau} t + \frac{2\pi}{\tau} \delta (lx + my + nz) \right] \\ &+ \sqrt{-1} \alpha \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{\tau} t + \frac{2\pi}{\tau} \delta (lx + my + nz) \right].\end{aligned}$$

Da die reellen und imaginären Theile von $\xi\eta\zeta$ für sich den Gleichungen genügen, so sind hierdurch ebene, linear polarisirte Wellen vorgestellt, die mit der Geschwindigkeit $v = -1/\delta$ längs der Wellennormale lmn fortgepflanzt werden. $\alpha\beta\gamma$ sind projecirte Amplituden der von den Stromschwankungen im Aether stammenden Kraft ξ, η, ζ . Die Grösse Ω_n wird reell: $\Omega_n = -a_n v^2 / (a_n v^2 + c_n)$, somit sind auch die Coefficienten der quadratischen Function S reell, aber von $v/\sqrt{-1}$, d. h. von $2\pi/\tau$, der Farbe abhängig. Da zur Festlegung eines neuen Coordinatensystems drei Grössen genügen, so können wir dieses so wählen, dass in S die doppelten Producte wegfallen. Die Projectionen der Amplitude auf die neuen Axen seien $\alpha'\beta'\gamma'$, die Richtungscosinuse der Wellennormale $l'm'n'$. Ferner sei:

$$\begin{aligned}\alpha &= p_1 \alpha' + p_2 \beta' + p_3 \gamma', & \beta &= q_1 \alpha' + q_2 \beta' + q_3 \gamma', \\ \gamma &= s_1 \alpha' + s_2 \beta' + s_3 \gamma' .\end{aligned}$$

Die pqs sind Richtungscosinuse des neuen Coordinatensystems. Vermöge:

$$\frac{dS}{d\alpha'} = \frac{dS}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\alpha'} + \frac{dS}{d\beta} \frac{d\beta}{d\alpha'} + \frac{dS}{d\gamma} \frac{d\gamma}{d\alpha'} = \frac{dS}{d\alpha} p_1 + \frac{dS}{d\beta} q_1 + \frac{dS}{d\gamma} s_1$$

folgt aus (23) nach vorhergegangener Multiplication mit $p_1 q_1 s_1$ unter Rücksicht auf $l' = lp_1 + mq_1 + ns_1$, $\alpha' = \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma s_1$, $l\alpha + m\beta + n\gamma = l'\alpha' + m'\beta' + n'\gamma'$ genau dieselbe Formelreihe wie in (23), wenn wir die Striche weglassen und die Grössen $\alpha\beta\gamma, lmn$ auf das neue Coordinatensystem beziehen, in welchem $2S$ die Form $R\alpha^2 + S\beta^2 + T\gamma^2$ durch passende Wahl desselben angenommen hat. Die Formeln (23) vereinfachen sich in:

$$(23_a) \quad \begin{cases} R\alpha = \alpha \delta^2 - \delta^2 l (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ S\beta = \beta \delta^2 - \delta^2 m (l\alpha + m\beta + n\gamma), \\ S\gamma = \gamma \delta^2 - \delta^2 n (l\alpha + m\beta + n\gamma). \end{cases}$$

Aus (23_a) folgt ferner:

$$(24) \quad R\alpha l + S\beta m + T\gamma n = 0,$$

und da (23_a) auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(23_b) \left\{ \begin{aligned} \frac{l}{R - \delta^2} &= -\frac{\alpha}{\delta^2(l\alpha + m\beta + n\gamma)}, & \frac{m}{S - \delta^2} &= -\frac{\beta}{\delta^2(l\alpha + m\beta + n\gamma)}, \\ \frac{n}{T - \delta^2} &= -\frac{\gamma}{\delta^2(l\alpha + m\beta + n\gamma)}, \end{aligned} \right.$$

so ergibt sich die Multiplication mit Rl , Sm , Tn und Addition unter Rücksicht auf (24):

$$(25) \quad \frac{l^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{m^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{n^2}{v^2 - v_z^2} = 0,$$

wenn für $\delta \dots = 1/v$ und für $1/R, 1/S, 1/T$ v_x^2, v_y^2, v_z^2 geschrieben wird. Dies ist eine von Fresnel hergeleitete Grundformel der Doppelbrechungslehre. Definirt man den Lichtvector durch die totale diëlectrische Verschiebung, die von den Stromschwankungen im Aether und den Molecülen her stammt, nennt die Componenten derselben $\alpha' e^H, \beta' e^H, \gamma' e^H$, so ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass der Totalwerth der electromotorischen Kraft an einer Aetherstelle durch $\xi + (1/K_1) \sum q_n \alpha_n h_n$, somit die diëlectrischen Verschiebungen selbst durch $(K_1 \xi + \sum q_n \alpha_n h_n)/4\pi$ gegeben sind für die mit 4π multiplicirten Amplituden $4\pi\alpha', 4\pi\beta', 4\pi\gamma'$ das Werthsystem $\partial S/d\alpha, dS/d\beta, dS/d\gamma$, und zwar ohne Rücksicht darauf, ob der Krystall durchsichtig ist oder nicht. Im letzteren Falle sind $4\pi\alpha', 4\pi\beta', 4\pi\gamma'$ durch $R\alpha, S\beta, T\gamma$ gegeben, und die aus (24) entstehende Relation:

$$(24_a) \quad \alpha' l + m\beta' + n\gamma' = 0$$

drückt die Transversalität der Lichtschwingungen aus.

Die Formeln (23_a) lauten dann:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha' - \delta^2 \frac{\alpha'}{R} + l \theta &= 0, \\ \beta' - \delta^2 \frac{\beta'}{S} + m \theta &= 0, & \theta &= \frac{l\alpha'}{R} + \frac{m\beta'}{S} + \frac{n\gamma'}{T}, \\ \gamma' - \delta^2 \frac{\gamma'}{T} + n \theta &= 0, \end{aligned} \right.$$

Sie lehren diejenigen Werthe $\alpha' \beta' \gamma'$ kennen, für welche der Werth von $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ sein Maximum oder Minimum

erreicht, wenn die Bedingung $la' + m\beta' + n\gamma' = 0$ und $\alpha'^2/R + \beta'^2/S + \gamma'^2/T = \text{Const.}$ gestellt wird.

Die Schwingungsrichtungen fallen somit in die Hauptaxen der Ellipse, welche durch den Schnitt der Wellenebene mit dem Ellipsoide $\alpha'^2/R + \beta'^2/S + \gamma'^2/T = \text{Const.}$ entsteht. Aus den Gleichungen (26) folgt leicht durch Multiplication mit $\alpha' \beta' \gamma'$ und Addition:

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) = \delta^2 \text{ Const.}$$

Verfügt man über die beliebige Constante, sie gleich Eins setzend, so ist:

$$-\frac{1}{\delta} = v = \frac{1}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}},$$

und die einer Schwingungsrichtung entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist deshalb identisch mit der inversen Axenlänge im Schnitte der Wellenebene mit dem Ellipsoide:

$$\alpha'^2 v_x^2 + \beta'^2 v_y^2 + \gamma'^2 v_z^2 = 1.$$

Wendet man diesen Satz auf einaxige Krystalle an, so folgt unmittelbar, dass die diëlectrischen Schwingungen des ordinären Strahles auf dem Hauptschnitte senkrecht stehen, also Fresnel's Definition der Polarisationssebene.

Nun existirt aber neben der fortschreitenden ebenen Welle der diëlectrischen Verschiebungen eine ebensolche für die magnetischen Kräfte ABC , welche mit den Polarisationsströmen uvw im Aether vermöge der Relationen $dC/\partial y - dB/\partial z = 4\pi u$ etc. zusammenhängen. Sind $A_0 B_0 C_0$ die Amplituden dieser magnetischen Kräfte, sodass $A = A_0 e^{iH} = A_0 e^{i\omega t + i\delta(lx + my + nz)}$ etc. geschrieben werden darf, so ergibt sich die Relation:

$$4\pi\alpha' = \delta(C_0 m - B_0 n), \quad 4\pi\beta' = \delta(A_0 n - C_0 l)$$

$$4\pi\gamma' = \delta(B_0 l - A_0 m).$$

Daraus folgt, dass die magnetischen Kräfte auf der diëlectrischen Verschiebung und der Wellennormale senkrecht stehen, und damit die von Kirchhoff aus der Elasticitätshypothese hergeleitete Doppelbrechungstheorie, wenn der Lichtvector durch die magnetische Kraft definirt wird.

V. Die in Formel (14_n) vorkommende Grösse ψ_n ist ein Maass für die Stärke der Erregung der n ten Partialschwingung durch gegebene inducirende Wirkungen $\xi \eta \zeta$ der im Aether fortschreitenden Lichtwelle. Unter der Voraussetzung,

dass $\xi \eta \zeta$ in einem gegen die Wellenlänge kleinen Volumenelement constant ist, ergab sich für ψ_n der Werth $\alpha_n \xi + \beta_n \eta + \gamma_n \zeta$. Daraus folgt, dass äussere Kräfte, welche in einer zu $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ senkrechten Ebene liegen, die n te Partialschwingung nicht zu erregen vermögen. Diese Richtung $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ bezeichnen wir als Axe der n ten Molecularschwingung. Dieser Axenbegriff kann dazu dienen, um eine beiläufige Vorstellung von der Constitution der verschiedenen Krystallsysteme zu gewinnen.

Um auszudrücken, dass in einem Molecül drei bevorzugte Richtungen existiren, denken wir uns dasselbe ellipsoidisch und aus isotropem Material bestehend. Unzweifelhaft werden sich die Eigenschwingungen den drei Hauptaxen zuordnen lassen, in der Weise, dass z. B. die der z -Axe zugeordneten durch Schwingungen in der xy -Ebene nicht erregt werden. Mit anderen Worten, die Schwingungsaxen der Molecüle werden nur in die x -, oder y -, oder z -Axe hineinfallen. Deshalb ist für eine der drei Gruppen $\beta_n = 0 = \gamma_n = 0$. Für die zweite ist nur β_n , für die dritte nur γ_n von der Null verschieden. Liegen zudem die Ellipsoidaxen alle unter einander parallel, und zwar den drei Krystallaxen entsprechend, so gelangt man zum rhombischen System. Der Ausdruck für $2F_0$ in Abschnitt IV reducirt sich, wenn die drei Summenzeichen $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ den drei Schwingungsgruppen entsprechen, auf $\alpha^2 \Sigma_1 \alpha_n h_n \Omega_n + \beta^2 \Sigma_2 \beta_n h_n \Omega_n + \gamma^2 \Sigma_3 \gamma_n h_n \Omega_n$. Die drei Krystallaxen, die wir nebenbei mit den Hauptdielectricitätsaxen zusammenfallen liessen, sind somit, unabhängig von der Farbe, zugleich Richtungen der drei optisch-elastischen Hauptrichtungen, denn auch die Function $S = F_0 + G_0$ ist bezüglich $\alpha\beta\gamma$ rein quadratisch.

Handelt es sich um durchsichtige Krystalle, so ergeben sich für die drei Hauptgeschwindigkeiten v_x, v_y, v_z Werthe wie

$$R = \frac{1}{v^2} = K_1 + \Sigma_1 \alpha_n h_n \Omega_n = K_1 + \frac{\Sigma_1 \alpha_n h_n \alpha_n \cdot (-v^2)}{\alpha_n v^2 + c_n}.$$

Dabei ist K_1 die erste Hauptdielectricitätsconstante des Aethers in electromagnetischem Maass. Drückt man dieselbe durch ihren electrostatistischen Werth k_1 aus, nennt

N_x den ersten Hauptbrechungsquotienten, so folgt das Dispersionsgesetz:

$$N_x^2 = k_1 + \sum_1 \frac{c'_1 \cdot \lambda'_1}{\lambda^2 - \lambda'^2_1}, \quad N_y^2 = k_2 + \sum_2 \frac{c''_2 \cdot \lambda''_2}{\lambda^2 - \lambda''^2_2},$$

$$N_z^2 = k_3 + \sum_3 \frac{c'''_3 \cdot \lambda'''_3}{\lambda^2 - \lambda'''^2_3}.$$

λ ist die auf das Vacuum bezogene Lichtwellenlänge, $c'_1 c''_2 c'''_3$ $\lambda'_1 \lambda''_2 \lambda'''_3$ sind die den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Constanten, die Summen selbst beziehen sich auf alle Glieder einer Schwingungsgruppe. Die Richtigkeit dieser von Ketteler aufgestellten Formeln ist durch Messungen an isotropen Medien und an Kalkspath erwiesen worden. Stellt man sich vor, dass bloß die z -Axen der ellipsoidischen Molecülmodelle in eine Richtung hineinfallen, während die zwei anderen Ellipsoidaxen einer bestimmten Anordnung nur insoweit entsprechen, als ein Theil der y -Axen nach einer Richtung der andere Theil nach einer anderen Richtung orientirt ist, dass ferner diese zwei letzten Richtungen, die beide zur z -Axe senkrecht stehen, mit einander einen von 90° verschiedenen Winkel einschliessen, so gelangt man zu Krystallen des klinorhombischen Systems. Bei diesen gibt es nur eine einzige von der Farbe unabhängige Richtung der optischen Elasticität, und dies genügt zur Erklärung der diesen Krystallen eigenthümlichen Axendispersion. Sind bezüglich der Ellipsoidaxen der Molecüle keine regulären Anordnungen vorhanden, sondern bezieht sich eine eventuelle regelmässige Anordnung bloß auf die Schwerpunkte der Molecüle, so repräsentirt dieses Modell das triklinische System.

Die Anisotropie des Aethers in electricischer Beziehung kann man sich durch Dichtigkeitsänderungen desselben veranlasst denken, welche einerseits in einer zwischen Aether und Molecültheilchen bestehenden Kraft, andererseits in der regelmässigen Anordnung der Molecülschwerpunkte ihre Erklärung finden.

Selbstverständlich ist dieser, auf die gegenseitige Lagerung und Form der Molecüle gestützte Erklärungsversuch der krystallinischen Structur nicht der einzig mögliche, der sich mit unserer Doppelbrechungstheorie verträgt. Ist es doch nicht

ausgeschlossen, dass die für die Art der Axendispersion charakteristische räumliche Vertheilung der molecularen Schwingungsaxen durch die räumlichen Eigenschaften des Atomcomplexes bestimmt sein kann, welchen wir mit dem Namen Molecül bezeichnen.

VI. Wir wollen nun die in den Ausdrücken $\xi = e^H \cdot \alpha$, $\eta = e^H \cdot \beta$, $\zeta = e^H \cdot \gamma$, $H = \nu \tau + \nu \delta (lx + my + nz)$ vorkommenden Grössen $\alpha \beta \gamma$, $l m n$ complex annehmen. Wir setzen wie früher $\nu = 2\pi\sqrt{-1}/\tau$, $\delta = -1/\nu$, ferner:

$$\alpha = \alpha' + \sqrt{-1} \cdot \alpha'' \quad l = l_0 + \sqrt{-1} \cdot l_1 \frac{\varepsilon}{\delta},$$

$$\beta = \beta' + \sqrt{-1} \cdot \beta'' \quad m = m_0 + \sqrt{-1} \cdot m_1 \frac{\varepsilon}{\delta},$$

$$\gamma = \gamma' + \sqrt{-1} \cdot \gamma'' \quad n = n_0 + \sqrt{-1} \cdot n_1 \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Die Substitution in ξ ergibt:

$$\xi = (\alpha' + \sqrt{-1} \alpha'') e^{-\frac{2\pi}{\tau} \varepsilon (l_1 x + m_1 y + n_1 z)} \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi}{\tau} t + \sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi}{\tau} \delta (l_0 x + m_0 y + n_0 z)},$$

oder:

$$\begin{aligned} \xi \cdot e^{\frac{2\pi}{\tau} \varepsilon (l_1 x + m_1 y + n_1 z)} &= \alpha' \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \frac{2\pi}{\tau} \delta (l_0 x + m_0 y + n_0 z) \right) \\ &\quad - \alpha'' \sin \left(\frac{2\pi}{\tau} t + \frac{2\pi}{\tau} \delta (l_0 x + m_0 y + n_0 z) \right) \\ &\quad + \sqrt{-1} \left[\alpha' \sin (\quad) + \alpha'' \cos (\quad) \right]. \end{aligned}$$

Die für sich selbst den Differentialgleichungen genügenden reellen oder imaginären Werthe von ξ , η , ζ repräsentiren elliptische Wellen, die längs der Wellennormale $l_0 m_0 n_0$ mit der Geschwindigkeit $-1/\delta$ fortschreiten, während die Amplitude längs der Extinctionsrichtung $l_1 m_1 n_1$ nach einer Exponentiellen des mit $(2\pi/\tau) \varepsilon$ multiplicirten Weges abnimmt.

Die Richtungen beider Normalen sind willkürlich, also $l_0 m_0 n_0$ und $l_1 m_1 n_1$ als gegeben zu betrachten. Zu bestimmen sind ausser δ und ε noch $\alpha' \alpha'' \beta' \beta'' \gamma' \gamma''$. Von diesen letzten sechs Grössen ist jedoch wegen der willkürlichen Wahl des Zeitanfangspunktes eine und wegen willkürlicher Wahl der resultirenden Amplitude noch eine als gegeben zu betrachten.

Also sind sechs Grössen zu bestimmen, und zwar aus den (3) complexen Gleichungen (23).

Die daselbst vorkommende Grösse S , die nach $\alpha \beta \gamma$ quadratisch ist, besitzt complexe Coefficienten, und weil das Nullwerden der Coefficienten der drei doppelten Produkte das Erfülltsein von sechs Bedingungen erfordert, so ist es im allgemeinen nicht möglich, durch passende Wahl des Coordinatensystems, welche drei arbiträre Grössen zur Verfügung stellt, die Grösse S rein quadratisch zu machen.

Es gelingt dies durch Transformation auf ein geometrisch nicht deutbares complexes Coordinatensystem. Es seien $p_1 p_2 p_3, q_1 q_2 q_3, s_1 s_2 s_3$ neun complexe Richtungs cosinuse, also: $\alpha = Ap_1 + Bp_2 + Cp_3, \beta = Aq_1 + Bq_2 + Cq_3, \gamma = As_1 + Bs_2 + Cs_3$.

Wir setzen fest, dass von diesen neun Grössen folgenden sechs Bedingungen genügt werde:

$$\begin{aligned} p_1^2 + q_1^2 + s_1^2 &= 1, & p_1 p_2 + q_1 q_2 + s_1 s_2 &= 0, \\ p_2^2 + q_2^2 + s_2^2 &= 1, & p_2 p_3 + q_2 q_3 + s_2 s_3 &= 0, \\ p_3^2 + q_3^2 + s_3^2 &= 1, & p_3 p_1 + q_3 q_1 + s_3 s_1 &= 0. \end{aligned}$$

Durch Quadrirung und Addition folgt:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Andererseits folgt:

$A = \alpha p_1 + \beta q_1 + \gamma s_1, B = \alpha p_2 + \beta q_2 + \gamma s_2, C = \alpha p_3 + \beta q_3 + \gamma s_3$
und daraus durch Quadriren und Addition:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \\ &\quad + \beta^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \gamma^2 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \\ &\quad + 2\alpha\beta (p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3) + 2\beta\gamma (q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s_3) \\ &\quad + 2\alpha\gamma (p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3), \end{aligned}$$

und da die letzte Relation für jedes α, β, γ bestehen muss:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1, & p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 &= 0, \\ q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 &= 1, & q_1 s_1 + q_2 s_2 + q_3 s_3 &= 0, \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= 1, & p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 &= 0. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Relation:

$$\frac{dS}{\partial A} = \frac{dS}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dA} + \frac{dS}{d\beta} \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha A} + \frac{dS}{d\gamma} \frac{\alpha\gamma}{dA} = \frac{dS}{d\alpha} p_1 + \frac{dS}{d\beta} q_1 + \frac{dS}{d\gamma} s_1,$$

multiplizieren wir ferner die drei Gleichungen in (23) mit $p_1 q_1 s_1$ und addiren, so folgt:

$$\frac{dS}{dA} = A^2 \cdot A - L \Theta \cdot \delta^2 \quad \text{und ähnlich} \quad \frac{dS}{dB} = A^2 B - M \cdot \Theta \cdot \delta^2,$$

$$\frac{dS}{dC} = A^2 C - N \Theta \cdot \delta^2.$$

Dabei ist $L = lp_1 + mq_1 + ns_1$, $M = lp_2 + mq_2 + ns_2$,
 $N = lp_3 + mq_3 + ns_3$, $A^2 = (l^2 + m^2 + n^2) \delta^2 = \delta^2 (L^2 + M^2 + N^2)$,
 $\Theta = (l\alpha + m\beta + n\gamma) = (LA + MB + NC)$.

Die drei noch willkürlichen complexen Grössen aus der Reihe $p_1 p_2 p_3$, $q_1 q_2 q_3$, $s_1 s_2 s_3$ lassen sich nun so wählen, dass die drei complexen Coefficienten der doppelten Producte AB , AC , BC im Ausdrucke S verschwinden.

Durch passende Wahl eines complexen Coordinatensystems folgen also wiederum Ausdrücke der Form $2S = R_0 A^2 + S_0 B^2 + T_0 C^2$:

$$R_0 A = A^2 A - L \Theta \cdot \delta^2, \quad S_0 B = A^2 B - M \Theta \cdot \delta^2,$$

$$T_0 C = A^2 C - N \Theta \cdot \delta^2$$

und aus ihnen die Formel von Fresnel:

$$\frac{L^2}{A^2 - R_0} + \frac{M^2}{A^2 - S_0} + \frac{N^2}{A^2 - T_0} = 0.$$

Die complexen Richtungsosinuse LMN gestatten keine geometrische Deutung, es sei denn, dass Wellennormale und Extinctionsrichtung zusammenfallen. Für diesen Fall ist es jedoch besser, die Gleichungen (23) direct zu benutzen. Dieselben gelten laut ihrer Herleitung für jenes Coordinatensystem, das in die Hauptdiëlectricitätsrichtungen fällt, sie gelten aber auch, wie im Absatz IV nachgewiesen wurde, der Form nach für jedes beliebige reelle Coordinatensystem. Wir legen nun die z -Axe desselben in die mit der Extinctionsrichtung zusammenfallende Wellennormale, wodurch $l_0 = l_1 = 0$ $m_0 = m_1 = 0$ $n_0 = n_1 = 1$ wird. Setzen wir deshalb in (23) $l = 0$ $m = 0$ $n = 1 + \varepsilon/\delta \sqrt{-1}$, so folgt:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \alpha A^2 \quad \frac{dS}{d\beta} = \beta A^2 \quad \frac{dS}{d\gamma} = 0 \quad A = \delta + \varepsilon \sqrt{-1}.$$

Nun sind $dS/d\alpha$, $dS/d\beta$, $dS/d\gamma$ die mit 4π multiplicirten totalen diëlectrischen Verschiebungen. Vermöge $dS/d\gamma = 0$ ist deshalb die Lichtbewegung rein transversal, wenn wir sie durch die totale diëlectrische Verschiebung definiren.

Nennen wir:

$$\frac{dS}{d\alpha} = A, \quad \frac{dS}{d\beta} = B, \quad \frac{dS}{d\gamma} = C,$$

wobei $A B C$ bis auf den Factor 4π die complexen Amplituden der Lichtbewegung bedeuten. Die Auflösung dieser Gleichungen gibt nun:

$$\alpha = \frac{d\Theta}{dA}, \quad \beta = \frac{d\Theta}{dB}, \quad \gamma = \frac{d\Theta}{dC},$$

wobei Θ eine quadratische Function von $A B C$ ist. Unsere drei Gleichungen lauten dann:

$$A^2 \cdot \frac{d\Theta}{dA} = A, \quad A^2 \cdot \frac{d\Theta}{dB} = B, \quad C = 0.$$

Θ ist also eine quadratische Function von A und B allein, somit in der Form $\omega_{11} A^2 + 2\omega_{12} AB + \omega_{22} B^2 = 2\Theta$ darstellbar, wobei $\omega_{11} \omega_{12} \omega_{22}$ bekannte Function der Farbe und der Wellennormale sind. Aus:

$$(\omega_{11} A^2 - 1) A + \omega_{12} \cdot A^2 B = 0, \quad \omega_{12} A \cdot A^2 + (\omega_{22} A^2 - 1) B = 0$$

$$\text{folgt dann:} \quad \begin{vmatrix} \omega_{11} - \frac{1}{A^2} & \omega_{12} \\ \omega_{12} & \omega_{22} - \frac{1}{A^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Die letzte Gleichung gestattet, zwei Werthe der Grösse A zu bestimmen. Es pflanzen sich somit in der gegebenen Richtung zwei elliptische ebene Wellen fort. Die zwei Werthe von A seien $A_1 A_2$. Die entsprechenden A und B seien $A_2 B_3$. Aus den Gleichungen folgt ferner:

$$A_1 = -\frac{B_1 \omega_{12}}{\omega_{11} - \frac{1}{A_1^2}}, \quad A_2 = -\frac{B_2 \omega_{12}}{\omega_{11} - \frac{1}{A_2^2}},$$

$$\text{also:} \quad A_1 A_2 = + B_1 B_2 \frac{\omega_{12}^2}{\left(\omega_{11} - \frac{1}{A_1^2}\right) \left(\omega_{11} - \frac{1}{A_2^2}\right)},$$

oder mit Rücksicht auf die Determinante:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Die y - und x -Axe legen wir in die Haupttaxen einer der elliptischen Schwingungen. Es sei zu diesem Behufe

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1' + A_1'' \sqrt{-1} & B_1 &= B_1' + B_1'' \sqrt{-1} \\ A_2 &= A_2' + A_2'' \sqrt{-1} & B_2 &= B_2' + B_2'' \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

Dann ist dem vorigen zufolge:

$$\xi_1 \cdot e^{\frac{2\pi}{\tau} t_1 z} = A_1' \cos \varphi - A_1'' \sin \varphi \quad \text{eine reelle Lösung; } \varphi \text{ hängt von der Zeit ab.}$$

$$\eta_1 \cdot e^{\frac{2\pi}{\tau} t_1 z} = B_1' \cos \varphi - B_1'' \sin \varphi$$

Die Ellipsenaxen fallen in die Coordinatenaxen, falls $A_1' = B_1' = 0$ genommen wird. Aus:

$0 = (A_1' + A_1'' \sqrt{-1})(A_2' + A_2'' \sqrt{-1}) + (B_1' + B_1'' \sqrt{-1})(B_2' + B_2'' \sqrt{-1})$
folgt dann, wenn über die Amplitude von ξ_1, η_1 so verfügt wird, dass $A_1' = m, B_1'' = 1$ ist:

$$\xi_1 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_1 z} = m \cos \varphi \quad \text{und} \quad m A_2' - B_2'' = 0$$

$$\eta_1 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_1 z} = -\sin \varphi \quad m A_2'' + B_2' = 0.$$

Die Substitution in:

$$\xi_1 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_1 z} = A_2' \cos \varphi - A_2'' \sin \varphi, \quad \eta_2 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_2 z} = B_2' \cos \varphi - B_2'' \sin \varphi$$

ergibt, wenn noch $A_2' = S \cos \chi, A_2'' = S \sin \chi$ geschrieben wird:

$$\xi_2 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_2 z} = S \cos(\chi + \varphi); \quad \eta_2 e^{\frac{2\pi}{\tau} t_2 z} = -m S \sin(\varphi + \chi).$$

Der zweite elliptisch polarisirte Strahl durchläuft also eine senkrecht gelegene ähnliche Ellipse.

Bei den gewöhnlichen absorbirenden Krystallen, die nicht geradezu so stark wie Metalle absorbiren, werden diese Ellipsen sehr flach sein, und eine nicht näher auszuführende Rechnung zeigt, dass für sie die Gesetze der Wellenfortpflanzung der absolut durchsichtigen Medien erhalten bleiben, weil in diesem Falle der als Grösse der ersten Ordnung der Kleinheit aufzufassende Extinctionsindex $(2\pi/\tau)\epsilon$ in zweiter Potenz in die zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dienenden Formeln eingeht.

Handelt es sich um rhombische Krystalle, so ist die in (23) vorkommende Function von S rein quadratisch, wenn die Coordinatenaxen in die Hauptdiëlectricitätsrichtungen fallen. Dann gilt die Fresnel'sche Relation:

$$\frac{l^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{m^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{n^2}{v^2 - v_z^2} = 0.$$

Die complexen Hauptbrechungsindices ergeben sich aus der Relation:

$$(\delta + \varepsilon V - 1)^2 = \frac{1}{v_x^2} = R = K_1 + \sum_1 h_n \alpha_n \cdot \Omega_n \\ = K_1 - \sum_1 h_n \alpha_n \cdot \frac{\alpha_n v^2 + h_n v}{\sigma_n v^2 + h_n v + c_n}.$$

Die Transformation dieser Formel ergibt, wenn der reelle Brechungsindex mit N_x und der Extinctionsfactor mit γ_x bezeichnet wird, Formeln wie:

$$N_x^2 - K_1 - \gamma_x^2 = \sum_{t=1, 2, \dots} \frac{(\lambda^2 - \lambda_t^2) M_t}{(\lambda^2 - \lambda_t^2)^2 + \sigma_t^2 \lambda^2}, \\ 2 N_x \gamma_x = \sum_{t=1, 2, \dots} \frac{M_t \sigma_t \frac{\lambda^3}{\lambda_t^3}}{(\lambda^2 - \lambda_t^2)^2 + \sigma_t^2 \lambda^2}.$$

Ähnlich $N_y \gamma_y$ und $N_z \gamma_z$.

Für ein einaxiges Medium ergeben die Formeln, dass der ordinäre Strahl in dichroitischen Krystallen dieselbe Farbe zeigt. Die Abhängigkeit des Extinctionsindex von der Richtung des ausserordentlichen Strahles ist aus den Formeln leicht herauszufinden.

Wir übergehen die näheren Details und wollen die Gleichung (23) so transformiren, dass in ihr nicht die Amplituden der von den Stromschwankungen des Aethers herrührenden Kräfte, sondern jene der totalen dielectricischen Verschiebung vorkommen. Wir nennen die mit 4π multiplicirten Amplituden Componenten der letzteren a, b, c , die ersteren wie in Gl. (23) $\alpha \beta \gamma$. Dem früheren zufolge ist $a = dS/da$, $b = dS/d\beta$, $c = dS/d\gamma$. Die Auflösung dieser drei linearen Gleichungen gibt $\alpha = dF/da$, $\beta = dF/db$, $\gamma = dF/dc$, wobei F eine quadratische Function von $a b c$ ist. Führt man dies in (23) ein, so folgt:

$$(27) \begin{cases} a = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{dF}{da} - l \delta^2 \left(l \frac{dF}{da} + m \frac{dF}{db} + n \frac{dF}{dc} \right) \\ b = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{dF}{db} - m \delta^2 \left(l \frac{dF}{da} + m \frac{dF}{db} + n \frac{dF}{dc} \right) \\ c = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{dF}{dc} - n \delta^2 \left(l \frac{dF}{da} + m \frac{dF}{db} + n \frac{dF}{dc} \right). \end{cases}$$

Die Interpretation und nähere Ausführung von (27) ergibt selbstverständlich keine neuen Resultate mehr. Um mit den von Kirchhoff¹⁾ gewählten Bezeichnungen in Uebereinstimmung zu bleiben, benutzen wir folgende Bezeichnungen: $a = a\mathfrak{A}$, $b = b\mathfrak{A}$, $c = c\mathfrak{A}$. Die Function $F(abc)$ mit Argumenten a, b, c heissen wie \mathfrak{F} . Die Gleichung (27) schreibt sich dann:

$$(27_a) \quad \begin{cases} a = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{d\mathfrak{F}}{da} - l\delta^2 \left(l \frac{d\mathfrak{F}}{da} + m \frac{d\mathfrak{F}}{db} + n \frac{d\mathfrak{F}}{dc} \right) \\ b = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{d\mathfrak{F}}{db} - m\delta^2 \left(l \frac{d\mathfrak{F}}{da} + m \frac{d\mathfrak{F}}{db} + n \frac{d\mathfrak{F}}{dc} \right) \\ c = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) \frac{d\mathfrak{F}}{dc} - n\delta^2 \left(l \frac{d\mathfrak{F}}{da} + m \frac{d\mathfrak{F}}{db} + n \frac{d\mathfrak{F}}{dc} \right). \end{cases}$$

Die Componenten der magnetischen Kraft heissen wir $A\alpha e^H$, $A\beta e^H$, $A\gamma e^H$, für die Componenten der von dem Aether herrührenden Kräfte, die früher mit den Buchstaben $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet wurden, schreiben wir ihre Werthe $e^H \cdot dF/da = e^H \cdot \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{F}/da$, etc. Die mit 4π multiplicirte Stromdichtigkeitscomponente u , also nach unserer Bezeichnung $d(ae^H)/\partial t$ oder $\partial/\partial t (a\mathfrak{A} \cdot e^H)$ oder $a\gamma \cdot \mathfrak{A} e^H$ ist die Differenz des nach y genommenen Differentialquotienten der z -Componente der magnetischen Kraft, und des nach z genommenen Differentialquotienten der y -Componente. In Buchstaben gibt dies:

$$(28) \quad \begin{cases} a\mathfrak{A} = \delta(m\gamma - \beta n) A \\ b\mathfrak{A} = \delta(n\alpha - \gamma l) A \\ c\mathfrak{A} = \delta(l\beta - \alpha m) A, \end{cases}$$

und daraus:

$$(29) \quad \begin{cases} A\alpha = \varepsilon(mc - nb)\mathfrak{A} \\ A\beta = \varepsilon(na - lc)\mathfrak{A} \\ A\gamma = \varepsilon(lb - ma)\mathfrak{A} \end{cases} \quad \varepsilon = -\frac{1}{\delta(l^2 + m^2 + n^2)}.$$

VII. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zum Problem der Reflexion und Brechung über und lösen dies in der Form, dass wir die gespiegelten und gebrochenen Componenten der magnetischen Kraft bestimmen. Es ist dann laut (28) leicht, die zugehörigen dielectricischen Verschiebungen zu finden. Die Grenzbedingungen an der Trennungsfläche zweier Medien

1) Kirchhoff, Berl. Ber. 1876. p. 57.

sind in meinem zweiten Aufsätze¹⁾ bereits angegeben worden. Sie lauten: 1) die zur Grenzfläche parallele Componente der magnetischen Kraft geht durch die Discontinuitätsfläche continuirlich hindurch; 2) die Componenten der Vectorpotentiale FGH , also auch jene der electromotorischen Kraft²⁾ in ähnlichem Sinne genommen thun dasselbe. Satz (1) muss bestehen, denn die Negation desselben würde zu flächenförmigen Strömen von endlicher Stärke führen, und solche Ströme sind, da sie zum Ohm'schen Gesetze in keine Beziehung zu bringen sind, der bisherigen Electrodynamik fremd. Satz (2) ist eine Folgerung aus dem Postulate, dass die in einem geschlossenen Stromkreis inducirte Kraft selbst dann durch die Summe der von seinen Linienelementen herstammenden Wirkungen darstellbar ist, wenn der linienförmige Stromkreis durch eine Discontinuitätsfläche der Vectorpotentiale hindurchgeht. Die z -Axe sei zu der ebenen Trennungsfläche senkrecht. Beziehen sich die Summen $\sum_1 \sum_2$ auf alle Wellen, die in der Grenzfläche zusammenkommen, je nachdem sie dem Medium Eins oder Zwei zugehören, so ergibt die Bedingung (1) die Gleichungen:

$$(30) \quad \begin{cases} \sum_1 A\alpha = \sum_2 A\alpha \\ \sum_1 A\beta = \sum_2 A\beta. \end{cases}$$

Die Grenzfläche legen wir so, dass sie kein Molecül trifft, also im Aether allein verläuft. Eine solche Fläche ist für die Fernwirkungen der Molecüle, weil ausserhalb derselben gelegen, keine Discontinuitätsfläche. Es haben daher an dieser die x - und y -Componenten der vom Aether allein herrührenden Wirkung, also a und b , oder $\mathfrak{A} d\mathfrak{F}/da$ und $\mathfrak{A} d\mathfrak{F}/db$ continuirlich zu sein. Nun ist laut (28):

$$(a^2 + b^2 + c^2) \mathfrak{A}^2 = \delta^2 (l^2 + m^2 + n^2) A^2 (a^2 + \beta^2 + \gamma^2);$$

also \mathfrak{A} durch A leicht auszudrücken.

Das Medium sei durchsichtig; dann sind $\alpha, \gamma, \beta, a, b, c, l, m, n$ reelle Richtungscosinuse, somit ist wegen $\delta = -1/V$,

1) Koláček, Wied. Ann. 32. p. 430. 431. 1887.

2) In diesem Aufsätze sind alle electromotorischen Kräfte electrody-namischen Ursprungs.

$\mathfrak{A} = A/V$. (V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit). Die vier Grenzbedingungen lauten dann:

$$(28) \quad \sum_1 A\alpha = \sum_2 A\alpha, \quad \sum_1 A\beta = \sum_2 A\beta.$$

$$(29) \quad \sum_1 \frac{A}{V} \frac{d\mathfrak{F}}{d\alpha} = \sum_2 \frac{A}{V} \frac{d\mathfrak{F}}{d\alpha}, \quad \sum_1 A \frac{d\mathfrak{F}}{db} = \sum_2 \frac{A}{V} \frac{d\mathfrak{F}}{db}.$$

Diese vier Gleichungen sind mit den Gl. (23) und (24) der Kirchhoff'schen Abhandlung identisch. Den Aetherexcursionen dort entsprechen magnetische Kräfte hier; die Richtung $a\beta c$ liegt hier wie dort zur Wellennormale und der Richtung $\alpha\beta\gamma$ senkrecht.

Setzt man in (27_a):

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \delta = -\frac{1}{V}, \quad l \frac{d\mathfrak{F}}{d\alpha} + m \frac{d\mathfrak{F}}{db} + n \frac{d\mathfrak{F}}{dc} = \mu,$$

so gehen sie über in:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{d\alpha} = aV^2 + \mu l, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{db} = bV^2 + \mu m, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dc} = cV^2 + \mu n,$$

und dies sind die Doppelbrechungsgleichungen (13) in Kirchhoff's citirter Arbeit.

In letzter Zeit ist von Hrn. P. Drude¹⁾ eine auf Grund der Voigt'schen Theorie aufgebaute elegante Darstellung des Reflexionsproblems veröffentlicht worden. Diese Theorie ist von vornherein so angelegt, dass sie bezüglich durchsichtiger Medien mit der Kirchhoff'schen Theorie übereinstimmen muss. Infolge dessen ist zu erwarten, dass sie bezüglich der absorbirenden Medien mit unserer Theorie übereinstimmen wird. Und dies ist in der That der Fall.

Wir ersetzen die zweite der Gleichungen (29) durch eine andere. Laut Grenzbedingung (2) gilt:

$$\sum_1 \frac{dF}{d\alpha} = \sum_2 \frac{dF}{d\alpha}, \quad \sum_1 \frac{dF}{db} = \sum_2 \frac{dF}{db}.$$

Nun fordert die Coëxistenz der verschiedenen in der Grenzfläche zusammenkommenden Wellen, dass $l\delta$ und $m\delta$ für alle Partialwellen denselben Werth besitzen. Das gibt:

$$\sum_1 \left(m \frac{dF}{d\alpha} - l \frac{dF}{db} \right) \delta = \sum_2 \left(m \frac{dF}{d\alpha} - l \frac{dF}{db} \right) \delta,$$

oder vermöge Gl. (27):

1) Drude, Wied. Ann. 32. p. 584. 1887.

$$\Sigma_1 \frac{1}{\delta} \left(\frac{ma - lb}{l^2 + m^2 + n^2} \right) = \Sigma_2 \frac{1}{\delta} \left(\frac{ma - lb}{l^2 + m^2 + n^2} \right),$$

oder in unseren neuen Bezeichnungen:

$$\Sigma_1 \frac{1}{\delta} \left(\frac{ma - lb}{l^2 + m^2 + n^2} \right) \mathfrak{H} = \Sigma_2 \frac{1}{\delta} \left(\frac{ma - lb}{l^2 + m^2 + n^2} \right) \mathfrak{H}.$$

Laut (29) gibt dies $\Sigma_1 A\gamma = \Sigma_2 A\gamma$.

Im allgemeinen lässt sich die unbestimmt gebliebene y -Richtung nicht so wählen, dass $m = m_0 + \varepsilon/(\delta\sqrt{-1}m_1)$ der Null gleich sei. Es gelingt dies nur dann, wenn für einen der Strahlen die Extinctionsnormale und die Wellennormale in der Einfallsebene liegen. Wählt man die y -Axe senkrecht zur Einfallsebene, so wird für diese Welle, somit für alle $m = 0$. Unsere vier Gleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 A\alpha &= \Sigma_2 A\alpha & \Sigma_1 A\gamma &= \Sigma_2 A\gamma \\ \Sigma_1 A\beta &= \Sigma_2 A\beta & \Sigma_1 \frac{A}{V} \cdot \frac{d\delta}{d\alpha} &= \Sigma_2 \frac{d\delta}{d\alpha} \frac{A}{V}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun mit Kirchhoff und Hrn. Drude:

$$\begin{aligned} \alpha &= -\cos \vartheta \cos \varphi & \sin \varphi &= \frac{l}{\sqrt{l^2 + n^2}}, & \cos \varphi &= \frac{n}{\sqrt{l^2 + n^2}}. \\ \beta &= \sin \vartheta \\ \gamma &= \cos \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

Für durchsichtige Medien bedeutet φ den Winkel, den die Normale einer Welle mit dem aus Medium 1 in Medium 2 positiv gezählten Einfallslot einschliesst. ϑ ist der Winkel zwischen Schwingungsebene und Einfallsebene, für undurchsichtige Medien sind sie complex.

Geben wir den Winkeln φ ϑ und der Amplitude A Indices, welche die Nummern der Welle bezeichnen, so folgt nach einigen Transformationen:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=4} A_n \cos \vartheta_n \cos \varphi_n &= \sum_{n=1}^{n=4} A_n \cos \vartheta_n \cos \varphi_n \\ \sum_1 A_n \sin \vartheta_n &= \sum_2 A_n \sin \vartheta_n \\ \sum_1 A_n \cos \vartheta_n \sin \varphi_n &= \sum_2 A_n \cos \vartheta_n \sin \varphi_n \\ \sum_1 \frac{A_n}{\sin \varphi_n} [\sin \vartheta_n \cos \varphi_n \alpha_{11} - \alpha_{13} \sin \vartheta_n + \alpha_{12} \cos \vartheta_n] \\ &= \sum_2 \frac{A_n}{\sin \varphi_n} [\sin \vartheta_n \cos \varphi_n \alpha_{11} - \alpha_{13} \sin \vartheta_n + \alpha_{12} \cos \vartheta_n]. \end{aligned} \right.$$

Dabei ist $2\mathfrak{F} = \alpha_{11} \cdot a^2 + \alpha_{22} b^2 + 2\alpha_{12} ab \dots$ gesetzt worden.

Die Winkel q und ϑ bestimmt man aus (27) vermöge der leicht zu bildenden Gleichungen:

$$\frac{dF}{db} \delta^2 (l^2 + n^2) = b,$$

$$\left[\frac{dF}{da} \delta^2 (l^2 + n^2) - a \right] n - \left[\frac{dF}{dc} \delta^2 (l^2 + n^2) - c \right] l = 0.$$

Setzt man $l\delta = 1/h$, so folgt nach einigen Transformationen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{h^2 \sin^2 q_n - \alpha_{22}}{\alpha_{12} \cos q_n - \alpha_{23} \sin q_n} \quad \text{und} \\ [\alpha_{11} - 2\alpha_{13} \operatorname{tg} q_n + (\alpha_{33} - h^2) \operatorname{tg}^2 q_n] [\alpha_{22} + \alpha_{22} - h^2 \operatorname{tg}^2 q_n] \\ - (\alpha_{22} - \alpha_{32} \operatorname{tg}^2 q_n)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 q_n) = 0. \end{array} \right.$$

Diese Formeln (30), (31) stimmen mit den Gleichungen (37), (38), (39) des Hrn. Drude vollkommen überein, und insofern bin ich der weiteren Entwicklungen der Formeln überhoben, nachdem diese von Hrn. Drude (zum Theil früher schon von Hrn. Voigt selbst) durchgeführt worden sind.

Ist das Problem der Reflexion und Brechung soweit gelöst, dass Phasen und Amplituden der reflectirten und gebrochenen magnetischen Wellen bekannt sind, so führt Gleichung (28) zur Kenntniss derselben Grössen für die dielectricischen Verschiebungswellen. Da in Uebereinstimmung mit den Aetherschwingungen der Kirchhoff-Neumann'schen Theorie die magnetischen Schwingungen in der Polarisationsebene gelegen sind, werden die dielectricischen Verschiebungen zu ihr senkrecht stehen. Insofern kann die hier vertretene Theorie auch mit den Fresnel'schen Ansichten in Uebereinstimmung gebracht werden.

Brünn, den 17. März 1888.

VI. *Ueber die Wirkung des Lichtes auf statische Ladungen; von F. Narr in München.*

1. Die eigenthümlichen Wahrnehmungen von Hertz¹⁾ haben mich veranlasst, die Versuche mit einem Condensator, deren Resultate ich erst vor kurzem veröffentlichte²⁾, noch einmal mit der Abänderung aufzunehmen, dass ich seine Platten in geeigneter Weise den Strahlen einer kräftigen Lichtquelle aussetzte. Da in dem Raume, der für meine Versuche sonst die besten Bedingungen bot, die Anwendung von electrischem Licht ausgeschlossen war, so musste ich mich einer Magnesiumlampe bedienen. Die grossen Bedenken, die gegen die Benutzung derselben von vornherein zu sprechen schienen, rechtfertigten sich glücklicherweise nicht; ich hielt es daher für passend, meine Arbeit, soweit es die Wärme- und Feuchtigkeitsverhältnisse der Luft noch gestatteten, noch nach einer gewissen Beziehung hin zu erweitern. Die von mir erhaltenen Resultate sind, welche Deutung man ihnen auch geben mag, in ihrem Hauptpunkte so übereinstimmende, dass ich eine vorläufige Mittheilung über dieselben nicht länger verschieben zu dürfen glaube.

Das Sinuselectrometer, dessen ich mich auch bei der folgenden Untersuchung bediente, und dessen Capacität wieder durch eine passend angefügte grosse Metallkugel beträchtlich verstärkt wurde, war, wie früher, durch zwei mit Quecksilber gefüllte Schellackknäpfchen mittelst eines kleinen Metallbügels in leitende Verbindung mit der einen, der inneren Platte des kreisförmigen Condensators zu bringen, welcher die zweite, die äussere Condensatorplatte in der Luft in einer Entfernung von 2 cm gegenüberstand; diese letztere war für gewöhnlich isolirt, konnte aber in einem jeden Augenblick zur Erde abgeleitet werden. Die hierzu nöthige Bewegung, sowie die Einsenkung des Bügels in das Doppelnäpfchen konnte fast momentan durch geeignete Schnurläufe vom Beobachtungsorte aus direct vorgenommen werden. Die Lampe

1) H. Hertz, Wied. Ann. 31. p. 983. 1887.

2) F. Narr, Wied. Ann. 33. p. 295. 1888.

war behufs der Belichtung der beiden Platten seitwärts so aufgestellt, dass ihr Lichtpunkt in der Mittelebene zwischen den beiden Platten in einer Entfernung von 18 cm von den Rändern derselben sich befand. Um die Verbrennungsproducte der Lampe von den Platten möglichst abzuhalten, waren diese letzteren in einem Dunkelkasten eingeschlossen, der nur gegen die Lampe hin eine genügende Oeffnung besass, hier aber oben noch besonders durch einen hervorragenden Schirm geschützt war; ebenso dienten Schirme dazu, um das Licht der Lampe von den übrigen Theilen der Versuchsanordnung abzuhalten. Andere Vorsichtsmaassregeln traf ich nicht, da ich die Einschaltung von schützenden, aber für die Strahlen der Lampe diathermanen Platten mit Rücksicht auf die Unkenntniss ihres doch immerhin möglichen Einflusses vermeiden zu müssen glaubte. Bei allen meinen folgenden Versuchen übertrug ich dieselbe Electrometerladung auf die Platte, um die Vergleichbarkeit meiner Resultate möglichst zu wahren.

2. Meine ersten Versuche bezogen sich auf den Fall, in dem die äussere Condensatorplatte isolirt blieb. Zwei Minuten nach der Verbindung der inneren Platte mit dem Electrometer wurde die erste Ablesung gemacht, an die sich am Ende der vierten und sechsten Minute zwei weitere Ablesungen anschlossen; einem gewöhnlichen Versuche folgte immer ein Belichtungsversuch, der sich von jenem nur dadurch unterschied, dass ich das Licht der Lampe zwischen der zweiten und dritten Minute eine halbe Minute lang auf die beiden Platten wirken liess. Wie gering der Einfluss dieser schiefen Belichtung war, ergibt sich aus den beiden folgenden Versuchspaaren, die für eine positive Electrometerladung:

bei nicht belichteten Platten

0,5554

0,5486—0,0068

0,5433—0,0053

bei belichteten Platten

0,5539

0,5438—0,0101

0,5350—0,0088

und für eine gleich grosse negative Electrometerladung:

bei nicht belichteten Platten

0,5554

0,5461—0,0093

0,5411—0,0050

bei belichteten Platten

0,5534

0,5458—0,0076

0,5407—0,0051

als Ladungen des Systems am Ende der zweiten, vierten und sechsten Minute mit den beigesetzten Differenzen lieferten.

Bei diesen Versuchen fällt ein möglicherweise vorhandener Einfluss der Belichtung in die Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler; etwas merklicher trat ein solcher hervor, als ich meine bisherigen Versuche in der Weise abänderte, dass ich am Ende der zweiten Minute nach der Verbindung der inneren Platte mit dem Electrometer, also im Augenblicke der ersten Ablesung die äussere Platte mit der Erde in dauernde Verbindung brachte. Bei Doppelversuchen dieser Art erhielt ich bei einer positiven Electrometerladung:

| bei nicht belichteten Platten | bei belichteten Platten |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1° 0,5531 | 1° 0,5566 |
| 0,5188—0,0343 | 0,5150—0,0416 |
| 0,5156—0,0032 | 0,5085—0,0065 |
| 2° 0,5499 | 2° 0,5509 |
| 0,5172—0,0327 | 0,5161—0,0348 |
| 0,5104—0,0068 | 0,5101—0,0057 |

und für eine gleich grosse negative Electrometerladung:

| bei nicht belichteten Platten | bei belichteten Platten |
|-------------------------------|-------------------------|
| 1° 0,5569 | 1° 0,5574 |
| 0,5231—0,0338 | 0,5199—0,0375 |
| 0,5188—0,0043 | 0,5159—0,0040 |
| 2° 0,5491 | 2° 0,5499 |
| 0,5161—0,0330 | 0,5159—0,0340 |
| 0,5101—0,0057 | 0,5085—0,0074 |

als Ladungen des Systems am Ende der zweiten, vierten und sechsten Minute mit den beigesetzten Differenzen.

3. Die zuletzt angeführten Versuche liessen noch nach zwei Beziehungen hin Abänderungen zu, nämlich in der Dauer der Belichtung und in dem Augenblicke ihres Beginnes, die ich ebenfalls in Betracht ziehen wollte. Dass zunächst unter den angegebenen Verhältnissen die Dauer der Belichtung keine wesentliche Aenderung herbeizuführen vermag, lehren die folgenden Doppelversuche, von denen die links stehenden sich auf eine positive, die rechts stehenden sich auf eine gleich grosse negative Electrometerladung beziehen.

| 1° | |
|---------------|---------------|
| 0,5435 | 0,5481 |
| 0,4956—0,0479 | 0,5012—0,0469 |
| 0,4893—0,0063 | 0,4961—0,0051 |
| 2° | |
| 0,5501 | 0,5529 |
| 0,4959—0,0542 | 0,5035—0,0494 |
| 0,4875—0,0084 | 0,4959—0,0076 |

Die angegebenen Zahlen bedeuten die beobachteten Ladungen des Systems (mit den beigesetzten Differenzen) am Ende der zweiten, sechsten und achten Minute, nachdem die innere Platte mit dem Electrometer in Verbindung gesetzt war; die Belichtung, die immer eine halbe Minute nach der ersten Ablesung, also nach der Ableitung der äusseren Platte begann, dauerte bei den Versuchen 1° eine halbe Minute, bei den Versuchen 2° aber zwei Minuten.

Ich habe endlich auch den Einfluss der Belichtung im Augenblicke der Erdverbindung der äusseren Platte dadurch zu erforschen gesucht, dass ich, nachdem ich die erste Ablesung, zwei Minuten nach der Uebertragung der Electrometerladung auf die innere Platte, gemacht hatte, ein und eine halbe Minute später die Belichtung begann, am Ende der vierten Minute die äussere Platte ableitete und endlich eine halbe Minute später die Belichtung schloss; die am Ende der zweiten, sechsten und achten Minute erfolgten Ablesungen ergaben für eine positive Electrometerladung:

0,5471 0,4927—0,0544 0,4849—0,0078

und für eine gleich grosse negative Electrometernadel:

0,5453 0,5032—0,0421 0,4967—0,0065.

Aus allen diesen Beobachtungen zog ich den Schluss, dass eine Belichtung der beiden Platten in der von mir vorgenommenen Art und Weise die Erscheinungen an der geladenen inneren Condensatorplatte nicht wesentlich abändert. Die im allgemeinen etwas grösseren Verluste bei Belichtung liessen sich sehr wohl auf Rechnung der infolge der Erwärmung eintretenden Luftbewegungen und der Verbrennungsproducte der Lampe setzen; der Betrag ihrer Mehrung überstieg nie den Rang der Zerstreuungszahlen.

4. Der Umstand, dass die letztgenannten Störungen, welche der Gebrauch meiner Lampe mit sich brachte, sich als so geringfügig erwiesen, veranlasste mich, eine einzige Thatsache, die alle vorhergehenden Versuche zu bestätigen scheinen, und die darin besteht, dass der Einfluss der Belichtung auf negative Ladungen kleiner ist als auf positive, unter günstigeren Bedingungen näher zu verfolgen. Zu diesem Behufe entfernte ich den Condensator bis auf seine wohl isolirte innere Platte, eine vergoldete Messingplatte, verband diese wie vorher mit einem der Quecksilbernäpfchen, um auf sie beliebige Electrometerladungen übertragen zu können, und stellte ihr direct gegenüber unter den gleichen Schutzmaassregeln die Lampe so auf, dass der Lichtpunkt der letzteren vom Mittelpunkte der ersteren eine Entfernung von 19 cm besass.

Als ich nun wieder zwei Minuten nach der Uebertragung der früheren Electrometerladung die Platte eine halbe Minute belichtete, zeigte sich ein sehr starker Einfluss der Belichtung, nämlich eine ziemlich bedeutende Entladung der Platte, die für eine negative Ladung derselben ungleich schwächer war als für eine positive. So erhielt ich z. B. in einem Satze von Versuchen:

| für eine positive Ladung | | für eine negative Ladung | |
|--------------------------|---------------|--------------------------|---------------|
| 1° | 0,5706 | 1° | 0,5640 |
| | 0,4834—0,0872 | | 0,5043—0,0597 |
| | 0,4793—0,0041 | | 0,4967—0,0076 |
| | 0,4740—0,0053 | | 0,4898—0,0069 |
| 2° | 0,5716 | 2° | 0,5645 |
| | 0,4933—0,0783 | | 0,5096—0,0549 |
| | 0,4855—0,0078 | | 0,4995—0,0101 |
| | 0,4793—0,0062 | | 0,4928—0,0067 |

als Ablesungen am Ende der zweiten, vierten, sechsten und achten Minute nach der Uebertragung der Ladung mit den beigesetzten Differenzen.

Um mich auch über den Einfluss der Entfernung des Lichtpunktes von der Platte zu unterrichten, stellte ich dieselben Versuche bei verschiedenen Werthen derselben an; in dieser Weise erhielt ich:

für eine positive Ladung für eine negative Ladung

bei einer Entfernung des Lichtpunktes von der Platte = 19 cm:

| | |
|---------------|---------------|
| 0,5636 | 0,5564 |
| 0,4749—0,0887 | 0,5001—0,0563 |
| 0,4677—0,0072 | 0,4913—0,0088 |

bei einer Entfernung des Lichtpunktes von der Platte = 22 cm:

| | |
|---------------|---------------|
| 0,5599 | 0,5586 |
| 0,5283—0,0314 | 0,5350—0,0236 |
| 0,5218—0,0067 | 0,5269—0,0081 |

bei einer Entfernung des Lichtpunktes von der Platte = 25 cm:

| | |
|---------------|---------------|
| 0,5665 | 0,5611 |
| 0,5479—0,0186 | 0,5456—0,0155 |
| 0,5389—0,0090 | 0,5363—0,0093 |

als Ablesungen am Ende der zweiten, vierten und sechsten Minute mit den beigesetzten Differenzen. Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass die Wirkung der Strahlen mit wachsender Entfernung des Lichtpunktes von der Platte sehr rasch abnimmt; unter sonst gleichen Verhältnissen ist sie aber auch hier für eine negative Ladung geringer als für eine positive. Dieselbe Regel bewährt sich auch bei grösseren Entfernungen, bei denen ich aber wegen des raschen Sinkens der Verlustzahlen eine Belichtungszeit von einer Minute eintreten und erst vier Minuten nach der ersten Ablesung eine zweite Ablesung folgen liess, um die Belichtung gleichmässig durchführen zu können. So erhielt ich z. B. für eine Entfernung von 38 cm des Lichtpunktes von der Platte:

bei einer positive Ladung

| |
|---------------|
| 0,5628 |
| 0,5435—0,0193 |
| 0,5376—0,0059 |
| 0,5337—0,0039 |

bei einer negativen Ladung

| |
|---------------|
| 0,5566 |
| 0,5417—0,0149 |
| 0,5358—0,0059 |
| 0,5300—0,0058 |

als Ablesungen am Ende der zweiten, sechsten, achten und zehnten Minute nach Uebertragung der Electrometerladung mit den beigesetzten Differenzen.

Auch den Einfluss der Dauer der Belichtung, den ich schon bei den vorhergehenden Versuchen verwerthete, suchte ich in grossen Zügen wenigstens festzustellen, da einer eingehenderen Untersuchung desselben die Natur meiner Lichtquelle nicht günstig war. Da die Zerstreuungszahlen nichts Auffälliges boten, so führe ich hier nur die Ladungsverluste

an, die innerhalb vier Minuten beobachtet wurden, entsprechend einer innerhalb derselben vorgenommenen Belichtung von:

| | | |
|----------------------|--------|--------|
| 5 Secunden | 0,0867 | 0,0294 |
| $\frac{1}{2}$ Minute | 0,0887 | 0,0661 |
| " | 0,3948 | 0,0839 |

wobei sich die erste Verticalreihe auf eine positive, die zweite auf eine negative Ladung bezieht, und die Entfernung des Lichtpunktes von der Platte 19 cm betrug.

Um den auch hier unverkennbar hervortretenden Einfluss der Natur der Ladung der Platte auf die Wirkung des Lichtes noch in einer Form kennen zu lernen, liess ich in zwei aufeinander folgenden Versuchen vom Ende der zweiten Minute nach der Uebertragung der Electrometerladung an, nachdem ich das Vorhandensein der üblichen Ladung des Systems in diesem Augenblicke constatirt hatte, fünf Minuten lang das Licht auf die geladene Platte wirken; die Schlussablesung ergab bei einer positiven Ladung 0,3238, bei einer negativen Ladung 0,3684: die stetige Beobachtung des Vorganges machte mir den Eindruck, als ob die Einwirkung des Lichtes beständig geringer würde.

5. Ich bin mir viel zu lebhaft der Unvollkommenheit und Unvollständigkeit der mitgetheilten Ergebnisse bewusst, als dass ich schon jetzt eine Erklärung derselben versuchen könnte. Aus demselben Grunde will ich auch sowohl den Widerspruch, in dem sie mit den Resultaten von Hallwachs¹⁾ zu stehen scheinen, als auch den Zusammenhang, in den man sie mit den Resultaten von Köch²⁾ bringen könnte, zunächst nicht näher berühren. Indem ich aber in dieser Weise die allgemeine Discussion meiner Ergebnisse erst nach der erneuten Durcharbeitung derselben vorzunehmen gedenke, möchte ich doch jetzt schon mit einigen Worten auf eine Ursache eingehen, die man der Erklärung der von mir constatirten Hauptthatsache zu Grunde legen könnte.

Gegen die Annahme, der von mir beobachtete Ladungsverlust der Platte durch die Belichtung rühre von den Ver-

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. 33. p. 301. 1888.

2) K. R. Koch, Wied. Ann. 33. p. 454. 1888.

brennungsproducten der Lampe her, sprechen zunächst einmal meine Versuche mit schräger Belichtung der beiden Platten. Dagegen könnte man den Einwand erheben, dass bei meinen Versuchen mit der einen Platte die Anzahl der Angriffspunkte, was ich gerne zugebe, beträchtlich vergrößert sei. Aber auch dieser Einwand verliert sehr an Gewicht, wenn man die bei meinen Versuchen angegebenen Zerstreuungszahlen betrachtet. Wie wenig dieselben in der That durch die vorhergehende Belichtung beeinflusst worden sind, will ich näher noch an einem ausgezeichneten Beispiele zeigen. Als ich in einer Entfernung des Lichtpunktes von der Platte = 19 cm die beiden in 4. zuletzt angegebenen, je fünf Minuten lang währenden Belichtungsversuche durchführte, die jedenfalls mehr Verbrennungsproducte in die Luft brachten, als ein jeder andere Versuch, stellte ich kurz vor ihrem Beginne und kurz nach ihrer Beendigung zwei unbelichtete Versuche mit der Platte an und erhielt als Ablesungen am Ende der zweiten, vierten und sechsten Minute:

| | |
|---------------|---------------|
| 0,5640 | 0,5591 |
| 0,5552—0,0088 | 0,5516—0,0075 |
| 0,5491—0,0061 | 0,5471—0,0045 |

Die hier angegebenen Zerstreuungszahlen lassen auch nicht den leisesten Einfluss des langen Belichtungsprocesses erkennen.

VII. Bemerkungen zu den Phasenänderungen des von durchsichtigen Körpern in der Nähe des Polarisationswinkels partiell reflectirten Lichtes; von Paul Volkmann.

Die Entdeckung der elliptischen Polarisation des von durchsichtigen Körpern in der Nähe des Polarisationswinkels reflectirten Lichtes durch Jamin¹⁾, sowie der schöne experimentelle Nachweis, dass es an isotropen Medien wesentlich

1) Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3). 29. p. 263. 1850; 30. p. 257. 1850; 31. p. 165. 1851.

die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente des reflectirten Lichtes ist, welche mit einer Phasenänderung behaftet ist, durch Wernicke¹⁾ haben über die in der theoretischen Optik insbesondere durch F. E. Neumann, Mac Cullagh und G. Kirchhoff eingeführten Grenzbedingungen und die daraus abgeleiteten Amplitudengesetze theilweise zu Bemerkungen Veranlassung gegeben, welche mir den tatsächlichen Verhältnissen nicht zu entsprechen scheinen.

Diese Amplitudengesetze müssen noch immer als eine ausserordentlich starke Annäherung an die Wirklichkeit aufgefasst werden und enthalten, worauf man bisher keinen zu grossen Werth gelegt zu haben scheint, gleichfalls bis zu einem angenäherten Grade die beobachtete Phasenänderung einer halben Wellenlänge für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente des reflectirten Lichtes.

Diese Amplitudengesetze werden von der experimentellen Forschung gegenwärtig um so weniger entbehrt werden können, als dieselben für jeden Versuch einer allgemeinen Ausdehnung der Jamin'schen Beobachtungen auf die Reflexion an optisch anisotropen und circularpolarisirenden Medien geeignet erscheinen, Gesichtspunkte zu liefern, welche bei so verwickelten Verhältnissen, wie sie dann in Betracht kommen, nicht unwillkommen sein dürften.

Wenn ich mir im Folgenden diese Gesichtspunkte auseinander zu setzen erlaube, verhehle ich mir dabei die Schwierigkeit nicht, dass dieselben in vielen Fällen eine experimentelle Anordnung vorschreiben, welche sich mit den bisher bekannten Beobachtungsmethoden nicht ganz vertragen wird. Vorausgesetzt sind vollkommen reine Oberflächen, in deren Herstellung die Technik ja einige Fortschritte erreicht zu haben scheint, jedenfalls werden Controlbeobachtungen über die unveränderte Reinheit der Oberfläche unerlässlich bleiben.

Ich beginne mit der Reflexion an optisch isotropen Mitteln:

Fällt unter dem Einfallswinkel i_1 bei einem Polarisations-

1) W. Wernicke, Wied. Ann. 25. p. 203. 1885; 30. p. 452. 1887.

azimut Θ gegen die Einfallsebene linear polarisirtes Licht mit der Amplitude τ in einem isotropen Medium auf die Oberfläche eines zweiten isotropen Mediums, so liefert die Reflexionstheorie¹⁾ von Fresnel und Neumann für die parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componenten der reflectirten Welle die bekannten Ausdrücke:

$$\tau_1 \cos \Theta_1 = \pm \tau \cos \Theta \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)}, \quad \tau_1 \sin \Theta_1 = \mp \tau \sin \Theta \frac{\operatorname{tg}(i_1 - i_2)}{\operatorname{tg}(i_1 + i_2)}.$$

Hierin ist τ_1 die Amplitude, Θ_1 das Polarisationsazimut der reflectirten Welle, i_2 der Brechungswinkel. Die Vorzeichen bleiben unbestimmt, ohne sich, natürlich einmal festgesetzt, für die Reflexion an einer und derselben Oberfläche zu ändern. Es gehören die beiden oberen oder die beiden unteren Zeichen zusammen, wenn die reflectirte Welle als gerade Fortsetzung der einfallenden Welle gedacht wird.²⁾

Die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente der reflectirten Welle liefert beim Durchgang durch den nach dem Brewster'schen Gesetze $i_1 + i_2 = \pi/2$ gegebenen Polarisationswinkel einen Vorzeichenwechsel der Amplitude, welcher sich in der Beobachtung als eine Phasenänderung von $\lambda/2$ darstellen muss. Diese Auffassung findet auch darin eine Bestätigung, dass, wenn wir von vornherein in die analytischen Ausdrücke für die reflectirte Welle eine Phasenänderung einführen, dieselbe sich zu 0 oder $\lambda/2$ bestimmt, nur unter dem Polarisationswinkel für die Componente senkrecht zur Einfallsebene unbestimmt bleibt.

Die Reflexionstheorie befindet sich also mit der Beobachtung darin in Uebereinstimmung, dass die parallel zur Einfallsebene polarisirte Componente von jeder Phasenänderung frei³⁾ ist, dass allein die senkrecht zur Einfallsebene

1) Wir brauchen nicht zwischen Fresnel und Neumann zu unterscheiden; der vorliegende Gegenstand ist gänzlich ungeeignet, zwischen beiden Anschauungen eine Entscheidung herbeizuführen. Wernicke scheint hierin anderer Meinung zu sein. Ich bediene mich der Anschauung Neumann's.

2) In ähnlicher Weise verfügt L. Lorenz, Pogg. Ann. 118. p. 116. 1863, in entgegengesetzter Weise Neumann in seinen Vorlesungen. Ein principieller Unterschied liegt hierin nicht.

3) Zu demselben Resultat kommt im wesentlichen auch Lorenz

polarisirte Componente mit einer solchen, und zwar beim Durchgang durch den Polarisationswinkel in der gesammten Grösse von $\lambda/2$ behaftet ist.

Die Abweichung besteht darin, dass diese Phasenänderung, abgesehen von wenigen Substanzen (Alaun, Menilit), sich nicht plötzlich, sondern allmählich, allerdings immer noch in der Nähe des Polarisationswinkels und unter diesem selbst mit besonderer Stärke vollzieht, dass weiter die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente nach den Beobachtungen von Jamin und Wernicke auch unter dem Polarisationswinkel nie ganz verschwindet.

Ich definire daher im Anschluss an das Beobachtungsmaterial, aber auch in Anlehnung an die theoretisch vorliegende erste starke Näherung: Polarisationswinkel als den Winkel, unter dem natürliches Licht einfallen muss, damit das reflectirte Licht ein Maximum von Polarisation aufweist, und lasse es zunächst dahingestellt, ob der Polarisationswinkel auch als der Winkel definirt werden könnte, unter dem sich für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente ein Maximum von Phasenänderung vollzieht (die Phasenänderung vielleicht den Werth $\lambda/4$ erreicht hat).

Ich gehe zur Reflexion an optisch anisotropen Mitteln über:

Für solche ist die Theorie von F. E. Neumann¹⁾ und Mac Cullagh²⁾ ausgearbeitet worden. Ich bediene mich der zu dem vorliegenden Zweck besonders bequemen Terminologie von Mac Cullagh. Bei gegebenem Einfallswinkel i , gibt es für die einfallende und reflectirte Welle zusammengehörige Polarisationsazimute, welche nur eine gebrochene Welle zur Folge haben, die uniradialen Azimute. Man

unter der Annahme einer allmählichen Uebergangsschicht (Pogg. Ann. 111. p. 460. 1860), eine Annahme, welche für den Zweck der vorliegenden Notiz einzuführen nicht nothwendig erscheint, so berechtigt dieselbe jedenfalls sonst ist.

1) F. E. Neumann, Abhandl. der Berliner Academie aus dem Jahre 1835.

2) Mac Cullagh, Coll. Works p. 145. 1880.

kann so von dem uniradialen Azimut der einfallenden Welle sprechen, welches der ordinären, und welches der extraordinären, gebrochenen Welle zugehört. Fällt Licht unter einem beliebigen Azimut polarisirt auf, so zerlegt man dasselbe in Componenten nach den uniradialen einfallenden Azimuten, um für die reflectirte Welle die beiden Componenten nach den uniradial reflectirten Azimuten wieder zusammenzusetzen.

Bezeichnen wir mit r_1 die Amplituden der uniradialen Componenten der einfallenden und reflectirten Welle, mit θ_1 die Polarisationsazimute derselben gegen die Einfallsebene, mit r_2 die Amplitude, mit θ_2 das Polarisationsazimut der zugehörenden einen gebrochenen Welle, endlich mit i_2 den Brechungswinkel und mit ε den Winkel, welchen der zur gebrochenen Welle zugehörende Strahl mit der Wellennormale bildet, dann bestehen die Beziehungen¹⁾:

$$\begin{aligned} (r \cos \theta \pm r_1 \cos \theta_1) \cos i_1 &= r_2 \cos \theta_2 \cos i_2, \\ (r \cos \theta \mp r_1 \cos \theta_1) \sin i_1 &= r_2 \cos \theta_2 \sin i_2, \\ r \sin \theta \pm r_1 \sin \theta_1 &= r_2 \sin \theta_2, \\ (r \sin \theta \mp r_1 \sin \theta_1) \cos i_1 \sin i_1 &= r_2 (\sin \theta_2 \cos i_2 \sin i_2 + \sin^2 i_2 \operatorname{tg} \varepsilon) \end{aligned}$$

oder in Bezug auf die reflectirte Amplitude aufgelöst:

$$\begin{aligned} r_1 \cos \theta_1 &= \pm r \cos \theta \frac{\sin (i_1 - i_2)}{\sin (i_1 + i_2)} = \pm r_2 \cos \theta_2 \frac{\sin (i_1 - i_2)}{\sin 2 i_1}, \\ r_1 \sin \theta_1 &= \mp r \sin \theta \frac{\sin (i_1 - i_2) \cos (i_1 + i_2) - \sin^2 i_2 \operatorname{tg} \varepsilon / \sin \theta_2}{\cos (i_1 - i_2) \sin (i_1 + i_2) + \sin^2 i_2 \operatorname{tg} \varepsilon / \sin \theta_2} \\ &= \mp r_2 \sin \theta_2 \left[\frac{\sin (i_1 - i_2) \cos (i_1 + i_2)}{\sin 2 i_1} - \frac{\sin^2 i_2 \operatorname{tg} \varepsilon / \sin \theta_2}{\sin 2 i_1} \right]. \end{aligned}$$

Wir erkennen:

Die senkrecht zur Einfallsebene zerlegte Componente jeder einzelnen uniradialen Schwingung der reflectirten Welle liefert beim Durchgang durch einen gewissen Einfallswinkel einen Vorzeichenwechsel der Amplitude, welcher sich in der Beobachtung als eine Phasenänderung von $\lambda/2$ darstellen wird. Dieser Winkel ist gegeben durch die Beziehung:

$$(1) \quad \sin (i_1 - i_2) \cos (i_1 + i_2) - \sin^2 i_2 \operatorname{tg} \varepsilon / \sin \theta_2 = 0.$$

Insofern es zwei uniradiale Azimute der reflectirten Welle im allgemeinen gibt, werden daher zwei verschiedene

1) Mac Cullagh, Coll. Works p. 182. 1880.

Einfallswinkel existiren, für welche theoretisch eine Phasenänderung von $\lambda/2$ gefolgert werden kann.

Davon zu unterscheiden ist der Polarisationswinkel, welcher im Neumann'schen Sinne als der Einfallswinkel zu definiren ist, für den die beiden uniradienalen Azimute der reflectirten Welle zusammenfallen, nämlich:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{tg } \Theta_2 \cos(i_1 + i_2) - \frac{\sin^2 i_2}{\sin(i_1 - i_2)} \text{tg } \varepsilon / \cos \Theta_2 \\ = \text{tg } \Theta_2' \cos(i_1 + i_2') - \frac{\sin^2 i_2'}{\sin(i_1 - i_2')} \text{tg } \varepsilon' / \cos \Theta_2', \end{cases}$$

worin mit einem oberen Index die Grössen verstanden sind, welche sich auf die zweite gebrochene Welle beziehen.

Noch mag hervorgehoben werden, dass im Falle senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht auf eine anisotrope Fläche fällt — abgesehen von ganz speciellen Fällen — für die reflectirte Welle entsprechend den beiden uniradienalen Schwingungen zwei Componenten senkrecht zur Einfallsebene existiren, welche unabhängig voneinander ihre Phasendifferenz aufweisen, und welche sich unter keinem Einfallswinkel zur Intensität 0 superponiren. In dieser Superposition der beiden Componenten wird für die Beobachtung die hauptsächlichste Schwierigkeit bestehen, die im Folgenden entwickelten Gesichtspunkte zu prüfen.

Nachdem die Beobachtungen von Jamin und Wernicke an isotropen Mitteln vorliegen, darf man wohl mit ziemlicher Sicherheit unter Anlehnung an die Theorie sagen, dass sich das Beobachtungsmaterial an anisotropen Körpern in folgender Weise gestalten wird, vorausgesetzt, dass es gelingt, die rein experimentellen Schwierigkeiten zu überwinden:

Die Beobachtung dürfte in Uebereinstimmung mit der Theorie den Nachweis führen, dass im wesentlichen alle parallel zur Einfallsebene polarisirten Componenten der reflectirten Welle von jeder Phasenänderung frei sind, dass nur die senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componenten, und zwar zweimal im allgemeinen theilweise, nur bei uniradienalen Azimuten vollständig in der Gesamtgrösse von $\lambda/2$ damit behaftet sein können. Die Beobachtung wird ebenso in Abweichung von der Theorie wohl ergeben, dass diese

Phasenänderung bei den meisten Substanzen sich nicht plötzlich, sondern allmählich, allerdings in der Nähe der durch die Gleichung (1) definirten Einfallswinkel und unter diesen selbst mit besonderer Stärke vollzieht, dass weiter auch unter diesem Winkel die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Componente jeder einzelnen zugehörigen uniradial reflectirten Schwingung nicht ganz verschwindet.

In Anlehnung an die theoretisch vorliegende erste starke Näherung werden wir nach (2) definiren: Polarisationswinkel als den Winkel, unter dem natürliches Licht auffallen muss, damit das reflectirte Licht ein Maximum von Polarisation aufweist.

Von dem so definirten Polarisationswinkel zu unterscheiden sind die durch (1) gegebenen Winkel, unter denen sich für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Componenten der einzelnen zugehörigen uniradial reflectirten Schwingungen ein Maximum von Phasenänderung vollzieht (die Phasenänderung vielleicht den Werth $\lambda/4$ erreicht).

Indem diese Winkel mit dem Polarisationswinkel im allgemeinen nicht zusammenfallen, dürfte die Beobachtung ergeben, dass der Grad von erreichbarer Polarisation in diesen allgemeinen Fällen durch Reflexion unter dem Polarisationswinkel an anisotropen Medien ein höherer ist, als durch Reflexion an isotropen Flächen.

Zur experimentellen Prüfung der im Vorhergehenden entwickelten Gesichtspunkte werden anisotrope Mittel um so geeigneter sein, eine je stärkere Doppelbrechung dieselben aufweisen. Insofern die Doppelbrechung bei den durch die Natur uns gegebenen Medien niemals eine grosse ist, werden die durch die Gleichungen (1) und (2) definirten Einfallswinkel niemals sehr weit auseinander fallen, die zu erwartenden Erscheinungen sich also stets in der Nachbarschaft des Polarisationswinkels abspielen.

Am geeignetsten für die Beobachtung erscheint Kalkspath. In den speciellen Fällen, für welche allein bisher einige Beobachtungen von Jamin vorliegen, in denen die optische Axe in der Einfallsebene oder senkrecht dazu liegt, wird allerdings ein guter Theil der oben charakterisirten

Merkmale verloren gehen. In dem ersten Falle wird eine Phasenänderung der verticalen Componente zu erwarten sein nur für die uniradiale Schwingung, welche der extraordinären Welle zugehört, in dem zweiten Falle nur für die uniradiale Schwingung, welche der ordinären Welle zugehört. In beiden Fällen rückt der Polarisationswinkel mit dem Winkel zusammen, für welchen ein Maximum von Phasenänderung sich voraussehen lässt.

Zur Herstellung der oben charakterisirten Polarisationserscheinungen, welche das an der Oberfläche anisotroper Mittel in der Nähe des Polarisationswinkels reflectirte Licht darbietet, werden vielleicht mittlere Lagen am geeignetsten sein.

Ich habe für eine künstlich angeschliffene Kalkspathfläche, deren optische Axe unter $+45^\circ$ gegen die Einfallsebene geneigt in der Oberfläche selbst liegt, nach den bekannten Formeln von F. E. Neumann die Rechnung für die Natriumlinie D (die Hauptbrechungsexponenten sind nach Rudberg $1/a = 1,65850$, $1/c = 1,48635$) durchgeführt und theile die Resultate mit:

Der Polarisationswinkel bestimmt sich zu $56^\circ 20'$, die zugehörigen Brechungswinkel und Polarisationsazimute der ordinär und extraordinär gebrochenen Welle sind:

$$\begin{array}{ll} i_2 = 30^\circ 7,3', & \theta_2 = 49^\circ 8,5', \\ i_2' = 33^\circ 28,3', & \theta_2' = -39^\circ 50,1'. \end{array}$$

Die zugehörenden uniradialen Azimute der einfallenden Welle berechnen sich zu:

$$\theta = 46^\circ 3,2', \quad \theta' = -38^\circ 34,4';$$

die zugehörenden uniradialen Azimute der reflectirten Welle, welche für den Polarisationswinkel zusammenfallen:

$$\theta_1 = \theta_1' = 4^\circ 5,3'.$$

Die Einfallswinkel, in deren Nachbarschaft die vertical zur Einfallsebene genommenen Componenten für eine einzelne uniradiale Schwingung der reflectirten Welle voraussichtlich ein Maximum von Phasenänderung aufweisen werden, berechnen sich zu:

$$i_1 = 58^\circ 54,7', \quad i_1' = 53^\circ 4,6'.$$

Dazu gehören die Brechungswinkel:

$$i_2 = 31^\circ 5,3', \quad i_2' = 32^\circ 1,8'$$

die Polarisationsazimute der gebrochenen Welle:

$$\Theta_2 = 49^\circ 25,4', \quad \Theta_2' = -40^\circ 17,4',$$

die uniradialen Azimute der einfallenden Welle:

$$\Theta = 45^\circ 55,3', \quad \Theta' = -39^\circ 15,5',$$

die uniradialen Azimute der reflectirten Welle Θ_1 Θ_1' sind, wie das der ganzen Rechnung zu Grunde liegt, in beiden Fällen 0° .

Die beiden Einfallswinkel, unter denen sich ein Maximum von Phasenänderung vollziehen soll, liegen in dem durchgerechneten Beispiel um $5^\circ 50'$ auseinander, eine Differenz, deren Grösse hoffen lässt, auch in Beobachtungen merkliche Spuren zu zeigen; allerdings sind die zugehörigen uniradialen Azimute der einfallenden Welle für die Jamin'sche Beobachtungsmethode nicht eben günstig.

Ich behandle endlich die Reflexion an circularpolarisirenden Mitteln. Ich werde für solche in diesen Annalen im Anschluss an die darauf bezüglichen Arbeiten von Mac Cullagh die Differentialgleichungen der Lichtbewegung und die Grenzbedingungen demnächst mittheilen.

Ich beginne zunächst mit optisch isotropen circularpolarisirenden Mitteln. Lassen wir unter dem Einfallswinkel i_1 und dem Azimut Θ linearpolarisirtes Licht mit der Amplitude r auf ein solches Mittel fallen, so folgen aus der Rechnung für die reflectirte Lichtbewegung die Gleichungen:

$$Nr_1 \cos \Theta_1 \cos \delta_1 = \pm r \cos \Theta. A,$$

$$Nr_1 \cos \Theta_1 \sin \delta_1 = \mp r \sin \Theta. B,$$

$$Nr_1 \sin \Theta_1 \cos \delta_1' = \pm r \sin \Theta. C,$$

$$Nr_1 \sin \Theta_1 \sin \delta_1' = \pm r \cos \Theta. D.$$

Hierin bedeuten:

$$N = (\cos(i_1 - i_2) + \cos(i_1 - i_2')) \sin(i_1 + i_2) \sin(i_1 + i_2'),$$

$$A = \sin(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2) \sin(i_1 - i_2')$$

$$+ \sin(i_1 + i_2') \cos(i_1 - i_2') \sin(i_1 - i_2),$$

$$B = \sin 2i_1 \sin(i_2 - i_2'),$$

$$C = \sin(i_1 - i_2) \cos(i_1 + i_2) \sin(i_1 + i_2')$$

$$+ \sin(i_1 - i_2') \cos(i_1 + i_2') \sin(i_1 + i_2),$$

$$D = \frac{1}{2} \sin 2i_1 (\sin 2i_2 - \sin 2i_2');$$

$\tau_1 \cos \theta_1$ und $\tau_1 \sin \theta$ die Componenten der reflectirten Amplitude parallel und senkrecht zur Einfallsebene, $\delta_1 \delta_1'$ die zugehörigen Phasenänderungen; i_2 und i_2' die nur sehr wenig sich unterscheidenden Brechungswinkel. Diese Relationen befinden sich mit den auf anderem Wege von W. Voigt¹⁾ abgeleiteten Ausdrücken in vollständiger Uebereinstimmung.

Indem hier die Phasenänderungen von vornherein analytisch eingeführt sind, werden wir auch hier direct durch dieselben die Näherung an die Beobachtungen erwarten dürfen, welche wir früher durch Deutung des Vorzeichenwechsels der verticalen Amplitudencomponente erhielten.

Wir erhalten zunächst das bemerkenswerthe Resultat, dass die Grösse der Phasenänderung ganz allgemein von dem Polarisationsazimut der einfallenden Welle abzuhängen scheint. Berücksichtigen wir aber, dass die Doppelbrechung an circularpolarisirenden Medien nur eine sehr geringe ist, dass also $i_2' - i_2 = \varepsilon$ nur eine sehr kleine Grösse darstellt, so bemerken wir, dass für die parallel zur Einfallsebene reflectirte Componente die Phasenänderung nur für ein Polarisationsazimut der einfallenden Welle in der Nähe von $\theta = \pm \pi/2$ der Beobachtung zugängliche Werthe annehmen könnte, wenn nicht zugleich die Amplitudencomponente parallel zur Einfallsebene ausserordentlich schwach würde. Für die senkrecht zur Einfallsebene reflectirte Componente können wir analoge Bemerkungen für ein Polarisationsazimut der einfallenden Welle in der Nähe von $\theta = \pm 0$ machen. Es ist zweifelhaft, ob für diese Phasenänderungen die Beobachtung Andeutungen geben kann.

Dagegen lassen unsere Formeln für die senkrecht zur Einfallsebene reflectirte Componente eine auch durch die Beobachtung wahrnehmbare Phasenänderung in der Nähe des durch $i_1 + i_2 = \frac{1}{2}\pi$ definirten Einfallswinkels erwarten. Setzen wir:

1) W. Voigt, Wied. Ann. 21. p. 532. 1884.

$$i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} + A, \quad \text{also:} \quad i_1 + i_2' = \frac{\pi}{2} + A + \varepsilon,$$

wo auch A eine kleine Grösse sei, so werden:

$$C = -(\varepsilon + 2A) \sin(i_1 - i_2), \quad N = 2 \cos(i_1 - i_2),$$

$$D = +\frac{\varepsilon}{2} \sin 2(i_1 - i_2),$$

$$\operatorname{tg} \delta_1' = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2A} \cos \Theta \cos(i_1 - i_2).$$

Je nachdem das isotrope circularpolarisirende Medium ein rechts- oder linksdrehendes ist, gibt dieser Ausdruck die erreichte Phasenänderung $\frac{1}{2}\lambda$ an für den durch die Gleichung $A = -$ oder $+\frac{1}{2}\varepsilon$ definirten Einfallswinkel, ein Unterschied zwischen rechts und linksdrehenden Medien, welcher bei der Kleinheit von ε der Beobachtung entgehen wird. Dagegen dürfte sich in dem Sinne der Phasenänderung ein Einfluss von rechts- und linksdrehenden Medien wohl nachweisen lassen, und die Grösse der Phasenänderung als abhängig von der Grösse und dem Vorzeichen der Einfallsazimutes Θ ergeben; allerdings wird man bei der Jamin'schen Beobachtungsweise in der Wahl des Einfallsazimutes an ein beschränktes Intervall gebunden sein.

Wir definiren auch hier Polarisationswinkel als den Winkel, unter dem natürliches Licht auffallen muss, damit das reflectirte Licht ein Maximum von Polarisation aufweist. Es wird der Winkel sein, für den das Hauptpolarisationsazimut der reflectirten Welle Θ_1 von dem Azimut der einfallenden Welle unabhängig wird. Der allgemeine Ausdruck:

$$\operatorname{tg}^2 \Theta_1 = \frac{C^2 \sin^2 \Theta + D^2 \cos^2 \Theta}{B^2 \sin^2 \Theta + A^2 \cos^2 \Theta}$$

wird von Θ unabhängig, wenn:

$$A^2 C^2 - B^2 D^2 = 0.$$

Thatsächlich fällt auch dieser so definirte Polarisationswinkel nicht mit dem Einfallswinkel zusammen, für welchen die verticale Amplitudencomponente ein Maximum von Phasenänderung ergibt. Der Beobachtung wird aber der Unterschied dieser beiden Winkel völlig entgehen, fallen dieselben doch schon nach der ersten Annäherung in den durch $A = -\frac{1}{2}\varepsilon$ definirten Einfallswinkel zusammen, welchen die

Beobachtung schwerlich von dem durch $i_1 + i_2 = \frac{1}{2}\pi$ definirten wird trennen können. Ebenso wird die geringe Abweichung, unter der beim Polarisationswinkel das Polarisationshauptazimut gegen die Einfallsebene geneigt ist — und zwar in entgegengesetztem Sinne bei rechts- und linksdrehenden Medien — der Beobachtung entgehen.

Ich schliesse mit einigen Bemerkungen über die Phasenänderungen bei der Reflexion an optisch anisotropen circularpolarisirenden Mitteln. Ein besonderes Interesse gewährt der Fall, in dem für Incidenzen in der Nähe des Polarisationswinkels die beiden gebrochenen Wellennormalen in die Nähe der optischen Axe fallen.

Die Rechnung zeigt, dass die Verhältnisse dann doch ungleich verwickelter werden, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Der Unterschied zwischen circularpolarisirenden isotropen und anisotropen Mitteln ist in der Polarisation der letzteren begründet, und so tritt dann hier sofort die Frage nach der Existenz uniradialer Azimute für die einfallende und reflectirte Welle in den Vordergrund.

Eine vorläufig angestellte Untersuchung scheint die Möglichkeit zu zeigen, dass zur Feststellung eines unterscheidenden Einflusses von rechts- und linksdrehendem Bergkrystall auf die Phasenänderung des reflectirten Lichtes in beiden Fällen eine ganz genaue Kenntniss der Lage der optischen Axe gegen die spiegelnde Grenzfläche nothwendig werden kann, insbesondere ob von dem Einfallslot gerechnet die optische Axe diesseits oder jenseits der gebrochenen Wellennormalen liegt.

Ich werde auf eine diesbezügliche genaue theoretische Untersuchung in einer späteren Arbeit zurückkommen. In dieser Note halte ich eine solche für um so weniger nothwendig, als den Folgerungen gegenüber, welche K. Schmidt¹⁾ aus seinen Beobachtungen gezogen hat, abgesehen von meinen Andeutungen noch immer der Einwand von W. Voigt²⁾, die Reinheit der Oberfläche betreffend, besteht.

1) K. Schmidt, Wied. Ann. 29. p. 451. 1886.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 30. p. 190. 1887.

Wenn es mir durch vorstehende Bemerkungen gelungen sein sollte, zu weiteren experimentellen Untersuchungen der Phasenänderung bei partieller Reflexion an durchsichtigen, insbesondere an anisotropen Mitteln nach obigen Gesichtspunkten womöglich unter Anwendung verschiedener Methoden anzuregen, so würde ich den Zweck dieser Note vollkommen erfüllt sehen, auch wenn die Beobachtung (an absolut reinen Flächen) zu Abweichungen führen sollte. Nach der Jamin'schen Methode hat eine einschlägige Arbeit Hr. Dr. K. Schmidt in unserem mathematisch-physikalischen Laboratorium in Aussicht genommen.

Königsberg i. Pr., 12. April 1888.

Nachtrag. Ich verdanke Hrn. Geh. Rath v. Helmholtz die Kenntniss einer nach Abschluss meiner Arbeit erschienenen Dissertation von R. Ritter „Ueber die Reflexion des Lichtes an parallel zur optischen Axe geschliffenem Quarz“. Der Verfasser beschränkt sich auf die Untersuchung der beiden Fälle, in denen die optische Axe parallel und senkrecht zur Einfallsebene steht. Die Resultate befinden sich in vollständiger Uebereinstimmung mit den von mir in vorstehender Arbeit theoretisch entwickelten Folgerungen.

Königsberg i. Pr., 26. Mai 1888.

VIII. *Ueber die Electrisirung von Metallplatten durch Bestrahlung mit electrischem Licht; von Wilhelm Hallwachs.¹⁾*

Am Schlusse einer vor Kurzem veröffentlichten Arbeit²⁾ hatte ich erwähnt, dass sich, nach Vorversuchen zu urtheilen, Metallplatten bei der Bestrahlung mit electrischem Licht electrostatisch laden. Dass es sich dabei nicht um Ladungen auf Potentiale, welche mit dem Goldblattelectroskop zu er-

1) Aus den Gött. Nachr. mitgetheilt vom Verfasser.

2) W. Hallwachs, Wied. Ann. 33. p. 301. 1888.

kennen sind, handeln konnte, zeigte sich gleich anfangs. Um auch einen entscheidenden Aufschluss darüber zu erhalten, ob nicht wenigstens eine mit empfindlicheren Electrometern erkennbare Ladung stattfände, wurden die endgültigen Versuche folgendermassen angeordnet. Die zu beleuchtende, kreisförmige Metallplatte von 8 cm Durchmesser hing an einem isolirten Draht im Inneren eines cylindrischen, mit der Axe horizontal liegenden Gefässes aus Eisenblech von 50 cm Länge und 37 cm Durchmesser. Das Eisenblech besass eine alte, mit etwas Rost bedeckte Oberfläche und stand an einer blank geputzten Stelle mit einer Erdleitung in metallischer Verbindung. Der Aufhängedraht der Platte führte durch zur Erde abgeleitete Messingröhren isolirt hindurch zu einem Hankel'schen Electrometer, das seiner geringen Capacität wegen für diese Versuche gewählt wurde. In dem Deckel des Eisenblechcylinders befand sich eine kreisförmige Oeffnung von etwa 8 cm Durchmesser, welche die Strahlen der Bogenlampe zu der im Inneren hängenden Platte hindurchliess. Diese Oeffnung bedeckte ein Stück Messingdrahtnetz, um eine merkliche Influenz der Lampe auf die zu beleuchtende Platte zu verhindern, ohne die Wirkung der Lichtstrahlen auf dieselbe auszuschliessen. Das letztere Verhalten war nach früheren Versuchen¹⁾ zu erwarten und bestätigte sich auch für die hier in Rede stehende Erscheinung. Der Lichtbogen hatte einen Abstand von 45 cm von der Platte, die von ihm kommenden Strahlen gingen vor ihrem Eintritt in die Blechhülle durch ein Diaphragma von 6 cm Durchmesser.

Die Hülle war aus verrostetem Eisenblech hergestellt, damit ihr Contactpotential gegen die einzuhängenden Metallplatten immer negativ wäre. Nur in diesem Falle konnten die Potentialerhöhungen, welche das Electrometer angab, eindeutig erklärt werden. Denn wäre die Platte gegen die Hülle negativ gewesen, so würde eine Potentialerhöhung auch wegen der Fortführung der negativen Electricität durch die Beleuchtung²⁾ eingetreten sein. War die Platte aber positiv gegen

1) W. Hallwachs, l. c. p. 305.

2) Siehe die citirte Abhandlung.

die sie ganz umschliessende Hülle und besass infolge dessen eine positive Ladung, so konnte eine Potentialerhöhung nur dadurch erklärt werden, dass auf der Platte positive Electricität durch die Beleuchtung erzeugt wurde. Die Bestimmung einer Contactpotentialdifferenz nach einer früher¹⁾ angegebenen Methode ergab für verrostetes Eisen gegen frisch geputztes Zink — 1,2 Volt.²⁾

Bedeckte nun eine Glimmerplatte die Oeffnung des Diaphragmas, durch welches die Lichtstrahlen auf die Platte fallen konnten, so blieb bei der Herstellung des Lichtbogens das Electrometer in Ruhe. Bei der Vertauschung der Glimmer- mit einer viel dickeren Marienglasplatte gab das Electrometer eine allmählich wachsende, positive Electrisirung anzeigende Ablenkung. Diese hörte sofort auf zu wachsen, wenn an die Stelle der Marienglasplatte wieder die Glimmerplatte trat. Das Ansteigen des Potentials kann also nicht von einer Influenzwirkung herrühren, auch kann dasselbe nicht auf eine Temperaturerhöhung zurückgeführt werden. Die vollständige Absorption der Wirkung durch Glimmer und die grosse Durchlässigkeit des Marienglases treten hier ebenso hervor wie bei dem früher beobachteten Einfluss des Lichtes auf electrostatisch geladene Körper, sodass die Electricitätserregung wahrscheinlich denselben Strahlen verdankt wird, wie jene Erscheinung.

Die Metalle, welche bis jetzt für die im Vorigen beschriebenen Versuche zur Anwendung gelangt sind, waren Zink, Messing und Aluminium. Bei allen dreien trat bei sehr gut geputzter Oberfläche positive Electrisirung beim Bestrahlen ein. Einigermassen alte Oberflächen zeigen die Erscheinung nicht mehr. Das Bestrahlen selbst drückt ebenfalls das Potential, bis zu welchem die Platten electrisirt werden können, herab, sodass bei jedem folgenden, mit derselben Oberfläche angestellten Versuch das zu erreichende

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. 20. p. 7. 1886.

2) Hrn. Prof. F. Kohlrausch möchte ich für die freundliche Erlaubniss, diese Bestimmung mit den früher gebrauchten Apparaten in seinem Institute auszuführen, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank sagen.

Maximalpotential geringer wird, während der Anstieg zu demselben schneller erfolgt, und zwar ist die Abnahme stärker, wie wenn bei gleichem Zeitintervall zwischen zwei Versuchen die Platte unbeleuchtet bleibt. Das Maximalpotential betrug bei Zink etwas über ein Volt, bei Messing etwa ein Volt und bei Aluminium 0,5 Volt. Diese Angaben beziehen sich auf die höchsten Werthe, welche überhaupt bis jetzt erhalten worden sind, da sich die Maximalwerthe mit der Oberflächenbeschaffenheit ändern.

Weil die hier beschriebenen Versuche eine Unterbrechung erleiden mussten, habe ich mir erlaubt, das hauptsächlichste Resultat derselben einstweilen mitzutheilen. Ob die Electricitätserregung durch Bestrahlung mit electrischem Licht in directem Zusammenhang steht mit dem Electricitätsverlust electrostatisch geladener Körper bei der Bestrahlung, darüber kann ich noch gar nichts aussagen, da es mir bisher nicht ermöglicht war, Versuche in dieser Richtung anzustellen.

Darmstadt, 6. April 1888.

**IX. Einige Bemerkungen zu der Abhandlung
des Hrn. Ad. Blümcke: „Ueber die Bestimmung
der specifischen Gewichte und Dampfspannungen
einiger Gemische von schwefliger Säure und
Kohlensäure;
von Raoul Pictet.**

Indem ich mir vorbehalte, in einem unter der Presse befindlichen Werke: „Die neuesten Erfahrungen über Compressionskältemaschinen in Theorie und Praxis“ eine vollständige Kritik der obigen Abhandlung¹⁾ zu geben, beschränke ich mich hier auf die folgenden Bemerkungen:

1. In meiner ersten Arbeit über den betreffenden Gegenstand habe ich betont, dass die genaue chemische Zusammen-

1) Blümcke, Wied. Ann. 34. p. 10. 1888.

setzung einer Flüssigkeit, welche bei -19° siedet, noch nicht festgestellt sei; das Verhältniss SO_2 zu CO_2 würde ich später bestimmen; — die Formel SCO_4 (analog derjenigen der wässrigen schwefligen Säure SO_3H_2 , in welcher H_2O durch CO_2 ersetzt ist) sei nur als Fabrikmarke, aus Bequemlichkeit angenommen — das erkläre ich dort in klaren, präzisen Worten.

2. Der Hauptpunkt meiner Arbeit besteht in der Feststellung der Thatsache, dass die flüchtige Flüssigkeit, welche bei -19° siedet, bei einer Temperatur von $+30^\circ \text{C}$. theoretisch 8 Atmosphären Spannung geben sollte, und dass sie in Wirklichkeit nur 4,5 Atmosphären Druck gibt.

Dies ist die Anomalie gegenüber dem Gesetze über die Dampfspannungen flüchtiger Flüssigkeiten.

3. An Stelle der von mir bei $+30^\circ \text{C}$. gefundenen 4,5 Atmosphären hat Hr. Blümcke 4,6 Atmosphären gefunden.

Dieses Resultat differirt von dem meinigen weniger, als die Ergebnisse Regnault's selbst untereinander.

Bekanntlich erreichen in den drei von Regnault angestellten Beobachtungsreihen über die Dampfspannungen der wasserfreien schwefligen Säure die Unterschiede 0,324 Atmosphären bei einer Temperatur von etwa 48 bis 49°C ., bei welchen auch wir Versuche angestellt haben.

4. Die Beobachtungen Blümcke's sind vermitteltst eines Cailletet'schen Apparates vorgenommen worden. Die Gase sind hier in einem Glasrohre eingeschlossen, welches oben in einem Capillarrohr endigt. Während der Compression und der Verflüssigung der Gase ist das Endvolumen nur etwa der 300 oder der 400ste Theil des Anfangsvolumens. Jedes fremde Gas, von dem auch nur die aller kleinste Spur im Apparate zurückgeblieben wäre, kann hier Drucküberschreitungen von 1 bis 2 Atmosphären bedingen.

Hierauf beruhen auch die Abweichungen und vermeintlichen Quellen der Fehler, die Blümcke gefunden zu haben glaubt, der Fehler, welche allen derartigen mit dem Cailletet'schen Apparate vorgenommenen Messungen anhaften, welche direct aber nicht messbar sind.

5. Hrn. Blümcke's eigene Resultate bei Bestimmung

der Spannungen von SO_2 ergeben Abweichungen von 0,18 Atmosphären bis — bei 65°C . — 0,92 Atmosphären gegenüber den Resultaten Regnault's.

Diese Unterschiede dürfte Herr Blümcke nicht hinlänglich in Betracht gezogen haben.

**X. Nachtrag zu dem Aufsatz:
„Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermo-
ströme“; von H. Lorberg.**

In einer mir leider erst nach dem Druck des obigen Aufsatzes zu Gesicht gekommenen Abhandlung¹⁾ zeigt Boltzmann, dass, wenn man bei Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auch die Wärmeleitung sowie die Wärmeaufnahme W an den Contactstellen, welche zur Compensation des Wärmeflusses und somit zur Erhaltung constanter Temperaturen nöthig ist, berücksichtigt, man an Stelle der Thomson'schen Gl. (II) die Bedingung erhält:

$$\left[\frac{dH}{dT} - \frac{H}{T} - (\sigma_a - \sigma_b) \right]^2 \leq \frac{\gamma}{T},$$

wo γ eine von der calorischen und galvanischen Leitungsfähigkeit und den Dimensionen der Drähte sowie von dem Temperaturgefälle abhängige positive Grösse ist. (Boltzmann macht die Annahme, dass man bei Bestimmung der electromotorischen Kraft die Wärmeaufnahme W vernachlässigen kann; lässt man diese Annahme fallen, so erhält man für E die Hälfte des in Gl. (I) gegebenen Werthes, während die obige Ungleichung ungeändert bleibt). Ob die zwei Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf den electrischen Theil des thermoelectrischen Vorganges für sich anwendbar sind, wie es auch die Theorie von Duhem annimmt, scheint jedenfalls noch eine offene Frage zu sein; nach Duhem ist der Werth von E in Gl. (I) $= \int T dS$, wo dS die Entropieänderung ist, wenn die Electricitätseinheit ein Wegelement ds durchläuft, und die Gl. (II) ist folglich identisch mit $\int dS = 0$, spricht also die Bedingung aus, dass bei einem Umlauf eines Electricitätstheilchens durch den ganzen Kreis die Entropieänderung $= 0$ ist.

1) Boltzmann, Wien. Ber. 96. 1887.

DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXXIV.

*I. Weitere Untersuchungen,
die Electrolyse des Wassers betreffend;
von H. von Helmholtz.*

(Aus den Sitzungsber. d. k. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin, phys.-math. Classe, vom 28. Juli 1888, mitgetheilt vom Hrn. Verf. nebst einem Nachtrage).

Unter dem 10. Mai 1883 habe ich der Academie eine Reihe thermodynamischer Sätze vorgetragen, die sich auf die Zersetzung des Wassers durch galvanische Ströme beziehen. Dieselben führten zu dem für die Lehre von der Polarisation wichtigen Ergebniss, dass die electrolytische Zersetzung des Wassers durch um so kleinere electromotorische Kräfte würde geschehen können, je kleiner die Mengen der in der Nähe der Electroden aufgelösten Mengen Wasserstoff und Sauerstoff seien; ja dass sogar keine andere untere Grenze als Null für die kleinste electromotorische Kraft bestehe, die vollkommen gasfreies Wasser zersetzen könnte. Allerdings ist dabei zu bemerken, dass die Mengen zu entwickelnden Knallgases für Kräfte, die unter 1,5 Volt. betragen, so ausserordentlich klein werden, dass dieselben in keiner anderen Weise als durch die schwachen Stromreste, die sie unterhalten, wahrgenommen werden können. Ich habe bei der früheren Gelegenheit schon ausgeführt, dass demgemäss auch in Wasser, welches ursprünglich vollkommen gasfrei wäre, jede schwächste electromotorische Kraft im Stande sein würde, einen dauernden electrischen Strom durch die Flüssigkeit zu unterhalten. Denn auch die kleinste Menge der an den Electroden frei und electrisch neutral gewordenen Gase würde durch Diffusion allmählich an die entgegengesetzte Electrode gelangen, diese theilweis depolarisiren und dadurch einen neuen Betrag eines polarisirenden Stromes im Sinne

des Batteriestromes frei machen können. Unvergleichlich stärker freilich müssen chemisch nachweisbare Mengen aufgelösten Sauerstoffs oder Wasserstoffs wirken.

Ich habe mich seitdem vielfach bemüht, experimentell die Grenzen für die kleinsten electromotorischen Kräfte, welche bei gegebenem Drucke des über der Flüssigkeit stehenden Knallgases neues Gas zu entwickeln im Stande sind, festzustellen. Die Versuche erfordern in der Regel sehr lange Zeit, und ich kann sie durchaus noch nicht nach jeder Richtung hin als abgeschlossen betrachten. Indessen kann ich wenigstens Methoden angeben, durch welche sich die erwähnte Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft nachweisen lässt.

Für die hier auszuführenden Messungen der electromotorischen Kräfte der Wasserzersetzung muss ich gleich von vornherein auf eine Fehlerquelle aufmerksam machen, die von früheren Beobachtern und auch zum Theil in meinen eigenen früheren Versuchen nicht immer genügend beachtet ist, und die Ergebnisse von Versuchen, die nur kurze Zeit dauern, erheblich fälschen kann. Enthält nämlich eine Anode von Platina oder auch beide Electroden Wasserstoff oder überhaupt verbrennliche Gase occludirt, sodass der durch den Strom herangeführte Sauerstoff sich mit den Gasen der Anode verbinden kann, so wird eine viel geringere electromotorische Kraft Wasserstoffbläschen an der Kathode frei machen. Am auffallendsten ist dies, wenn die Kathode klein, die Anode aber gross ist. Bei solchen Versuchen scheint alles durch Ausglühen in Flammen gereinigte Platina verbrennliche Gase aus dem Innern der Flamme zu enthalten. Auch wenn ein früherer umgekehrter Strom einen Vorrath von Wasserstoff in den an der jetzigen Anode haftenden Wasserschichten zurückgelassen hat, bringt dies dieselbe Wirkung hervor.

Zu erkennen ist diese Ursache der Gasentwicklung daran, dass dieselbe nicht lange anhält und meist schnell an Stärke abnimmt, wenn man für eine gleichbleibende electromotorische Kraft der Batterie sorgt. Aber es kann Tage lang dauern, ehe der Grenzwert erreicht ist, wo alle wirk-

samen Spuren des occludirten *H* verschwunden sind. In den zu beschreibenden Versuchen, welche meist Wochen und Monate gedauert haben, ist also darauf geachtet worden, dass immer dieselbe Stromrichtung zwischen den Electroden bewahrt wurde, wo kein besonderer Grund vorlag sie zu ändern.

Eine weitere Schwierigkeit bei den Versuchen dieser Art besteht dann darin, dass ganz dieselben Hindernisse der Entwicklung aufgelösten Gases in Gasblasen entgegenstehen, welche sich der Bildung der ersten Dampfblasen bei Siedeverzügen widersetzen. Diese Hindernisse können in Flüssigkeiten von geringem Gasgehalt auffallend gross werden. Eine Zeit lang glaubte ich, dass ich die Grenze der Wasserzersetzung am besten in luftfrei gemachten Flüssigkeitssäulen würde bestimmen können, die unter negativem Druck im oberen Theile eines Barometerrohrs nur durch die Cohäsion der Flüssigkeit getragen würden. Man denke sich ein Heberbarometer, dessen kürzerer Schenkel durch einen Glashahn verschlossen werden kann, während durch die obere Wölbung des langen Schenkels ein eingeschmolzener Platindraht dringt. Es wird etwas durch Schwefelsäure schwach angesäuertes Wasser und Quecksilber in nöthiger Menge eingefüllt. Man lässt das Wasser in das obere Ende des langen Schenkels steigen, stellt das Barometer aufrecht, indem man gleichzeitig den Hahn öffnet. Es bildet sich oben das Vacuum, und das überflüssige Quecksilber fliesst durch den Hahn ab, der danach geschlossen wird. Nun spült man die ganz verschlossene Röhre mit dem Vacuum aus, lässt dann wieder das Wasser in den oberen Theil des langen Schenkels steigen, die Luftblase aber in den kurzen. Dies gelingt, wenn man das Barometer beinahe wagerecht hält, den kurzen Schenkel aber höher liegend als den langen. Dann richtet man es wieder auf, bildet ein neues Vacuum, indem man den Hahn öffnet, und wiederholt dieses Verfahren immer wieder, indem man später auch noch Erwärmungen des ganzen Rohrs bis etwa 40° C. zu Hülfe nimmt. Dadurch gelingt es die Luft immer vollständiger zu entfernen, bis schliesslich das neugebildete Vacuum beim Umlegen des Rohrs sich nur noch in ein

winziges Luftbläschen von etwa 0,2 mm Durchmesser zusammenzieht.

Wenn es so weit gekommen ist, lasse man das Rohr in nahehin wagerechter Stellung mit geöffnetem Hahne liegen und abkühlen. Man findet, dass nach einer halben oder ganzen Stunde das Luftbläschen wieder absorbiert ist. Man kann das Rohr dann vorsichtig aufrichten, ohne dass das Quecksilber sinkt. Es wird getragen durch die Adhäsion des Wassers an der oberen Wölbung des Glases, trotz des hier vorhandenen rauhen Platindrahtes, ferner durch die Cohäsion des Wassers, die Adhäsion des Quecksilbers an Wasser und die Cohäsion des Quecksilbers. Der negative Druck im Wasser betrug dabei zunächst etwa 8 bis 10 cm Quecksilber. So weit sind diese Erscheinungen schon länger bekannt. Neu aber ist, wie ich glaube, dass man nun die geöffnete Spitze des kurzen Schenkels durch einen Schlauch mit einer Luftpumpe verbinden und den ganzen Atmosphärendruck wegnehmen kann, ohne dass die Flüssigkeiten loslassen.¹⁾

Durch die hängende Flüssigkeit kann man alsdann einen electrischen Strom vom Platin zum Quecksilber gehen lassen, der gegen ersteres *O*, gegen letzteres *H* hindrängt. Bei allmählicher Verstärkung der electromotorischen Kraft kommt man endlich an die Grenze, wo die Flüssigkeitssäule abreißt. Die Ströme, welche ich dazu gebraucht habe, wurden von Calomelzellen, wie ich sie früher beschrieben habe, gegeben. Da die hierbei erregten Wasser zersetzenden Ströme, nachdem die Polarisation sich ausgebildet hat, äusserst schwach sind, reichen diese Zellen dafür vollkommen aus, und indem man solche von verschiedener Concentration der Chlorzinklösung verwendet, in Verbindung mit einer schwächeren Zelle, die statt des Zinks Cadmium enthält, kann man die verschiedensten Abstufungen electromotorischer Kräfte herstellen und diese Wochen lang unverändert halten.

Indessen erhielt ich selbst bei dieser Einrichtung auf-

1) Ich habe diesen Versuch in meinen Vorlesungen der letzten beiden Winter und auch der hiesigen Physikalischen Gesellschaft in ihrer Sitzung vom 4. Februar 1887 gezeigt.

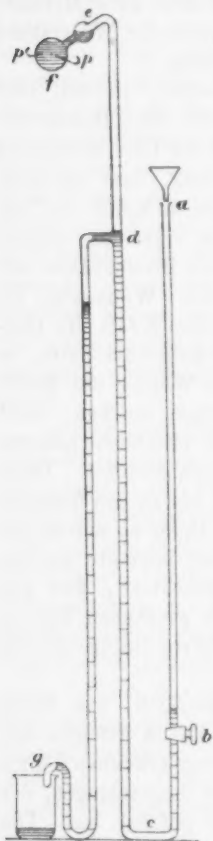
fallend hohe und schwankende electromotorische Kräfte, die bis zu 2 Volt. betrugen, während ich in früheren Fällen schon bei erheblich geringeren Kräften Wasserzersetzung beobachtet hatte. Wir werden letzteres auch in den definitiven Versuchen bestätigt finden. Es ist aber diese Methode besonders geeignet, um zu zeigen, wie gross der Widerstand gegen die erste Blasenbildung werden kann.

Bei anderen weiteren Zersetzungszellen, die mit zwei Platinelectroden versehen am oberen Ende eines Barometerrohrs sassen und in verschiedenen Graden der Luftverdünnung untersucht wurden, zeigte sich regelmässig, dass bei langsamer Abschwächung der electromotorischen Kraft der Batterie die Glasbläschen sich nur noch an einzelnen, zuletzt nur noch an einer bestimmten Stelle der Platindrähte entwickelten, die Tage lang unverändert blieb. Wenn aber bei weiterer Schwächung der electromotorischen Kraft die Gas-Entwicklung auch nur wenige Minuten aufgehört hatte, so trat sie bei der Rückkehr zu demjenigen Werthe der Kraft, der eben noch Gasblasen hatte aufsteigen machen, nicht wieder ein. Man musste vielmehr zu erheblich höheren Werthen übergehen, ehe sich neue Blasen bildeten. Dann konnte man wieder langsam herabgehen bis zu den früheren Graden. Schnell durfte man dies nicht thun; es musste die durch die stärkere Wasserstoffansammlung bedingte electromotorische Gegenkraft Zeit haben abzunehmen, was nur langsam durch Diffusion des Wasserstoffs geschehen konnte, sonst stockte die Gasentwicklung und hörte infolge dessen wieder ganz auf.

Durch diese Versuche zeigt sich deutlich, wie wenig darauf zu rechnen ist, dass man durch das Aufsteigen der Gasblasen die Grenzen der Wasserzersetzung erkennen könne.

Ich habe deshalb einen anderen Weg eingeschlagen, der mich schliesslich zu folgender Methode geführt hat. Die Wasserzersetzung geschieht in einer Zelle am oberen Ende eines Barometers, welches zugleich eine Nebenröhre hat, die als Sprengel'sche Quecksilberpumpe das angesammelte Gas immer wieder fortschaffen kann. Der Apparat dazu ist in umstehender Figur in ein Zehntel natürlicher Grösse abge-

bildet. Darin ist $abcd$ das Barometerrohr, dessen offener Schenkel bei b durch einen Glashahn geschlossen werden kann, dg ist eine engere Nebenröhre (2 mm innerer Durchmesser), die als Quecksilberpumpe dient, bei e und f ist die



aus zwei Glaskugeln bestehende Zersetzungszelle. Die obere e ist kleiner; die untere grössere hat zwei Platindrähte pp als Electroden. Man füllt zuerst das mit 1 Proc. Schwefelsäure angesäuerte Wasser in die Kugeln ein, stellt dann den Apparat aufrecht und gießt Quecksilber durch den Trichter bei a ein; sobald dies bis zur Höhe der Oeffnung d in beiden Schenkeln gestiegen ist, fängt es an, durch die Röhre dg abzufließen, und nimmt die Luft aus dem Raum de mit. Gleichzeitig entwickelt sich die im Wasser aufgelöste Luft in allmählich seltener und grösser werdenden Blasen, die das überschüssige Wasser hinauswerfen, sodass es gleichfalls durch die Röhre dg abfließt. Da hierbei die Röhre nass wird, und auch später noch immer die abgesogenen Wasserdämpfe sich dort verdichten, so muss diese Röhre verhältnissmässig eng sein, damit die Quecksilbertropfen trotz der geringen Capillarspannung ihrer nassen Oberfläche die zwischen ihnen gefangene Flüssigkeit und Luft nicht zu leicht wieder aufsteigen lassen. Bei höheren Graden der Verdünnung steigen die sehr winzigen Luftbläschen allerdings

vielmals wieder auf, bis sich mehrere von ihnen zu einer grösseren Blase vereinigt haben, die dann das Quecksilber nicht mehr durchbrechen kann und ausgeworfen wird. In den oberen Raum können sie nicht zurück, da der Quecksilberverschluss

bei d sich nur in den Momenten, wo schnelles Abströmen beginnt, gegen die in dem strömenden Quecksilberfaden neu entstehende Lücke öffnet und am Schlusse der abwärts gerichteten Bewegung des Fadens, wenn das Aufsteigen einzelner Luftbläschen und Wassertropfen beginnt, schon wieder geschlossen ist.

Ich hatte nach früheren Erfahrungen lange gezweifelt, dass eine innen nasse Sprengel'sche Pumpe arbeiten würde, aber bei hinreichend engem Rohr geht es recht gut.

Die flache Wölbung der Kugel f an ihrer oberen Seite muss im Stande sein, eine Luftblase festzuhalten, ohne dass diese durch das Verbindungsrohr nach e aufsteigt. Wenn neues Gas in der Flüssigkeit von f gebildet wird, diffundirt dies allmählich in diese Luftblase hinein, die nur den Druck der kleinen über ihr stehenden Wassersäule (in meinem Apparat zuletzt 10 mm) zu tragen hat. Die Blase in f wird dadurch allmählich grösser, und zwar nimmt das Knallgas unter diesen Umständen einen mehr als 1000 mal grösseren Raum ein, als unter atmosphärischem Druck, sodass höchst minimale Mengen, die im Laufe eines Tages angesammelt sind, ihre Anwesenheit verrathen. Den Durchmesser der Blase habe ich mit einem oben angelegten Millimetermaassstabe gemessen, um Gleichbleiben derselben oder Vergrösserung zu erkennen.

Wird die Blase zu gross, so lässt man einen Theil derselben, indem man den Apparat neigt, nach e aufsteigen. Hierbei ist zu bemerken, dass der kurze schräge Arm der Röhre bei e nicht wie in der Zeichnung nach links, sondern nach vorn gewendet ist, was dort nicht dargestellt werden konnte, sodass, wenn man nach Verschluss des Hahnes b das obere Ende des Apparates vornüber neigt, die Luftblase aufsteigen kann.

Es wurde jeden Tag eine genügende Quantität Quecksilber durch den Apparat gegossen, sodass das in den Raum oberhalb d diffundirte Gas immer wieder entfernt wurde, und der Apparat dauernd in demselben evacuirten Zustande blieb.

Zur Erzeugung des Stromes brauchte ich drei Eisenchloridlösungs-Kohle-Elemente. Der Widerstand ihrer Schliessung

betrug 3000 Quecksilbereinheiten, gegen welche ihr eigener Widerstand von etwa 75 Einheiten klein genug war, dass dessen kleine Schwankungen nicht in Betracht kamen. Die Elemente blieben ohne Unterbrechung so geschlossen, um sie in möglichst constantem Zustande zu halten; dabei nimmt ihre electromotorische Kraft sehr langsam ab. Jeden Tag wurde die Stärke des von ihnen in diesem Widerstande erregten Stromes mit dem eines übrigens unberührt und ungeschlossen dastehenden verschlossenen Calomelementes verglichen und danach die Länge des Widerstandes berechnet, die man zwischen den zur Zelle führenden Drähten lassen musste, um die gewünschte electromotorische Kraft in dieser zu erhalten. Diese Kraft machte ich von Tag zu Tag in kleinen Stufen kleiner, um die Grenze zu finden. Der durch die Zelle gehende Convectionsstrom war in diesen Fällen so schwach, dass er keinen in Betracht kommenden Abzug an der electromotorischen Kraft hervorbrachte.

Die Calomelzelle war im Laufe der Zeit mehrere mal mit einem Strome, dessen electrolytisches Silberäquivalent bestimmt wurde, compensirt worden und dadurch auf Volts reducirt. Ihr Werth war 1,034 Volts.

Die Grenze für die Gasentwicklung fand ich zwischen 1,64 und 1,63 Volts für einen Druck des Knallgases von 10 mm Wasser. Wenn man in einem Raume von constanter Temperatur arbeiten kann, wird sich die Bestimmung noch genauer machen lassen. Da die Werthe der electromotorischen Kräfte der verschiedenen Flüssigkeitszellen nicht gleichmässig mit der Temperatur sich änderten, und Steigerung der letzteren auch ein wenig aufgelöstes Gas aus der Flüssigkeit frei machen musste, konnten kleine Schwankungen in den Werthen entstehen.

Um die Thatsache zu constatiren, dass die zur Zersetzung nöthige electromotorische Kraft vom Druck des Knallgases abhängig ist, wurde neben der bisher beschriebenen barometrischen Zelle eine ältere, ähnlich construirte eingeschaltet, die nur eine abweichende Form des Gefässes und keinen Hahn hatte. Diese war ursprünglich leer gepumpt gewesen; dann war darin Knallgas bis zu atmosphärischem Druck

entwickelt worden, sodass das Quecksilber in den beiden Schenkeln des Barometers nahehin gleich hoch stand, natürlich etwas wechselnd nach Luftdruck und Temperatur. Diese konnte neben der evacuirten Zelle gleichzeitig eingeschaltet werden, aber so, dass ihre Ableitungsstellen an dem Draht von 3000 Quecksilbereinheiten einen etwas grösseren Widerstand des Batteriekreises zwischen sich fassten, als die der anderen Zelle. Gegenseitige Störung der beiden Zweigleitungen war dabei nicht zu fürchten, wenigstens nicht für die bisher erreichten Genauigkeitsgrenzen, da die beiden Zellen im polarisirten Zustande, wie wir gleich nachher noch besprechen werden, nur sehr unbedeutende Theile des Batteriestromes in sich ableiten und deshalb die Potentialwerthe der verschiedenen Theile seiner Leitung nicht merklich verändern. Der Stand der beiden Quecksilberkuppen wurde jeden Tag mit dem Kathetometer abgelesen und der Druck des Gases im oberen Raume der Zelle mit Correction wegen des Wasserdampfdruckes berechnet. Es fand sich, dass dieser Druck bei 1,79 Volts noch nicht zunahm, wohl aber bei 1,82. Um genauere Bestimmungen zwischen diesen Grenzen zu erlangen, wird die Methode etwas geändert werden müssen, sodass man die Temperatur besser beherrschen kann.

Da es sich hier zunächst darum handelt, die untere Grenze des Druckes festzustellen, bei welchem keine Zersetzung mehr erfolgte, so ist es sicherer, hier nicht die oben angenommene Grenze 1,79 zu nehmen, welche dem Anfangszustande der Werthe unmittelbar nach der täglichen Regelung der electromotorischen Kraft entspricht, sondern dem Endzustand, wie er am anderen Tage bei neuer Vergleichung mit dem Calomelelement sich ergab. Dann müssen wir auf 1,78 oder selbst 1,775 herabgehen.

Ferner kommt in Betracht, dass ein Theil der electromotorischen Kraft den Potentialunterschieden entspricht, die der Strom in den Widerständen hervorruft. In der luftleeren Zelle war der Strom nach hergestellter Polarisation so klein, dass er etwa nur ein Hunderttheil des durch die nicht evacuirte Zelle fliessenden Convectionsstromes ausmachte. Dieser letztere grössere Strom betrug $\frac{1}{57021}$ eines Ampère und durch-

lief in der Batterie etwa 75 Ohm, in der Zelle, deren Widerstand aus Dimension und Entfernung ihrer Drähte und dem Leitungsvermögen der Schwefelsäure annähernd berechnet wurde, etwa 25 Ohm, ausserdem einen wechselnden Theil der grossen Widerstandsscala, der nicht über 100 Ohm betragen hat. Dies ergibt im günstigsten Falle einen Aufwand von 0,0035 Volt, der von der electromotorischen Kraft als verbraucht für Ueberwindung des Widerstandes abzuziehen ist.

Endlich ist zu bemerken, dass zwar die mit Gas von 742 mm gefüllte Zelle lange nicht so leicht Zunahme und Abnahme des Gases anzeigt, wie die evacuirt, wo die Gasvolumina fast 1000 mal grösser sind. Andererseits musste ein Ueberschuss von 0,01 Volt bei dem geringen Widerstande von höchstens 200 Ohm in dem Kreise dieser Zelle in 24 Stunden 6,7 ccm Gas ergeben, was in der Barometerröhre von 5 mm innerem Durchmesser nicht hätte übersehen werden können, sodass ein in Betracht kommender Fehler in dieser Richtung nicht gemacht sein kann.

Für den Einfluss des Druckes auf die electromotorische Kraft habe ich (Vortrag vom 31. Mai 1883. p. 660. Gl. (3e)) folgenden Ausdruck entwickelt:

$$A = A_0 + 10^{-7} \cdot \eta \cdot \vartheta \left\{ R_h \frac{2\alpha_h}{2\alpha_h + \alpha_0} \log \left(\frac{p_h}{p_a} \right) + R_0 \cdot \frac{\alpha_0}{2\alpha_h + \alpha_0} \log \left(\frac{p_0}{p_a} \right) \right\}.$$

Darin ist p_a atmosphärischer Druck, p_h und p_0 sind die Drucke des über der Flüssigkeit stehenden H und O ; α_h und α_0 sind die Atomgewichte derselben Elemente; ϑ die absolute Temperatur nach Centigraden gezählt.

$$R_h = \frac{p_h \cdot v_h}{\vartheta} = 41\,461\,000 \cdot \frac{\text{cm}^3 \cdot \text{g}}{\text{sc}^2},$$

wo v_h das Volumen von 1 g. H ; R_0 die entsprechende Constante für O , und η die Menge des von einem Ampère in einer Secunde zersetzten Wassers:

$$\eta = 0,000\,093\,19$$

nach den letzten Bestimmungen von Hrn. F. Kohlrausch.

Wenn reines Knallgas über der Flüssigkeit steht, wie in unseren Versuchen, und wir dessen Druck mit p bezeichnen:

$$p = p_h + p_0,$$

wird der mit dem Druck wechselnde Theil der electromotorischen Kraft:

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{6} \cdot 10^{-7} \cdot \eta \cdot \vartheta \cdot R_1 \cdot \log \left(\frac{p_1}{p_2} \right) = 0,018868 \cdot \log \text{nat.} \left(\frac{p_1}{p_2} \right).$$

Der Druck in der evacuirten Röhre betrug im Mittel 10 mm Wasser, in der anderen, corrigirt für den Wasserdampfdruck, 742 mm Quecksilber. Für dieses Verhältniss der Drucke ergibt unsere Formel einen Unterschied der electromotorischen Kraft von 0,1305 Volts. Wir hatten 1,64 Volts für letzte Reste der Gasentwicklung und sollten daraus schliessen, dass in der anderen Zelle die Entwicklung bei 1,77 ihre Grenze haben würde. Dies entspricht auch dem oben unter Berücksichtigung der Correctionen gegebenen Ergebniss der Versuche innerhalb der bisher erreichten Grenzen der Genauigkeit.

Die Bestimmung der Grenze für den höheren Knallgasdruck hoffe ich noch wesentlich verfeinern zu können, und auch die Beobachtungen von der Asymmetrie der Electroden frei zu machen, die nicht ganz ohne Einfluss ist und in geblasenen Glaszellen nicht ganz vermieden werden kann.

Wenn wir zu noch grösseren Drucken übergehen wollten, so müssten wir den Druck von einer Atmosphäre wieder in demselben Verhältniss, nämlich auf mehr als 1000 Atmosphären steigern, um eine Erhöhung der electromotorischen Kraft um dieselbe Differenz von 0,16 Volt zu erhalten, d. h. um sie von 1,79 auf 1,95 Volt zu vergrössern. Das wird aber nicht angehen, da schon Hr. W. Siemens gefunden hat, dass bei einer gewissen Höhe des Druckes das Knallgas sich spontan entzündet.

Dazu kommt, dass je grösser der Druck, desto grösser auch die Beladung der Flüssigkeit mit gelösten Gasen wird. Desto höher steigen die Convectionsströme, die einen immer grösseren Theil des Stromes ohne electrolytische Zersetzung entladen.¹⁾

1) S. Werner Siemens' gesammelte Abhandlungen und Vorträge, p. 445. Anmerkung, wo ein Strom von 3 bis 4 Daniells aufhörte, Zersetzung zu geben, wenn der Druck sehr gross wurde. Bei 10 Daniells entzündete das Knallgas sich wiederholt.

Dadurch werden bei den Messungen die Widerstände in den Zellen immer einflussreicher, und die Wärmeentwicklung in ihnen immer störender. Ich habe deshalb vorgezogen, mich auf die hier gebrauchten sehr schwachen Ströme zu beschränken und mit niedrigen Drucken zu arbeiten.

Nachträglicher Zusatz vom Juni 1888. — Das Vorstehende lässt erkennen, dass die electromotorische Gegenkraft von Zellen, die Gase entwickeln, um so höher steigt, je schwerer die Entwicklung der Gasbläschen zu Stande kommt. Desto grössere Mengen der aufgelösten Gase können sich nämlich in den den Electroden nächstgelegenen Wasserschichten ansammeln. Dass Fortspülen dieser Schichten zeitweilig die Polarisirung beseitigt und stärkere Ströme auftreten lässt, ist bekannt. Ich glaube nun, dass man die altbekannte Thatsache, wonach die electromotorische Kraft eines Zink-Platin-Paares in verdünnter Schwefelsäure dauernd höher ist, als die eines Zink-Kupfer-Paares in derselben Flüssigkeit, darauf zurückführen kann. Diese Thatsache erschien immer als ein Paradoxon dem Gesetz von der Constanz der Energie gegenüber. Wenn man aber annimmt, dass sich Wasserstoffblasen leichter an Platina als an positiveren Metallen entwickeln, so würde sich die Thatsache erklären. Es wirkt freilich der gleiche chemische Process in beiden Zellen; in beiden tritt Zink in die Lösung und eine äquivalente Menge Wasserstoff entwickelt sich dafür. Aber das Kupfer würde von einer viel stärker mit Wasserstoff überladenen Flüssigkeit umgeben sein, als das Platina, und nach der thermochemischen Theorie, aus der die Gleichung auf p. 473 hergeleitet ist, ergibt sich, dass Neuausscheidung von Wasserstoff in eine schon viel Wasserstoff haltende Flüssigkeit hinein mehr chemische Arbeit erfordert, als in eine andere, die nur Spuren des genannten Gases enthält.

Die Arbeit, welche die chemischen Kräfte dabei leisten sollten, und die in einem Zinkplatinelement oder auch wohl in einem Smee-Element ziemlich vollständig in Form des electrischen Stromes gewonnen werden kann, muss zum grossen

Theile dabei nach anderer Richtung verwendet werden, und zwar ist in dieser Beziehung Folgendes zu beachten.

Wenn über einer mit Gas unter bestimmtem Drucke gesättigten Flüssigkeit das absorbirte Gas unter gleichem Drucke steht, herrscht Gleichgewicht der molecularen Arbeitskräfte zwischen beiden. Wird der Druck des freien Gases allmählich vermindert, so entwickelt sich langsam Gas aus der Flüssigkeit, und es würde bei constant gehaltener Temperatur das Aequivalent des geänderten Vorrathes freier Energie in der Arbeit des Gasdruckes wieder gewonnen werden können; ebenso in einer electrolytischen Flüssigkeit, aus der die Gasbläschen wirklich in dem Momente frei würden, wo die Flüssigkeitsschicht an der Electrode so weit gesättigt ist, als sie unter dem Drucke, den das entwickelte Gas zu überwinden hat, gesättigt werden kann. Wenn sie aber stärker gesättigt ist, geht ein Theil der freien Arbeit, welchen das entwickelte Gas gegen höheren Druck hätte leisten können, verloren und kann nur in Form von Wärme wieder erscheinen. Diese Wärme wird sich in der Flüssigkeit finden. In der That zeigen die bisher ausgeführten calorimetrischen Versuche mit *H* entwickelnden Zellen, dass das gleiche thermochemische Aequivalent der Wärme immer richtig zum Vorschein kommt. Es würde dies ein Vorgang sein, der einigermassen dem alten und fraglichen Begriffe des Uebergangswiderstandes entsprechen würde; im Grunde wäre es aber nur ein secundär durch den Strom veranlasster Process, welcher dem Strome die durch die Wasserstoffbeladung der Flüssigkeit versperrte Bahn wieder frei macht.

Dass bei einem solchen Sachverhalt alle die kleinen Modificationen der Oberflächen, welche auf die Entwicklung der Gasblasen Einfluss haben, sich in unregelmässigster Weise geltend machen, dass Umrühren der Flüssigkeit, theils durch eine äussere mechanische Kraft, theils durch die aufsteigenden Gasblasen bewirkt, die Stromstärke ändert, dass Erwärmung der Flüssigkeit eine grosse Verstärkung des Stromes hervorbringt, erklärt sich leicht; auch dass es eine geraume Zeit zu dauern pflegt, ehe die Flüssigkeit ausreichend mit Gas beladen ist, um in einen annähernd beständigen

Zustand zu kommen, der dann wieder durch die kleinsten Aenderungen der Lage oder Temperatur geändert wird.

Da die Gasblasen aus übersättigten Flüssigkeiten nur von den Wänden aufzusteigen pflegen, müssen wir schliessen, dass der Riss zwischen Flüssigkeit und Wand leichter zu Stande kommt, als in der Mitte der Flüssigkeit, wo deren Cohäsion überwunden werden muss, die sich dann noch an den entstandenen kleinsten Bläschen als zusammenschnürende Capillarkraft äussert. Es ist also hauptsächlich die Anziehung zwischen Flüssigkeit und Wand, die überwunden werden muss, um dem entweichenden Gase Platz zu schaffen. Denkt man sich nun an der Grenzfläche eine electricische Doppelschicht abgelagert, so wird die Anziehung zwischen Metall und Flüssigkeit durch die electricische Anziehung vergrössert sein. Eine stärkere Ausbildung der electricischen Doppelschicht wird also die Entwicklung des Gasblasen erschweren. Nun wissen wir aus Hrn. A. König's¹⁾ Versuchen über die Capillarconstante polarisirten Quecksilbers, dass dieses seine maximale Spannung hat, wenn es der Wasserstoffentwicklung ziemlich nahe ist. Daraus ist zu schliessen, dass das Metall dann keinen Potentialunterschied gegen die Flüssigkeit hat. Wir dürfen vermuthen, dass es bei dem ihm galvanisch nahestehenden Platina sich ähnlich verhält, während die positiveren Metalle, um im Gleichgewicht electricischer Vertheilung mit dem *H* beladenen und von *O* befreiten Wasser oder dem ihm äquivalenten *Pt* zu sein, um so stärkere Schichten *+E* innerhalb ihrer Grenzfläche ablagern müssen, je positiver sie sind. In dieser Weise könnte ein Zusammenhang bestehen zwischen den galvanischen Constanten der Metalle und ihrer Fähigkeit Wasserstoffblasen aufsteigen zu lassen.

In den Fällen der oben beschriebenen Versuche, wo es nicht zur Blasenbildung kommt, muss die Diffusion der beiden Gase durch die Flüssigkeit unterhalten werden, wenn der Strom fortbestehen soll. Die Diffusion ist aber ein durch moleculare Reibung verzögerter Process, bei dem freie Arbeitsäquivalente verschwinden und in Wärme übergehen.

1) A. König, Wied. Ann. 16. p. 1.

Diese Wärmeentwicklung durch Diffusion, die zu der äusserst geringen vom Strome entwickelten Wärme sich addirt, wird als das Arbeitsäquivalent für die während des schwachen Convectionsstromes durch die Umsetzung in der Batterie verloren gehende chemische Energie betrachtet werden müssten.

II. Ueber die electromotorische Gegenkraft des Aluminiumvoltameters¹⁾; von Franz Streintz.

Ein von drei Daniells gelieferter Strom ist im allgemeinen im Stande, ein in den Schliessungskreis geschaltetes Voltameter bis zum Maximum zu polarisiren.

Unter allen Metallen, welche bisher als Electroden untersucht wurden, bildet nur Aluminium in einem Voltameter mit verdünnter Schwefelsäure eine merkwürdige Ausnahme. Die Polarisation der Anode steigt nämlich ziemlich proportional mit der electromotorischen Kraft der polarisirenden Kette an bis zu Werthen von 17 Volts und wahrscheinlich noch höher, eine Erscheinung, deren Ursache wohl kaum in der Wärmetönung eines an der Anode gebildeten chemischen Processes zu suchen sein wird. Ein weiteres charakteristisches Merkmal der Anodenpolarisation des Aluminiums ist in dem ausserordentlich raschen Verfall derselben nach dem Oeffnen der polarisirenden Kette gelegen.

Diese beiden Erscheinungen, zusammengehalten mit der Thatsache, dass das an der Anode gebildete Aluminiumsuboxyd ein ziemlich schlechter Leiter für Electricität ist, geben der Vermuthung Raum, dass dieselben durch eine condensatorische Wirkung hervorgerufen werden.

Danach würde die polarisirende Kette die Anode zunächst in einen Condensator umbilden, dessen innere Belegung aus metallischem Aluminium, dessen Diëlectricum aus Suboxyd, und dessen äussere Belegung endlich aus der electrolytischen Flüssigkeit, welche die zur Erde abgeleitete

1) F. Streintz, Wied. Ann. 32. p. 116. 1887 u. 33. p. 465. 1888.

Zinkplatte umspült, bestehen würde. Die weitere Aufgabe der polarisirenden Kette wäre dann, diesen natürlichen Condensator mit Ladung zu versehen.

Wird nun die Verbindung mit der Kette gelöst und die Anode an die Erde gelegt, so wäre der an einem in die Leitung geschalteten Galvanometer zuerst hervorgerufene Ausschlag als ein Theil des Entladungsstromes des Condensators anzusehen; der andere Theil wird durch die halbleitende Suboxydschicht hindurch direct zur Erde abfließen. Die Nadel des Galvanometers kehrt jedoch nicht auf die Ruhelage zurück, sondern es bleibt eine lange dauernde, in allmählicher Abnahme begriffene Ablenkung bestehen; dieselbe wird von der galvanischen Polarisation im engeren Sinne herrühren.

Der gesammte, von einer Aluminiumanode gelieferte Polarisationsstrom würde also gebildet werden aus der Summe der dielectricischen oder condensatorischen Polarisation und der electrolytischen Polarisation.

Ich habe versucht, die Grössenordnung der Capacität eines derartigen natürlichen Condensators nach der für die Ladung geltenden Gleichung:

$$V - v = V \cdot e^{-t/CR}$$

zu bestimmen. In der Formel bedeutet V die electromotorische Kraft der ladenden Kette, v jene des Condensators, t die Zeit, gezählt in Secunden vom Zeitpunkte der Verbindung der Kette mit dem Condensator, R den Gesamtwiderstand der Leitung und C die Capacität des Condensators.

R ergibt sich zu ungefähr 100 Ohm, da 15 Bunsen, deren electromotorische Kraft zusammen 28,8 Volts betrug, im Schliessungskreise des Voltameters einen Strom von ungefähr 0,25 Amp. erzeugten.

Für t habe ich die halbe Schwingungsdauer der unterbrechenden Stimmgabel, $\frac{1}{128}$ Secunde, gesetzt. Diese Zahl ist zu klein, da das zu den Beobachtungen verwendete Messinstrument während seiner Schwingung bis zum Umkehrpunkte (es wurden bei den Messungen stets die ersten Ausschläge beobachtet) bereits einen Theil der Ladung, welche demselben von der Stimmgabelzinke zugeführt wurde, wird

verloren haben. Die Bestimmung von t wird überhaupt nicht mit der Stimmgabelunterbrechung durchführbar sein; der von Hrn. Hiecke¹⁾ angegebene Fallapparat in Verbindung mit einer Vorrichtung, welche einen nur momentan dauernden Contact zwischen dem Messinstrumente und der Anode herstellen würde, könnte zur genauen Ermittlung von t dienen.

Entnimmt man die Grössen für $V = e.K.$ und $v = Al + O/Al$ der Tabelle²⁾, so erhält man für die Capacität C Werthe, welche innerhalb der Grenzen von 52 und 83 Mikrofared schwanken, und deren Mittelwerth 68 Mikrofared beträgt.

Die in besonders auffallender Weise am Aluminiumvoltameter beobachtete Erscheinung berechtigt zu der Frage, ob das Vorhandensein einer diëlectrischen Polarisation nicht auch anderen Metallen in einem gewissen Grade zugeschrieben werden könne.

Alle Metalle als Electroden eines Voltameters haben bekanntlich die Eigenschaft, dass ihre Polarisation in der Zeit unmittelbar nach Oeffnen des polarisirenden Stromes die grösste Abnahme erfährt, weshalb sich schon verschiedenen Physikern, wie Varley, Herwig, Bouty, die Analogie mit den durch Condensatoren hervorgerufenen Erscheinungen aufdrängte.

Es würde sich aber, um die Frage näher zu präcisiren, nicht um einen Vergleich der Polarisationszelle mit zwei Condensatoren handeln, sondern darum, ob ganz allgemein die galvanische Polarisation als Summe einer thatsächlichen diëlectrischen und einer electrolytischen Polarisation aufgefasst werden könne.

Bei Electroden, deren Oberflächen chemisch nicht verändert werden — unter den Metallen dürfte sich nur Platin befinden, mit welchem der electrolytische Sauerstoff keine

1) R. Hiecke, Wien. Ber. 96, p. 134. 1887.

2) l. c. p. 125. Da das Diëlectricum als Halbleiter anzusehen ist, so entspricht aus dem bereits angegebenen Grunde das am Instrument beobachtete v allerdings nicht dem vollen Werthe.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

Verbindung eingeht — wäre eben die bedeckende Gasschicht als Diëlectricum anzusehen.

Die neueste Untersuchung von Fromme¹⁾ scheint einigermaßen zur Bejahung dieser Frage beizutragen. Fromme findet nämlich, dass die Polarisirung von Platin in verdünnter Schwefelsäure bei entsprechender Verkleinerung der Anode bis auf 4,3 Daniell gesteigert werden könne. Eine Verkleinerung der Kathode führt zu keinem so hohen Werthe. Da Fromme die Werthe der Polarisirung aus der Stromstärke im ursprünglichen Schliessungskreise berechnet, so müsste man einen Theil dieser Werthe auf Rechnung der Stromverminderung schreiben, welche durch den Widerstand der die Electrode umgebenden diëlectrischen Schicht bewirkt wird.

Je kleiner die Oberfläche der Electrode, desto vollkommener wird dieselbe von Gas bedeckt werden, desto grösser wird daher der Antheil der diëlectrischen Polarisirung sein. Das leichtere Ion wird im allgemeinen weniger an der Electrode haften, als das schwerere, weshalb es sich auch erklären würde, dass hauptsächlich die Verkleinerung der Anode zur Vergrösserung der Polarisirung beiträgt.

Die beiden Grössen der diëlectrischen und der electrolytischen Polarisirung voneinander zu trennen, dürfte ein fruchtloses Unternehmen bleiben. Doch könnte die ausgesprochene Hypothese auf ihre Wahrscheinlichkeit geprüft werden durch weitere Versuche über die Abhängigkeit der Polarisirung verschiedener Gase, z. B. auch des Chlor, von der Grösse der Electroden und über die Abnahme derselben in der auf die Unterbrechung unmittelbar folgenden Zeit.

Graz, Ostern 1888.

1) Fromme, Wied. Ann. 33. p. 80. 1888.

**III. Experimentaluntersuchungen
über die an der Grenzfläche heterogener Leiter
auftretenden localen Wärmeerscheinungen;
von Hans Jahn.**

(Der kaiserl. Academie der Wissensch. zu Wien vorgelegt in der Sitzung
vom 11. Mai 1888. Für die Annalen bearbeitet von dem Hrn. Verf.)

Wird ein aus heterogenen Stücken bestehender Leiter von einem galvanischen Strom durchflossen, so treten an den Berührungsflächen der heterogenen Stücke je nach der Richtung des Stromes locale Wärmeentwickelungen, bezw. Wärmeabsorptionen auf. Die weitere Untersuchung dieses bekanntlich zuerst von Peltier beobachteten Phänomens ergab, dass der Wärmevergang der Stromintensität direct proportional ist, und dass das Vorzeichen der Wärmetönung in einer gesetzmässigen Beziehung zu der thermoelectromotorischen Kraft der jeweiligen Combination steht.

Denken wir uns z. B. einen Strom durch einen aus Kupfer und Wismuth bestehenden Ring geleitet, so wird an der einen Contactstelle eine der Stromintensität proportionale Wärmeemission, an der anderen eine gleich grosse Wärmeabsorption auftreten. Denken wir uns nun den Strom unterbrochen und das System durch Erwärmung thermoelectrisch angeregt, und zwar durch Erwärmung der bei dem ersten Versuch durch den Strom erwärmten Löthstelle, so wird der Thermostrom in entgegengesetzter Richtung fliessen wie der früher durch das System geleitete Strom. Das von Peltier entdeckte Phänomen ist also die Umkehrung der von Seebeck zuerst beobachteten thermoelectrischen Erscheinungen.

Die Deutung dieses Vorganges ist in zweierlei Weise versucht worden.

Edlund geht von der seit Volta in der Physik recipirten Vorstellung aus, dass zwei heterogene Leiter bei ihrem Contact in einen Zustand electricer Spannung gerathen, dass eine bestimmte Potentialdifferenz zwischen ihnen besteht. Wird nun ein Strom durch die Contactstelle geleitet, so

wird Arbeit geleistet, wenn der äussere Strom dem entgegengesetzt ist, welchen die beiden Leiter infolge ihres Potentialunterschiedes allein zu liefern im Stande wären; und es muss eine dieser Arbeitsleistung äquivalente Wärmemenge entwickelt werden. Im entgegengesetzten Falle tritt ein Gewinn von Arbeit ein, und es muss eine entsprechende Wärmeabsorption auftreten. Nach dieser Auffassung würden die dem Peltier-Phänomen entsprechenden Wärmemengen ein directes Maass für die an den betreffenden Contactstellen bestehenden Potentialdifferenzen abgeben, und man hat auch aus der Kleinheit der so bestimmten Potentialdifferenzen Schlüsse gegen die Contacttheorie überhaupt ziehen wollen.

Zu wesentlich anderen Resultaten sind W. Thomson und Clausius bei der Anwendung der beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf das Peltier-Phänomen gekommen. Nach ihnen wird die an der Contactstelle zweier heterogener Leiter entwickelte oder absorbirte Wärmemenge gegeben durch die Formel:

$$W = \pm \alpha T \frac{d\varepsilon}{dT} J,$$

in welcher α das calorische Aequivalent der Energieeinheit, T die absolute Temperatur, J die Stromintensität $d\varepsilon/dT$ die thermoelectromotorische Kraft der jeweiligen Combination bezeichnet.

Es sind mannigfache Versuche zur Prüfung dieser Theorie von Edlund, le Roux u. a. ausgeführt worden, die fast alle zu einer Bestätigung derselben geführt haben. Allerdings ist man auch auf Ausnahmen gestossen, namentlich die Combination Kupfer-Zink lieferte von der Theorie weit abweichende Werthe. Prof. Boltzmann hat überdies in einer kürzlich erschienenen Abhandlung¹⁾ es wahrscheinlich gemacht, dass der oben besprochene Thomson'sche Satz für keine Combination streng gültig sein dürfte, da die Erscheinung durch das Wärme- und Electricitätsleitungsvermögen der betreffenden Metalle complicirt wird.

Alle diese Gründe liessen es mir wünschenswerth er-

1) Boltzmann, Wien. Ber. 96. II. Abth. p. 1258. 1887.

scheinen, die Messungen für einige Metalle zu wiederholen, da die Wärmemessungen und die Bestimmung der in Betracht kommenden electrischen Grössen sich heute mit ungleich grösserer Genauigkeit und Leichtigkeit ausführen lassen, als es für le Roux, dem wir die genauesten Messungen über das in Frage stehende Phänomen verdanken, möglich war.

Alle Erfahrungen stimmen darin überein, dass die Peltier-Wärme der Stromintensität direct proportional ist. Es wird mithin die in einem aus zwei heterogenen Stücken bestehenden Leiter entwickelte Wärmemenge gemäss dem Joule'schen Gesetz durch einen Ausdruck von der Form:

$$W = \alpha J^2 w t \pm J p t$$

gegeben, wo J die Stromintensität, w den Widerstand, t die in Secunden ausgedrückte Zeit, α das calorische Aequivalent der Energieeinheit, und p die der Strom- und Zeiteinheit entsprechende Peltier-Wärme bezeichnet.

Denken wir uns, ein Strom von der Intensität J_1 durchflesse den Leiter in der einen Richtung, so wird die beobachtete Wärmeentwicklung gegeben durch den Ausdruck:

$$W_1 = \alpha J_1^2 w t + J_1 p t,$$

während die Wärmemenge:

$$W_2 = \alpha J_2^2 w t - J_2 p t$$

entwickelt wird, wenn ein Strom von der Intensität J_2 denselben Leiter während derselben Zeit in der entgegengesetzten Richtung durchfliesst. Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen erhält man für die der Stromintensität 1 entsprechende Joule-Wärme:

$$\alpha w t = \frac{W_2 J_1 + W_1 J_2}{J_1 J_2 (J_1 + J_2)} \text{ Cal.},$$

sodass die in dem ersten Versuch entwickelte Peltier-Wärme:

$$\left(W_1 - \frac{W_2 J_1 + W_1 J_2}{J_1 J_2 (J_1 + J_2)} J_1^2 \right) \text{ Cal.}$$

Die dem zweiten Versuch entsprechende dagegen:

$$- \left(W_2 - \frac{W_2 J_1 + W_1 J_2}{J_1 J_2 (J_1 + J_2)} J_2^2 \right) \text{ Cal.}$$

beträgt.

Richtet man den Versuch so ein, dass derselbe Strom den zu untersuchenden Leiter während einer bestimmten

Zeit in der einen Richtung, und unmittelbar darauf in der entgegengesetzten Richtung während derselben Zeit durchfliesst, so heben sich die beiden Peltier-Wärmen gegentheilig auf, sodass die dem Joule'schen Gesetz entsprechende Wärmeentwicklung allein übrig bleibt. Die so bestimmte Wärmemenge dividirt durch das Quadrat der beobachteten Stromintensität muss mit der aus den zwei früheren Versuchen berechneten Joule-Wärme übereinstimmen, wenn anders die Messungen nicht fehlerhaft sind.

Ich habe bei der Mehrzahl meiner mit Leitern erster Ordnung ausgeführten Versuche die Wärmemessungen auf diese Weise controlirt und in allen Fällen eine vorzügliche Uebereinstimmung erhalten.

Die Stromintensität während jedes einzelnen Versuches schwankte nur innerhalb sehr enger Grenzen, es wurde aber nichtsdestoweniger das zur Messung derselben bestimmte Galvanometer in regelmässigen Intervallen von fünf Minuten abgelesen und aus diesen Einzelwerthen das Mittel durch angenäherte Auflösung des Integrales:

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt$$

mit Hülfe der Simpson'schen Regel bestimmt.

Als Einheit der Stromintensität fungirt bei den Versuchen mit metallischen Leitern 1 Amp., als Einheit der Zeit eine Stunde. Sämmtliche Wärmemessungen wurden mit Hülfe des Bunsen'schen Eiscalorimeters ausgeführt, es beziehen sich daher meine sämmtlichen Messungen auf die Temperatur von 0°. Was die Anordnung dieses Instrumentes, sowie die zur Messung der electricischen Grössen benutzten Methoden anbelangt, so verweise ich auf meine Abhandlung über das Joule'sche Gesetz.¹⁾

Der zur Messung der Peltier-Wärme dienende Leiter war in folgender Weise disponirt.

Das Aufnahmegefäss des Eiscalorimeters war mit einem zweifach durchbohrten Gummistopfen verschlossen, durch

1) Jahn, Wied. Ann. 25. p. 49. 1885.

dessen Bohrungen zwei Glasröhren führten. In das eine Rohr war ein Kupferdraht eingekittet, während durch das zweite Rohr ein ein Meter langer Draht aus dem jeweilig zu untersuchenden zweiten Metall geführt war. Das untere Ende dieses Drahtes wurde mit dem Kupferdraht verlöthet, worauf die Löthstelle und die aus den Röhren hervorragenden Drahtenden mit geschmolzenem Paraffin überzogen wurden. Ueber den aus dem Calorimeter herausragenden Theil des zweiten Drahtes wurde ein enger Kautschukschlauch geführt, der das den Draht enthaltende Glasrohr abspernte, und an dem anderen Ende mittels einer Ligatur fest an den Draht angepresst wurde. Der eine Zuleitungsdraht der den Strom liefernden Elemente wurde durch eine kleine Klemmschraube mit dem freien Ende des zuletzt besprochenen Drahtes verbunden. Um die Klemmschraube sowie eine Strecke der durch sie verbundenen Drähte wurde ein schmales Kautschukband gewunden, sodass das Eindringen von Feuchtigkeit unmöglich war. Der zweite Zuleitungsdraht der Batterie tauchte in ein mit Quecksilber gefülltes Glasnäpfchen, welches an das den Kupferdraht enthaltende Glasrohr angeschmolzen war. Die Länge des zweiten Drahtes war so gross gewählt worden, um jede Störung der an der Löthstelle im Calorimeter auftretenden Wärmeerscheinung durch die entgegengesetzte an dem ausserhalb des Calorimeters befindlichen Contact zu vermeiden. Da der Draht ausserhalb des Calorimeters mit einer bedeutenden Eisschicht bedeckt war, so war eine derartige Störung nicht zu befürchten.

Ich lasse nunmehr die Resultate meiner Messungen folgen.

Kupfer - Silber.

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Cu zum Ag | 1,6003 Amp. | 9,497 Cal. |
| 2 | Ag " Cu | 1,6503 " | 11,493 " |
| 3 | Ag " Cu | 1,6803 " | 11,921 " |
| 4 | Cu " Ag | 1,6972 " | 10,792 " |

Die auf die Stromintensität Eins bezügliche Joule-Wärme berechnet sich zu:

| | | | | | |
|--------------------|-------|------|---------------------|---|------|
| | 3,968 | Cal. | aus Versuch 1 und 2 | | |
| | 3,971 | " | " | 1 | " 3 |
| | 3,982 | " | " | 3 | " 4 |
| | 3,980 | " | " | 2 | " 4, |
| also im Mittel zu: | 3,975 | Cal. | | | |

Es ist demgemäss:

| | | | | | |
|--------|--------------|------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 1,6003$ | Amp. | Joule-Wärme . . . | 10,180 | Calorien |
| | | | Entwickelte Wärme . . . | 9,497 | " |
| | | | Peltier-Wärme . . . | -0,683 | Calorien |
| | | | für $J = 1$ | -0,427 | " |
| Nr. 2. | $J = 1,6503$ | Amp. | Joule-Wärme . . . | 10,826 | Calorien |
| | | | Entwickelte Wärme . . . | 11,493 | " |
| | | | Peltier-Wärme . . . | +0,667 | Calorien |
| | | | für $J = 1$ | +0,404 | " |
| Nr. 3. | $J = 1,6805$ | Amp. | Joule-Wärme . . . | 11,226 | Calorien |
| | | | Entwickelte Wärme . . . | 11,921 | " |
| | | | Peltier-Wärme . . . | +0,695 | Calorien |
| | | | für $J = 1$ | +0,414 | " |
| Nr. 4. | $J = 1,6972$ | Amp. | Joule-Wärme . . . | 11,450 | Calorien |
| | | | Entwickelte Wärme . . . | 10,792 | " |
| | | | Peltier-Wärme . . . | -0,658 | Calorien |
| | | | für $J = 1$ | -0,397 | " |

Eine zweite Versuchsreihe ergab folgende Resultate:

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Cu zum Ag | 1,7494 Amp. | 11,470 Cal. |
| 2 | Ag " Cu | 1,7549 " | 13,008 " |

Aus diesen beiden Versuchen berechnet sich die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme zu:
3,986 Cal.

Der directe Versuch zur Bestimmung dieser Grösse ergab:
12,959 Cal.

für eine Stromintensität:

$$J = 1,8022 \text{ Amp.,}$$

woraus sich für die Stromintensität Eins der Werth:
3,990 Cal.

berechnet. Die Uebereinstimmung mit dem oben berechneten Werthe ist also eine vollkommene.

Für die Peltier-Wärme ergeben sich aus den beiden obigen Versuchen die Werthe:

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 1,7494$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 12,198 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 11,470 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -0,728 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,416 | " |

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 2. | $J = 1,7549$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 12,275 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 13,008 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +0,733 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,418 | " |

Es ergibt sich also im Mittel dieser sechs Versuche die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme zu:

$$\pm 0,413 \text{ Cal.},$$

und zwar + für die Stromrichtung $\text{Ag} \rightarrow \text{Cu}$

- für die Stromrichtung $\text{Cu} \rightarrow \text{Ag}$.

Kupfer-Eisen.

Es wurden vier Versuche zur Bestimmung der Peltier-Wärme ausgeführt, welche folgende Resultate ergaben.

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Fe zum Cu | 1,6383 Amp. | 32,279 Cal. |
| 2 | Cu " Fe | 1,5983 " | 20,665 " |
| 3 | Fe " Cu | 1,6458 " | 32,690 " |
| 4 | Cu " Fe | 1,6108 " | 21,298 " |

Die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme berechnet sich aus diesen Versuchen wie folgt:

10,082 Cal. aus Versuch 1 und 2

10,110 " " " 2 " 3

10,161 " " " 3 " 4

10,133 " " " 1 " 2,

also im Mittel zu: 10,122 Cal.

Ein Versuch zur directen Bestimmung dieser Grösse ergab für die Stromintensität:

$$J = 1,6170 \text{ Amp.}$$

die Wärmeentwicklung:

$$26,499 \text{ Cal.},$$

voraus sich für die Stromintensität Eins der Werth:

$$10,134 \text{ Cal.}$$

berechnet, also in sehr guter Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Werthe.

Es berechnen sich demgemäss für die Peltier-Wärme die folgenden Werthe:

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 1,6383$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 27,168 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 32,279 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +5,111 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +3,119 | " |
| Nr. 2. | $J = 1,5983$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 25,857 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 20,665 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -5,192 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -3,248 | " |
| Nr. 3. | $J = 1,6458$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 27,417 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 32,690 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +5,273 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +3,204 | " |
| Nr. 4. | $J = 1,6108$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 26,263 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 21,298 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -4,965 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -3,082 | " |

Die Peltier-Wärme beträgt also im Mittel dieser Versuche:
 $\pm 3,163$ Cal.

und zwar + für die Stromrichtung $\text{Fe} \rightarrow \text{Cu}$,
 - für die Stromrichtung $\text{Cu} \rightarrow \text{Fe}$.

Kupfer-Platin.

Die vier zur Bestimmung des Peltier-Effectes ausgeführten Versuche ergaben folgende Resultate:

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Cu zum Pt | 1,5475 Amp. | 29,40 Cal. |
| 2 | Pt " Cu | 1,5638 " | 28,981 " |
| 3 | Pt " Cu | 1,5655 " | 29,098 " |
| 4 | Cu " Pt | 1,5792 " | 30,588 " |

Die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme berechnet sich daraus wie folgt:

12,064 Cal. aus Versuch 1 und 2

12,074 " " " 1 " 3

12,059 " " " 2 " 4

12,070 " " " 3 " 4.

Bei der experimentellen Bestimmung dieser Grösse wurde für die Stromintensität:

$J = 1,5433$ Amp.

die Entwicklung von: 28,725 Cal.

beobachtet, woraus sich für die Stromintensität Eins der Werth:
 12,06 Cal.

ergibt, während dieselbe Grösse im Mittel der vier obigen Versuche zu: 12,067 Cal. bestimmt wurde.

Es ergeben sich demgemäss für die Peltier-Wärme die folgenden Werthe:

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 1,5475$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 28,897 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 29,4 | " |
| | | Peltier-Wärme | +0,503 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,325 | " |
| Nr. 2. | $J = 1,5638$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 29,510 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 29,981 | " |
| | | Peltier-Wärme | -0,529 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,338 | " |
| Nr. 3. | $J = 1,5655$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 29,573 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 29,098 | " |
| | | Peltier-Wärme | -0,475 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,303 | " |
| Nr. 4. | $J = 1,5792$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 30,094 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 30,588 | " |
| | | Peltier-Wärme | +0,494 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,313 | " |

Es beträgt demnach die Peltier-Wärme für die Stromintensität Eins im Mittel dieser vier Versuche:

$\pm 0,320$ Cal.,

und zwar + für die Stromrichtung $\text{Cu} \rightarrow \text{Pt}$,

- für die Stromrichtung $\text{Pt} \rightarrow \text{Cu}$.

Kupfer-Zink.

Die vier zur Messung der Peltier-Wärme ausgeführten Versuche ergaben folgende Resultate:

| Nr. | Richtung des Stromes | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|----------------------|-----------------|------------------------|
| 1 | Cu zum Zn | 2,3248 Amp. | 36,100 Cal. |
| 2 | Zn " Cu | 2,2472 " | 36,353 " |
| 3 | Cu " Zn | 2,1935 " | 32,090 " |
| 4 | Zn " Cu | 2,7095 " | 52,460 " |

Durch Combination je zwei dieser Versuche berechnet sich die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme wie folgt:

| | |
|-------|--------------------------------|
| 6,935 | Cal. aus den Versuchen 1 und 2 |
| 6,937 | " " " " 2 " 3 |
| 6,933 | " " " " 3 " 4 |
| 6,930 | " " " " 1 " 4. |

Der zur Bestimmung der Joule-Wärme ausgeführte Versuch ergab für die Stromintensität:

$$J = 2,3764$$

die Entwicklung von: 39,26 Cal.,

woraus sich für die Stromintensität Eins der Werth:

$$6,952 \text{ Cal.}$$

ergibt, während derselbe Werth im Mittel der vier obigen Versuche zu: 6,934 Cal. berechnet wurde.

Es ergeben sich demnach für den Peltier-Effect die folgenden Werthe:

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 2,3248$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 37,475 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 36,100 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -1,375 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,591 | " |
| Nr. 2. | $J = 2,2472$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 35,016 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 36,353 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +1,337 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,595 | " |
| Nr. 3. | $J = 2,1935$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 33,362 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 32,090 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -1,272 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,580 | " |
| Nr. 4. | $J = 2,7095$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 50,905 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 52,460 | " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +1,555 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,574 | " |

Die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme ergibt sich also im Mittel dieser vier Versuche zu:

$$\pm 0,585 \text{ Cal.},$$

und zwar + für die Stromrichtung $\text{Zn} \rightarrow \text{Cu}$,

— für die Stromrichtung $\text{Cu} \rightarrow \text{Zn}$.

Ich will noch hervorheben, dass bei diesen Versuchen die Stromintensität innerhalb weiterer Grenzen variiert wurde, um die Proportionalität zwischen der Stromintensität und dem Peltier-Effect deutlicher hervortreten zu lassen. Ein Blick auf die obigen Zahlen beweist, dass diese Proportionalität in der That besteht.

Kupfer-Cadmium.

Die zur Bestimmung der Peltier-Wärme ausgeführten Versuche ergaben folgende Resultate:

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Cu zum Cd | 2,6802 Amp. | 54,14 Cal. |
| 2 | Cd „ Cu | 2,6236 „ | 55,127 „ |
| 3 | Cu „ Cd | 2,2339 „ | 37,384 „ |
| 4 | Cd „ Cu | 2,1416 „ | 36,898 „ |

Daraus berechnet sich die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme wie folgt:

| | |
|------------|---------------------------|
| 7,769 Cal. | aus den Versuchen 1 und 2 |
| 7,771 „ | „ „ „ |
| 7,762 „ | „ „ „ |
| 7,762 „ | „ „ „ |

also im Mittel zu: 7,766 Cal.

Unter Zugrundelegung dieses Werthes ergibt sich für die Peltier-Wärme:

| | | | | |
|--------|--------------|-------------------------|--------|----------|
| Nr. 1. | $J = 2,6802$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 55,787 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 54,140 | „ |
| | | Peltier-Wärme . . . | -1,647 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,615 | „ |
| Nr. 2. | $J = 2,6236$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 53,456 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 55,127 | „ |
| | | Peltier-Wärme . . . | +1,671 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | +0,637 | „ |
| Nr. 3. | $J = 2,2339$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 38,755 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 37,384 | „ |
| | | Peltier-Wärme . . . | -1,371 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | -0,614 | „ |
| Nr. 4. | $J = 2,1416$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 35,618 | Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 36,898 | „ |
| | | Peltier-Wärme . . . | +1,280 | Calorien |
| | | für $J = 1$ | 0,598 | „ |

Das Mittel dieser vier Einzelwerthe beträgt:

$\pm 0,616$ Cal.,

und zwar: + für die Stromrichtung Cd \rightarrow Cu.

- für die Stromrichtung Cu \rightarrow Cd.

Auch diese Versuche erweisen die vollkommene Proportionalität zwischen der Stromintensität und dem Peltier-Phänomen.

Kupfer-Nickel.

Die zur Bestimmung der Peltier-Wärme ausgeführten Versuche ergaben folgende Resultate:

| Nr. | Richtung des Stromes | Strom- intensität | Entwickelte Wärmemenge |
|-----|-------------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 | Ni zum Cu | 2,6669 Amp. | 57,443 Cal. |
| 2 | Cu " Ni | 2,5741 " | 75,691 " |
| 3 | Cu " Ni | 2,4559 " | 69,643 " |
| 4 | Ni " Cu | 2,606 " | 55,110 " |

Es berechnet sich die der Stromintensität Eins entsprechende Joule-Wärme zu:

| | |
|------------|---------------------------|
| 9,721 Cal. | aus den Versuchen 1 und 2 |
| 9,770 " | " " " " 1 " 3 |
| 9,779 " | " " " " 3 " 4 |
| 9,758 " | " " " " 2 " 4 |

also im Mittel zu: 9,757 Cal.

Demgemäss ergeben sich folgende Werthe für die Peltier-Wärme:

| | | | |
|--------|--------------|-------------------------|------------------|
| Nr. 1. | $J = 2,6669$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 69,395 Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 57,443 " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -11,952 Calorien |
| | | für $J = 1$ | - 4,482 " |
| Nr. 2. | $J = 2,5741$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 64,65 Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 75,69 " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +11,04 Calorien |
| | | für $J = 1$ | + 4,289 " |
| Nr. 3. | $J = 2,4559$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 58,848 Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 69,643 " |
| | | Peltier-Wärme . . . | +10,795 Calorien |
| | | für $J = 1$ | + 4,394 " |
| Nr. 4. | $J = 2,606$ | Amp. Joule-Wärme . . . | 66,262 Calorien |
| | | Entwickelte Wärme . . . | 55,10 " |
| | | Peltier-Wärme . . . | -11,162 Calorien |
| | | für $J = 1$ | - 4,283 " |

Es beträgt daher im Mittel dieser vier Versuche die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme:

$$\pm 4,362 \text{ Cal.},$$

und zwar: + für die Stromrichtung Cu \rightarrow Ni

- für die Stromrichtung Ni \rightarrow Cu.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Resultate dieser sechs Versuchsreihen zusammengestellt mit den auf dieselbe Stromintensität reducirten Resultaten von le Roux. Dieser Physiker nahm zur Einheit der Intensität einen Strom, welcher während der Zeiteinheit:

1,314 gr Kupfer

abschied. In absolutem Maasse ausgedrückt, entsprächen dem unter Zugrundelegung des von F. und W. Kohlrausch ermittelten electrochemischen Aequivalentes des Kupfers (0,3281 mg pro Sec.):

1,112 Amp.

Die Werthe sind also mit dieser Zahl zu dividiren, um sie auf die von uns adoptirte Einheit der Stromintensität zu reduciren.

Es entwickelt demgemäss die Einheit der Stromintensität, welche vom Kupfer zu den in der ersten Rubrik angeführten Metallen fliesst, während einer Stunde die nachstehenden Wärmemengen:

| | Jahn | le Roux |
|-------------------|-------------|-------------|
| Silber | -0,413 Cal. | — |
| Eisen | -3,163 " | -2,517 Cal. |
| Platin | +0,320 " | — |
| Zink | -0,585 " | -0,387 " |
| Cadmium | -0,616 " | -0,458 " |
| Nickel | +4,362 " | — |

Es geht aus dieser Zusammenstellung hervor, dass die von mir erhaltenen Werthe durchwegs grösser sind, als die von le Roux ermittelten. Man hätte eigentlich das Entgegengesetzte erwarten sollen, da le Roux bei höheren Temperaturen arbeitete als ich. Ein Umstand kommt dabei aber in Betracht, durch den die Abweichungen ihre Erklärung finden können. Le Roux experimentirte mit Stäben aus den betreffenden Metallen, ich dagegen mit Drähten. Da nun durch zahlreiche Versuche festgestellt ist, dass alle physikalischen Veränderungen, auch die scheinbar geringfügigsten von wesentlichem Einfluss auf das thermoelectrische Verhalten der Metalle sind, so wird die Verschiedenheit der Werthe nicht Wunder nehmen.

Zur Prüfung des eingangs erwähnten Thomson'schen Satzes erübrigte die Bestimmung der thermoelectromotorischen Kraft derselben Metallcombinationen, für welche die calorimetrischen Versuche ausgeführt waren.

Da die mir zu Gebote stehenden Apparate zur genauen Ermittlung dieser Grösse nicht ausreichten, so hatte Hr.

Dr. Klemenčič im hiesigen physikalischen Institute die Güte, sich dieser Mühe zu unterziehen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank ausspreche.

Es wurden für die Bestimmung der thermoelectromotorischen Kraft dieselben Drähte benutzt, welche für die Wärmemessungen gedient hatten. Um die Mitteltemperatur möglichst gleich der zu machen, für welche die Peltier-Wärme gemessen war, wurde die thermoelectromotorische Kraft zwischen -21 und $+20^{\circ}$ C. bestimmt. Dr. Klemenčič fand so für die einem Grad Temperaturdifferenz entsprechende thermoelectromotorische Kraft:

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| Cu - Ag = - 2,12 Mikrovolt | Cu - Zn = - 1,51 Mikrovolt |
| Cu - Fe = - 11,28 " | Cu - Cd = - 2,64 " |
| Cu - Pt = + 1,40 " | Cu - Ni = + 20,03 " |

In der nachstehenden Tabelle sind die nach dem Thomson'schen Satz unter Zugrundelegung dieser Zahlen für die Peltier-Wärme berechneten Werthe mit den direct beobachteten zusammengestellt.

| | Berechnet | Gefunden |
|---------|---------------|---------------|
| Cu - Ag | - 0,495 Cal. | - 0,413 Cal. |
| Cu - Fe | - 2,64 " | - 3,163 " |
| Cu - Pt | + 0,327 " | + 0,320 " |
| Cu - Zn | - 0,353 " | - 0,585 " |
| Cu - Cd | - 0,617 " | - 0,616 " |
| Cu - Ni | + 4,68 " | + 4,362 " |

Die Uebereinstimmung ist für die Combinationen:

Cu - Pt, Cu - Cd, Cu - Ag

eine vorzügliche, während sich für die übrigen Combinationen grössere oder geringere Abweichungen ergeben. Allein bei der grossen Schwierigkeit, so kleine Wärmemengen mit absoluter Genauigkeit zu messen, und in Anbetracht dessen, dass auch die kleinen electromotorischen Kräfte mit unvermeidlichen Versuchsfehlern behaftet sein dürften, nehme ich Anstand, aus diesen Abweichungen auf die Ungültigkeit des Thomson'schen Satzes zu schliessen. Es hat vielmehr den Anschein, dass bei vollkommener Genauigkeit aller Messungen sich auch dieser Satz mit voller Schärfe bewahrheiten würde.

Die Verantwortlichkeit für die von Prof. Boltzmann in seiner eingangs citirten Abhandlung über meine Zahlen gemachte Bemerkung nehme ich auf mich. Ich hatte die damals ausgeführten Wärmemessungen verglichen mit dem Thomson'schen Satz unter Zugrundelegung der von Becquerel ermittelten Werthe für die thermoelectromotorische Kraft der betreffenden Metallcombinationen. Es ergaben sich dabei bedeutende Abweichungen. Da ich es nun nicht für wahrscheinlich hielt, dass sich für die von mir benutzten Metallindividuen so ganz andere thermoelectromotorische Kräfte ergeben würden, wie sie Dr. Klemenčič dann in der That fand, so glaubte ich damals, auf die Ungültigkeit des Thomson'schen Satzes schliessen zu dürfen.

Ich wendete mich nunmehr der Aufgabe zu, die localen Wärmeerscheinungen an den Berührungsflächen von Metallen und Electrolyten messend zu verfolgen. Diese Versuche boten ein um so grösseres Interesse, als man hoffen durfte, durch sie zu einer Erklärung der localen Wärmeerscheinungen zu gelangen, welche für galvanische Elemente von verschiedenen Experimentatoren nachgewiesen worden sind.

Es liegen über diesen Gegenstand bisher nur die nach einer äusserst sinnreichen Methode von Bouty ausgeführten Versuche vor, die sich aber nur auf Electrolyte erstrecken, durch deren Combination sich Elemente ohne secundäre Wärmeerscheinungen zusammenstellen lassen, d. h. solche für die die gesammte von dem Element entwickelte Wärme mit der Stromwärme identisch ist. Für die Frage, deren Aufklärung ich anstrebte, boten daher diese Versuche nichts von Belang. Ob es mir gelungen ist, diese Lücke durch meine calorimetrischen Messungen auszufüllen, wage ich bei der grossen Schwierigkeit dieser Versuche nicht zu entscheiden. Ich will und kann für meine Versuche nur den Werth einer ersten Annäherung in Anspruch nehmen und fühle mich zu dieser Einschränkung um so mehr verpflichtet, als dieselben zu Resultaten geführt haben, die von den Bouty's bedeutend abweichen. Bouty fand, dass die von ihm beobachteten localen Wärmeerscheinungen ganz dem Thomson'schen Satz entsprechen, während meine Resultate trotz wiederholter Ver-

suche zwar untereinander übereinstimmten, von dem besagten Phänomen aber bedeutend abwichen.

Bouty arbeitete mit sehr kurzer Versuchsdauer, während ich, um zu einigermaßen messbaren Wärmemengen zu gelangen, jeden Versuch über eine Stunde ausdehnen musste. Es ist daher sehr wohl denkbar, dass sich bei den Bouty'schen Versuchen das Peltier-Phänomen in vollkommener Reinheit darstellte, während es bei meinen Messungen durch secundäre Einflüsse, wie Strömungen in der Flüssigkeit u. a. getrübt und verdeckt wurde, da sich alle derartigen Störungen bei der langen Versuchsdauer besonders accentuiren mussten.

Allein es kann auch andererseits nicht verkannt werden, dass sich Zweifel, ob denn der Thomson'sche Satz überhaupt im vorliegenden Falle erfüllt werden kann, geltend machen lassen.

Die Messungen Bouty's haben zu dem allgemeinen Resultate geführt, dass an der Kathode eine Abkühlung, an der Anode dagegen eine Erwärmung eintritt. Ich fand diese Beobachtung für die von mir untersuchten Kupfer- und Zinksalze bestätigt, während sich für Cadmiumsulfat und Silbernitrat das umgekehrte Resultat einstellte: es erwärmte sich die Kathode, während sich die Anode abkühlte. Was das Silbernitrat anbelangt, so hatte diese Beobachtung nichts Ueberraschendes, da nach den Messungen Bouty's der Thermostrom in Silbernitrat zwischen Silberelectroden in entgegengesetzter Richtung verläuft wie bei den Kupfer- und Zinksalzen zwischen Kupfer-, bezw. Zinkelectroden. Bei den Cadmiumsalzen ist das aber nicht der Fall, es musste daher eine anderweitige Erscheinung das Peltier-Phänomen stören. Eine einfache Ueberlegung zeigt auch, wo der Grund dieser Störung zu suchen ist.

Wenn man die Lösung eines Electrolyten zwischen Electroden aus dem in ihm enthaltenen Metalle electrolysirt, so sind die durch den chemischen Austausch der Ionen bedingten Wärmeerscheinungen vollkommen ausgeschlossen, da die Wärmetönung an der einen Electrode durch die gleich grosse und entgegengesetzte an der zweiten Electrode vollständig

compensirt wird. Anders verhält es sich dagegen mit gewissen an den Electroden localisirten Wärmeerscheinungen, unter denen in erster Linie die dem Uebergang der Metalle aus dem gelösten Zustand in den festen und vice versa entsprechenden in Betracht kommen. Es kann wohl kaum bezweifelt werden, dass dieser Uebergang an der Kathode eine namhafte Wärmeentwicklung bedingen wird, da sich dort das Metall compact ausscheidet während an der Anode, wo die gleiche Menge des Metalles aufgelöst wird, eine gleiche Wärmemenge absorbiert werden muss. Die diesem Vorgang entsprechenden Wärmeerscheinungen sind also im allgemeinen dem zu erwartenden Peltier-Phänomen entgegengesetzt, sodass es verständlich ist, dass die beobachtete Wärmetönung kleiner ausfällt als die nach dem Thomson'schen Satze zu erwartende, ja dass sich unter Umständen die Wärmeerscheinung umkehren kann. Es würde nach diesen Ueberlegungen die an der Kathode auftretende Wärmetönung sich darstellen lassen durch den Ausdruck:

$$W_1 = \alpha J^2 w t - P + R.$$

Die an der Anode dagegen wäre:

$$W_2 = \alpha J^2 w t + P - R,$$

wo $\alpha J^2 w t$ die dem Joule'schen Gesetz entsprechende Wärmeentwicklung, P die Peltier-Wärme, und R die nicht compensirte, an den Electroden localisirte Wärmeerscheinung von der zuletzt besprochenen Art bezeichnet. Es ist demnach die gesammte an den Electroden localisirte Wärmemenge:

$$P - R = \frac{W_2 - W_1}{2}.$$

Solange nun $P > R$ ist, würde die Erscheinung qualitativ verlaufen, wie sie aus dem thermoelectrischen Verhalten der Combination zu erwarten ist, sowie aber $P < R$ ist, würde sich die Erscheinung umkehren. Quantitativ könnte aber nach diesen Ueberlegungen der Thomson'sche Satz für Electrolyte überhaupt nie erfüllt sein.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt. In das Calorimeter tauchte ein unten zugeschmolzenes, mit der Lösung des Electrolyten gefülltes Rohr, dessen aus dem Calorimeter hervorragender Theil mit einer Glocke umgeben

war, welche mit fein zerriebenem Eis gefüllt wurde. Dieselbe hatte den Zweck, eine vollständige Wärmeabgabe seitens der ausserhalb des Calorimeters befindlichen Flüssigkeitssäule herbeizuführen, ehe sie durch Strömungen infolge von Concentrationsunterschieden in das Calorimeter gelangte. Die cylindrischen Electroden waren an Kupferdrähte gelöthet, welche durch einen Guttaperchaüberzug vollständig von der electrolytischen Flüssigkeit isolirt waren. Die Electroden waren so disponirt, dass sich die eine derselben in dem Calorimeter befand, während die andere in die ausserhalb des Calorimeters befindliche Flüssigkeitssäule tauchte. Es versteht sich von selbst, dass die Länge des Rohres so bemessen war, dass es von einer bedeutenden Eisschicht in dem das Calorimeter enthaltenden Kübel bedeckt war. Da der Widerstand der Flüssigkeitssäule sich nicht wesentlich änderte, wie aus der Constanz der Stromintensität erhellte, und da andererseits die ganze Vorrichtung für je einen Kathoden- und Anodenversuch vollkommen ungeändert blieb, so konnte man annehmen, dass bei diesen Versuchen derselbe Bruchtheil der von der ganzen Flüssigkeitssäule nach dem Joule'schen Gesetz entwickelten Wärmemenge in das Calorimeter gelangte.

Die Concentration der angewendeten Lösungen war, wie bei den Versuchen mit galvanischen Elementen so gewählt, dass ein Moleculargewicht des wasserfreien Salzes in 100 Moleculargewichten Wasser aufgelöst war. Als Einheit der Stromintensität fungirt der Strom, der während der Zeiteinheit — 1 Stunde — ein in Milligrammen ausgedrücktes Atomgewicht Kupfer abscheidet: also unter Zugrundelegung des von F. und W. Kohlrausch ermittelten electrochemischen Aequivalentes des Kupfers:

0,05349 Amp.

Die Resultate der Versuche waren folgende:

Kupfer in Kupfersulfat.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,029 905 Amp. | 90,97 Cal. |
| Anode " " . . | 0,029 846 " | 92,56 " |

Die mittlere Stromintensität beträgt:

$$0,029\,926 \text{ Amp.}$$

und die Peltier-Wärme:

$$\frac{92,56 - 90,97}{2} = 0,795 \text{ Cal.},$$

also für $J = 1$; $\pm 1,42 \text{ Cal.}$

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,028 399 Amp. | 83,36 Cal. |
| Anode " " . . | 0,028 615 " | 84,76 " |

Die mittlere Stromintensität beträgt:

$$0,028\,507 \text{ Amp.},$$

die Peltier-Wärme: $0,7 \text{ Cal.},$

also für $J = 1$: $\pm 1,31 \text{ Cal.}$

Im Mittel dieser beiden Versuchsreihen ergibt sich also für die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme:

$$\pm 1,37 \text{ Cal.},$$

und zwar + für die Anode, - für die Kathode.

Kupfer in Kupfernitrat.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,040 743 Amp. | 98,76 Cal. |
| Anode " " . . | 0,040 725 " | 99,30 " |

Mittlere Stromintensität: $0,040\,734 \text{ Amp.}$

Peltier-Wärme: $0,27 \text{ Cal.}$

also für $J = 1$: $0,354 \text{ Cal.}$

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,041 039 Amp. | 100,77 Cal. |
| Anode " " . . | 0,041 033 " | 101,80 " |

Mittlere Stromintensität: $0,041\,046 \text{ Amp.}$

Peltier-Wärme: $0,265 \text{ Cal.}$

für $J = 1$: $0,345 \text{ Cal.}$

Es ergäbe sich demnach im Mittel dieser beiden Versuchsreihen die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme zu:

$$\pm 0,35 \text{ Cal.}$$

Dieser Werth ist aber unzuverlässig, da trotz aller Vorsicht nicht zu vermeiden war, dass sich an der Kathode basisches Nitrat ausschied. Der Werth für die Peltier-Wärme dürfte also zu klein ausgefallen sein. Ich glaube, man wird sich nicht wesentlich von der Wahrheit entfernen, wenn man die Peltier-Wärme im Kupfernitrat ebenso gross annimmt, wie in dem Kupfersulfat.

Zink in Zinksulfat.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,027 067 Amp. | 78,59 Cal. |
| Anode " " " . . | 0,027 105 " | 80,82 " |

Mittlere Stromintensität: 0,027 086 Amp.

Peltier-Wärme: 1,115 Cal.

für $J = 1$: 2,202 Cal.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,026 943 Amp. | 78,77 Cal. |
| Anode " " " . . | 0,026 866 " | 80,86 " |

Mittlere Stromintensität: 0,026 905 Amp.

Peltier-Wärme 1,045 Cal.

für $J = 1$: 2,078 Cal.

Es beträgt mithin im Mittel dieser beiden Versuchsreihen die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme:

$$\pm 2,14 \text{ Cal.},$$

und zwar + für die Anode, - für die Kathode.

Cadmium in Cadmiumsulfat.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,021 685 Amp. | 67,99 Cal. |
| Anode " " " . . | 0,021 729 " | 64,71 " |

Mittlere Stromintensität: 0,021 707 Amp.

Peltier-Wärme: 1,64 Cal.

für $J = 1$: 4,04 Cal.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,022 013 Amp. | 71,19 Cal. |
| Anode " " . . | 0,022 012 " | 67,45 " |

Mittlere Stromintensität: 0,022 012 Amp.

Peltier-Wärme: 1,87 Cal.

für $J = 1$: 4,54 Cal.,

Es beträgt daher im Mittel dieser beiden Versuchsreihen die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme: $\pm 4,29$ Cal.

und zwar — für die Anode, + für die Kathode.

Silber in Silbernitrat.

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,037 509 Amp. | 75,44 Cal. |
| Anode " " . . | 0,049 918 " | 118,10 " |

Durch Auflösung der beiden Gleichungen:

$$W_1 = \alpha J_1^2 wt - J_1 pt, \quad W_2 = \alpha J_2^2 wt + J_2 pt$$

erhält man für die der Stromintensität 1 Amp. entsprechende Joule-Wärme den Werth:

$$\alpha wt = 50066 \text{ Cal.}$$

Es ist demgemäss für:

| | |
|---------------------------------|----------------------------------|
| Vers. 1. Joule-Wärme 70,44 Cal. | Vers. 2. Joule-Wärme 124,75 Cal. |
| Entw. Wärme 75,44 " | Entw. Wärme 118,10 " |
| Peltier-Wärme +5,00 Cal. | Peltier-Wärme -6,65 Cal. |
| für $J = 1$ +7,13 " | für $J = 1$ -7,13 " |

| | Stromintensität | Entwickelte Wärmemenge |
|----------------------------|-----------------|------------------------|
| Kathode im Calorimeter . . | 0,036 705 Amp. | 74,76 Cal. |
| Anode " " . . | 0,036 417 " | 63,91 " |

Mittlere Stromintensität: 0,036 562 Amp.

Peltier-Wärme: 5,425 Cal.

für $J = 1$: 7,93 Cal.

Es beträgt demgemäss die der Stromintensität Eins entsprechende Peltier-Wärme im Mittel dieser beiden Versuchsreihen: $\pm 7,53$ Cal.

und zwar: — für die Anode, + für die Kathode.

Die beiden Versuchsreihen ergaben keine so gut übereinstimmenden Einzelwerthe wie die übrigen. Es boten diese Versuche eine sehr bedeutende Fehlerquelle infolge der dendritischen Abscheidungen des Silbers an den Electroden, wodurch sich der Widerstand in dem Apparat fortwährend änderte. Immerhin lassen die Versuche über die Richtung und mit hinreichender Annäherung auch über den Werth der localen Wärmeerscheinung keinen Zweifel.

Welche Folgerungen lassen sich nun aus diesen Werthen über die Beziehung zwischen der gesammten von einem galvanischen Elemente entwickelten Wärme und dessen Stromwärme herleiten?

Betrachten wir unter diesem Gesichtspunkte das Daniell'sche Element, so werden wir in demselben die folgenden Wärmeevorgänge zu unterscheiden haben. Der Strom geht bei geschlossenem Element von dem Zink durch die Zinksulfatlösung zum Kupfersulfat, um mittelst der Kupferelectrode das Element zu verlassen. Es werden daher nach den obigen Versuchen an der Zinkelectrode:

2 Cal.

entwickelt, an der Kupferelectrode:

1,4 Cal.

absorbirt werden, während an der Trennungsfläche der beiden Electrolyten die dem Austausch des Kupfers gegen das Zink in ihren Sulfaten entsprechende Wärmetönung, sowie die dem Uebergange des Stromes vom Zinksulfat zum Kupfersulfat entsprechende Peltier-Wärme auftritt. Von der letzteren können wir auf Grund aller Erfahrungen, die darüber vorliegen, als verschwindend klein absehen. Die beiden an den Electroden localisirten Wärmetönungen sind von entgegengesetztem Vorzeichen und nahezu gleich, es wird daher so gut wie gar keine Wärme gebunden, die chemische Wärme muss sehr angenähert mit der Stromwärme identisch sein. Das ist ja auch durch alle Experimentatoren übereinstimmend erwiesen worden.

Anders gestalten sich aber die Verhältnisse, wenn wir in dem Daniell'schen Elemente das Zink durch Cadmium ersetzen. Der Strom fliesst bei geschlossenem Ele-

mente von dem Cadmium durch das Cadmiumsulfat zum Kupfersulfat und zum Kupfer. Es werden mithin an der Cadmiumanode: 4 Cal.

absorbirt, während an der Kupferkathode gleichfalls eine Absorption von 1,4 Cal.

auftritt; an der Grenzfläche der beiden Sulfatlösungen wird die dem chemischen Austausch der beiden Metalle entsprechende Wärmemenge entwickelt.

Es wird mithin die gesammte von dem Element entwickelte Wärmemenge gleich sein der zuletzt besprochenen Wärmemenge, vermindert um die beiden local an den Electroden auftretenden Wärmetönungen; dieselbe muss also kleiner sein als die aus den thermochemischen Daten berechnete.

Zur Bestimmung der gesammten, von dem Element entwickelten Wärmemenge wurde durch das in dem Eiscalorimeter befindliche Element der Strom eines Bunsen'schen Elementes eine Stunde lang hindurchgeleitet, und zwar in derselben Richtung, in welcher der von dem Element allein gelieferte Strom fließen würde. Die Stromintensität, sowie die Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden wurden in regelmässigen Intervallen von fünf Minuten in absolutem Maasse bestimmt und für jede Einzelbeobachtung der Werth der Stromenergie durch Multiplication der Stromintensität mit der gleichzeitig beobachteten Potentialdifferenz ermittelt. Das Mittel dieser Einzelwerthe erhielt man dann durch die Auflösung des Integrales:

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta dt$$

mit Hülfe der Simpson'schen Regel. Bezeichnen wir die von dem Elemente entwickelte Wärme mit W , die Stromintensität mit J , die Potentialdifferenz mit Δ , mit t die Zeit, mit α das calorische Aequivalent der Energieeinheit, so gibt:

$$W = \alpha J \Delta t$$

die Wärme, welche das Element bei der gleichen Stromintensität ohne den Hilfsstrom entwickelt hätte.¹⁾ Es wurden zwei Versuche mit dem Elemente:

1) Vgl. Jahn, Wied. Ann. 28. p. 25. 1886.

Cd, CdSO₄ aq || CuSO₄ aq Cu
ausgeführt.

Versuch 1.

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta t = 0,12104,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,088\,837 \text{ Amp.}, \quad W = 154,49 \text{ Cal.}$$

Setzen wir: $\alpha = 0,2377,$
so ist: $\alpha J \Delta t = 103,57 \text{ Cal.}$

Die von dem Element entwickelte Wärmemenge beträgt
also: 50,92 Cal.

oder für die von uns adoptirte Stromeinheit:
30,66 Cal.

Versuch 2.

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta t = 0,10406,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,081\,240 \text{ Amp.}, \quad W = 135,36 \text{ Cal.}$$

Es ergibt sich demnach für die von dem Element entwickelte Wärmemenge:

$W - \alpha J \Delta t = 135,36 - 89,05 = 46,31 \text{ Cal.}$
oder für die Einheit der Stromintensität:
30,49 Cal.

Es ist mithin die gesammte von dem Elemente entwickelte Wärmemenge gleich:

30,58 Cal.
im Mittel dieser beiden Versuche.

Nun beträgt nach den Messungen von Thomsen die Wärmetönung:

(Cd, O, SO₃ aq) = 89,88 Cal., (Cu, O, SO₃ aq) = 55,96 Cal,
wonach die zu erwartende chemische Wärme gleich:
33,92 Cal.

wäre, d. h. um beiläufig 3,5 Cal. höher als die gesammte von dem Elemente entwickelte Wärme. Die letztere geht

ihrer Gesamtheit nach in Stromwärme über. Ich fand für die electromotorische Kraft des Elementes:

0,6782, resp. 0,6780,

also im Mittel: 0,6781 Volt,

woraus sich für die Stromwärme der Werth:

31,04 Cal.

ergibt, also in sehr naher Uebereinstimmung mit der gesammten, von dem Elemente entwickelten Wärme.

Es ist von F. Braun gelegentlich seiner schönen Untersuchung über die Beziehung von chemischer Wärme und Stromwärme darauf hingewiesen worden, dass für sämtliche Elemente, welche Silbersalze enthalten, die Abweichungen zwischen diesen beiden Grössen besonders gross sind. Meine Messungen haben dieselben Resultate ergeben. So fand ich für das Element:



die gesammte entwickelte Wärme im Mittel zweier Versuche gleich:

30,5 Cal.

Da sich das Kupfer auflöst, so müssen an der Kupferelectrode:

1,4 Cal.

entwickelt werden, wenn wir für das Kupfernitrat denselben Werth in Rechnung bringen, wie für das Kupfersulfat. Ferner werden an der Kathode, wo sich die der aufgelösten Kupfermenge äquivalente Menge Silber niederschlägt, nach unseren Versuchen:

7,53 Cal.

entwickelt. Es sind also: 9 Cal.

jedenfalls durch die localen Processe an die Electroden gebunden, mithin für die Strombildung verloren, sodass die Stromwärme:

$30,5 - 9 = 21,5$ Cal.

betragen sollte. Ich fand für die electromotorische Kraft dieses Elementes im Mittel von vier Bestimmungen:

0,458 Volt,

woraus sich die Stromwärme zu:

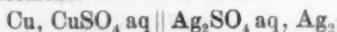
20,96 Cal.,

also in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit der oben gefundenen Zahl berechnet.

Nehmen wir an, dass auch für das Silber in Silbersulfat die locale Wärmeerscheinung dieselbe sei, wie für das Silber

in Silbernitrat, so lässt sich die in Frage stehende Beziehung noch an einigen weiteren Elementen prüfen.

Für das Element:



müssten demnach Gesamtwärme und Stromwärme in derselben Beziehung zu einander stehen, wie für das zuletzt besprochene Element.

Die Gesamtwärme wurde in zwei Versuchen gemessen.

Versuch 1.

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta t = 0,063\,824,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,038\,071 \text{ Amp.}, \quad W = 75,74 \text{ Cal.}$$

Es beträgt mithin die von dem Elemente entwickelte Wärme: $W - \alpha J \Delta t = 75,74 - 54,62 = 21,12 \text{ Cal.}$
oder für die Stromeinheit:

$$29,67 \text{ Cal.}$$

Versuch 2.

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta t = 0,060\,289,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,037\,078 \text{ Amp.}, \quad W = 71,875 \text{ Cal.}$$

Daraus berechnet sich die von dem Element entwickelte Wärme zu:

$$W - \alpha J \Delta t = 71,88 - 51,59 = 20,29 \text{ Cal.}$$

oder auf die Einheit der Stromintensität bezogen:

$$29,77 \text{ Cal.}$$

Die gesammte von dem Element entwickelte Wärme beträgt also im Mittel dieser beiden Versuche:

$$29,72 \text{ Cal.}$$

Davon sollten nach unserer Voraussetzung:

$$9 \text{ Cal.}$$

gebunden sein, sodass für die Stromwärme:

$$29,72 - 9 = 20,72 \text{ Cal.}$$

blieben, woraus sich für die electromotorische Kraft der Werth:

0,452 Volt

berechnet. Die directe Bestimmung ergab:

0,418 Volt,

also in befriedigender Uebereinstimmung mit der berechneten Zahl.

Für das Element:

$\text{Zn, ZnSO}_4\text{aq} \parallel \text{Ag}_2\text{SO}_4\text{aq, Ag}_2,$

ergab die Bestimmung der Gesamtwärme folgendes Resultat:

$$\frac{1}{t} \int_0^t J \Delta dt = 0,058\,656,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,038\,291 \text{ Amp.}, \quad W = 106,27 \text{ Cal.}$$

Es beträgt mithin die von dem Element entwickelte Wärme:

$$W - \alpha J \Delta t = 106,27 - 50,19 = 56,08 \text{ Cal.}$$

oder auf die Einheit der Stromintensität bezogen:

$$78,34 \text{ Cal.}$$

Da nun nach unseren obigen Versuchen die locale Wärmetönung an der Zinkelectrode:

$$+ 2,14 \text{ Cal.},$$

an der Silberelectrode: $+ 7,53 \text{ Cal.}$

beträgt, so wären also: $9,67 \text{ Cal.}$

gebunden, die Stromwärme müsste mithin:

$$78,34 - 9,67 = 68,67 \text{ Cal.}$$

betragen. Ich bestimmte die electromotorische Kraft dieses Elementes zu:

1,515 bzw. 1,510,

also im Mittel zu: $1,513 \text{ Volt},$

woraus sich die Stromwärme zu:

$$69,25 \text{ Cal.},$$

also in sehr naher Uebereinstimmung mit dem oben gefundenen Werthe berechnet.

Für das Element:

$\text{Cd, CdSO}_4\text{aq} \parallel \text{Ag}_2\text{SO}_4\text{aq, Ag}_2$

ergaben zwei Versuche zur Bestimmung der Gesamtwärme folgende Resultate:

Versuch 1:

$$\frac{1}{t} \int_0^t J A dt = 0,070\,301,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,044\,398 \text{ Amp.}, \quad W = 109,03 \text{ Cal.}$$

Es beträgt mithin die von dem Element entwickelte Wärme:

$$W - \alpha J A t = 109,03 - 60,16 = 48,87 \text{ Cal.}$$

oder für die Stromeinheit:

$$58,88 \text{ Cal.}$$

Versuch 2:

$$\frac{1}{t} \int_0^t J A dt = 0,067\,328,$$

$$\frac{1}{t} \int_0^t J dt = 0,042\,382 \text{ Amp.}, \quad W = 104,40 \text{ Cal.}$$

Es berechnet sich demgemäss die von dem Element entwickelte Wärme zu:

$$W - \alpha J A t = 104,40 - 57,61 = 46,79 \text{ Cal.}$$

oder auf die Einheit der Stromintensität bezogen zu:

$$59,05 \text{ Cal.}$$

Die gesammte von dem Element entwickelte Wärmemenge beträgt also im Mittel dieser beiden Versuche:

$$58,97 \text{ Cal.}$$

Da an der Cadmiumanode Wärme absorbirt wird, so kommt dieselbe hier nicht mehr in Betracht, dagegen ist die an der Silberkathode entwickelte Wärmemenge von:

$$7,53 \text{ Cal.}$$

von der Gesamtwärme abziehen, um die Stromwärme zu erhalten; dieselbe betrüge mithin:

$$51,44 \text{ Cal.}$$

Für die electromotorische Kraft dieses Elementes fand ich:

$$1,138, \text{ bzw. } 1,131,$$

also im Mittel: 1,135 Volt,

woraus sich die Stromwärme zu:

$$51,95 \text{ Cal.}$$

also in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit dem obigen Werthe berechnet.

Zum Schluss sei es mir gestattet, noch auf eine Folgerung der bisher dargelegten Betrachtungsweise hinzudeuten. In dem Element von Warren de la Rue:



löst sich das Zink als Zinkchlorid auf, während die äquivalente Menge Chlorsilber an der Kathode unter Abscheidung von Silber zerlegt wird. Nun ist es aber bei der Unlöslichkeit des Chlorsilbers, auch in concentrirter Zinkchloridlösung, klar, dass von einer eigentlichen Electrolyse des Chlorsilbers nicht die Rede sein kann. Man hat vielmehr den Vorgang so aufzufassen, dass sich auch an der Kathode zunächst Zink ausscheidet, welches dann sofort das Chlorsilber nach der Gleichung:



zerlegt. Es kann daher auch an der Berührungsfläche von Silber und Chlorsilber kein Peltier-Phänomen eintreten, vielmehr wird allein die an der Zinkelectrode entwickelte Wärmemenge von der Gesamtwärme in Abzug zu bringen sein, um die Stromwärme zu erhalten. Ich habe, um diese Folgerung durch den Versuch zu prüfen, die während der Electrolyse von gelöstem Zinkchlorid zwischen Zinkelectroden auftretenden localen Wärmeerscheinungen zu messen gesucht, bin aber zu keinen scharfen Resultaten gelangt, da die Bildung von basischem Chlorid den Versuch in empfindlicher Weise störte. Immerhin sprechen aber die von mir erhaltenen Zahlen sehr deutlich für die Richtigkeit der obigen Behauptung. So erhielt ich für eine mittlere Stromintensität von:

0,040 827 Amp.

an der Kathode eine Entwicklung von:

85,25 Cal.,

an der Anode von: 89,77 Cal.

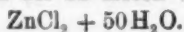
Demnach betrüge die Peltier-Wärme:

2,26 Cal.

oder auf die Stromeinheit bezogen:

2,96 Cal.

Die Concentration der zu diesen Versuchen verwendeten Lösung war:



Da ich nun für das mit der gleichen Lösung beschickte Warren de la Rue'sche Element die Gesamtwärme im Mittel zweier Versuche zu:

$$48,99 \text{ Cal.}$$

bestimmt habe, so würde die Stromwärme:

$$48,99 - 2,96 = 46,03 \text{ Cal.}$$

betragen. Die electromotorische Kraft dieses Elementes beträgt nach meinen Bestimmungen:

$$1,017 \text{ Volt,}$$

woraus sich die Stromwärme zu:

$$46,56 \text{ Cal.,}$$

also in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit der obigen Zahl berechnet.

Die Gesamtheit dieser Beobachtungen drängt also zu dem Schluss, dass die secundären von den galvanischen Elementen entwickelten Wärmemengen an den Berührungsstellen der Metalle und Electrolyte localisirt sind, dass sie also in der That als eine Art Peltier-Phänomen aufzufassen sind.

Es ist schon früher hervorgehoben worden, dass die von mir für Metalle und Electrolyte gefundenen Peltier-Wärmen mit dem Thomson'schen Satz nicht übereinstimmen.

In der nachstehenden Tabelle sind die direct beobachteten und die nach dem besagten Satze berechneten Wärmemengen zusammengestellt.

| | Beobachtet | Berechnet |
|------------------------|------------|------------|
| Cu - CuSO ₄ | -1,4 Cal. | -9,42 Cal. |
| Zn - ZnSO ₄ | -2,14 " | -9,57 " |
| Cd - CdSO ₄ | +4,29 " | -8,22 " |
| Ag - AgNO ₃ | +7,53 " | +2,27 " |

Den berechneten Werthen liegen die von Bouty¹⁾ bestimmten thermoelectrischen Kräfte zu Grunde, mit denen die neuerdings von Gockel²⁾ ermittelten Werthe in sehr befriedigender Weise übereinstimmen.

Ueber den muthmasslichen Grund der sehr bedeutenden

1) Bouty, Wiedemann, Electricität. 2. p. 351.

2) Gockel, Wied. Ann. 24. p. 618. 1885.

Abweichungen zwischen den beobachteten und den berechneten Grössen habe ich mich schon oben geäussert; hier möchte ich nur noch auf eine scheinbare Schwierigkeit zurückkommen.

Die Beobachtungen von Czapski, Gockel und mir haben übereinstimmend zu dem Resultate geführt, dass der von Helmholtz'sche Satz, der nichts anderes zu sein scheint, als der auf polarisationsfreie Elemente ausgedehnte Thomson'sche Satz, für alle bisher untersuchten Elemente mit grosser Annäherung zutrifft. Dieser Satz hat aber für einzelne Electroden gar keine Bedeutung, worauf schon Duham hingewiesen hat, und das Nichtzutreffen dieses Satzes für einzelne Electroden kann die Beweiskraft der mit Elementen ausgeführten Versuche um so weniger in Frage stellen, als in neuester Zeit G. Meyer¹⁾ durch sorgfältige Versuche erwiesen hat, dass im allgemeinen der Werth des Temperaturcoefficienten eines Elementes, den man aus den Temperaturcoefficienten zwischen Metallen und Flüssigkeiten, sowie zwischen Flüssigkeiten und Flüssigkeiten berechnet, mit dem wirklich beobachteten nicht übereinstimmt. Es scheinen da ziemlich complicirte Verhältnisse vorzuliegen, deren Aufklärung künftigen Untersuchungen zu überlassen ist.

Vorstehende Untersuchung wurde in dem chemischen Institute der hiesigen Universität ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, dem Director desselben, Hrn. Prof. Skraup, meinen wärmsten Dank auszusprechen für die zuvorkommende Liebenswürdigkeit, mit der er mir die Räume und Hilfsmittel des Instituts zur Benutzung überliess.

Graz, im Mai 1888.

1) G. Meyer, Wied. Ann. 33. p. 265. 1885.

IV. *Bemerkungen zu dem Aufsätze des Hrn. Foeppl über die Leitungsfähigkeit des Vacuums*¹⁾; von E. Edlund.

In der citirten Abhandlung sucht Hr. Foeppl experimentell zu beweisen, dass der electriche Widerstand der Luft in sehr verdünntem Zustande ausserordentlich gross sei. Seine Versuche waren in folgender Weise angeordnet. Zwei aus Glasröhren verfertigte Spiralen waren miteinander durch zwei gerade Glasröhren luftdicht verbunden, und die in diesem Röhrensystem eingeschlossene Luft konnte mit einer Quecksilberpumpe verdünnt werden. Ueber die eine Spirale *A* wurde eine andere Spirale aus Kupferdraht in vielen Windungen geschoben, und die andere Spirale *B* war mit ihrer horizontal gerichteten Axe so aufgestellt, dass die Windungsebenen in den magnetischen Meridian fielen. Von einem Stativ hing senkrecht über die Mitte der Spirale *B* ein Coconfaden herab, der einen in dem cylindrischen Hohlraum der Spirale schwingenden Magnetspiegel trug. Zum Schutz gegen Luftströmungen diente ein über die Spirale gestelltes Gehäuse aus Papier und Glas. Die Schwingungen des Spiegels konnten mit Hülfe von Fernrohr und Scala in der gewöhnlichen Weise beobachtet werden.

Wenn nun ein durch die Kupferspirale gehender galvanischer Strom geöffnet oder geschlossen würde, könnte man, falls die Luft ein ziemlich guter Leiter wäre, nach Foeppl's Ansicht, erwarten, dass dadurch eine so starke Inductionselectromotorische Kraft in der Spirale *A* entstände, dass der dadurch verursachte Strom auf den Magnetspiegel einwirken würde. Foeppl fand aber, dass der Spiegel keinen Ausschlag zeigte, man mochte den inducirenden Strom so stark nehmen, wie man wollte. Wenn man dagegen statt der Glasspiralen zwei ihnen ähnlichen Spiralen aus Kupferdraht, welche miteinander durch Kupferdrähte verbunden waren, benutzte, so wurde der Inductionsstrom so stark, dass der Magnetspiegel herumgeworfen wurde. Hieraus schliesst Foeppl, dass der

1) Foeppl, Wied. Ann. 33. p. 402. 1888.

Widerstand der verdünnten Luft oder des Vacuums im Ver-
gleiche mit dem der Metalle ausserordentlich gross sein muss.

Dieser Schlussfolgerung kann ich meinestheils nicht be-
stimmen. Durch experimentelle Untersuchungen ist bewie-
sen, dass die durch Volta- oder Magnetinduction in den
Metallen erregte electromotorische Kraft von der Natur der
Metalle unabhängig ist, sie ist z. B. für Kupfer gleich gross
wie für Platin u. s. w. Dieses Gesetz gilt wohl auch für
Leiter zweiter Ordnung, wenigstens ist es für Zinkvitriol-
lösung durch Versuche festgestellt. Es entsteht nun die Frage,
ob dasselbe Gesetz auch für gasartige Körper gültig sei, d. h.
ob die durch Volta- oder Magnetinduction in den Gasen
erregte electromotorische Kraft ebenso gross, wie in den
Metallen sei. So viel ich weiss, hat man nicht einmal ver-
sucht, diese Frage auf theoretischem oder experimentellem
Wege zu beantworten. Die Gase verhalten sich in electri-
scher Hinsicht auf ganz andere Weise als die Leiter erster
und zweiter Ordnung. Der Potentialunterschied zwischen
zwei Punkten auf einem metallischen oder flüssigen Leiter
ist dem Widerstand zwischen denselben Punkten, multiplicirt
mit der Stromstärke, proportional; bei den Gasen dagegen
ist dieser Unterschied unabhängig von der Stromstärke. Bei
den metallischen und flüssigen Leitern ist der Widerstand
dem Querschnitte umgekehrt proportional, bei den Gasen ist
derselbe gleich gross, der Querschnitt mag grösser oder kleiner
sein. Die Wärmeentwicklung des Stromes ist bei den Lei-
tern erster und zweiter Ordnung dem Quadrate der Strom-
stärke, bei den Gasen dagegen vielmehr der ersten Potenz
derselben proportional. Es scheint mir deswegen sehr gewagt
zu sein, ohne alle theoretische und experimentelle Beweise,
der Inductionsconstante für die Gase denselben Werth wie
für die festen Körper beizulegen. Die Schlussfolgerung, die
Poeppel aus seinen Versuchen gezogen, basirt aber auf dieser
Annahme.

Wenn die Stromleitung ausschliesslich aus Leitern erster
und zweiter Ordnung besteht, so wird die Stromstärke i nach
der Ohm'schen Formel $e/(m + n)$ berechnet, wo e die electro-
motorische Kraft und $m + n$ den gesammten Widerstand be-

deutet. Wenn aber der Widerstand n von einer Luftsäule herrührt, so wird die Formel $i = (e - n)/m$. Nach der ersten Formel entsteht ein Strom, wie schwach auch die electromotorische Kraft sei; nach der letzten muss $e > n$ sein, wenn ein Strom entstehen soll. Dass diese letzte von mir¹⁾ aus theoretischen Gründen deducirte Formel richtig sein muss, ist schon experimentell bewiesen. Durch die Versuche von Warren de la Rue und Müller²⁾ und andere ist festgestellt, dass die Stromstärke im fraglichen Falle durch die Formel $i = e/(m + n/i)$ berechnet werden kann; welche Formel mit der meinigen identisch ist. Wenn dann, wie Foepppl es gethan, die Stromstärke mit der unveränderten Ohm'schen Formel berechnet wird, kann wohl nicht ein zuverlässiges Resultat erreicht werden.

Frühere Versuche über den Durchgang des Stromes durch eine Gassäule haben gezeigt, dass, sobald die Luft unter einer gewissen Grenze verdünnt wird, die Stromstärke unverändert bleibt, wenn der Abstand der Electroden z. B. von 1 bis 30 cm vergrössert wird. Diese Thatsache scheint wohl zu beweisen, dass der Widerstand der verdünnten Luft sehr klein sein muss. Uebrigens ist bekannt, dass man durch Influenz (nicht Volta- oder Magnetinduction) in sehr verdünnter Luft Lichterscheinungen hervorbringen kann, welche Thatsache nicht wohl möglich wäre, wenn die Bewegung des electrischen Fluidums durch den Widerstand verhindert würde. Ferner ist durch Versuche bewiesen, dass der Widerstand bis zu der äussersten Verdünnung, die mit der Pumpe hervorgebracht werden kann, unaufhörlich abnimmt. Das Foepppl bei seinem Versuche, Inductionsströme in verdünnter Luft durch Voltainduction hervorzubringen, ein negatives Resultat erzielt, kann deswegen meiner Ansicht nach nicht darauf beruhen, dass der Widerstand zu gross sei, sondern hat wahrscheinlich seine Ursache darin, dass die Inductionsconstante der Gase zu unbedeutend ist.

Für eine solche Erklärung des von Foepppl erhaltenen

1) E. Edlund, Wied. Ann. 15. p. 165. 1882.

2) W. de la Rue u. Müller, Compt. rend. 86. p. 1072. 1878.

Resultates spricht folgender Umstand: Hittorf¹⁾ hat gefunden, dass 180 Bunsen'sche, aus Zink, Kohle und Chromsäurelösung bestehende Elemente im Stande waren, durch die verdünnte Luft zwischen Electroden sich unter Lichterscheinung zu entladen. Wird die electromotorische Kraft eines Elementes gleich 1,9 Volt gesetzt, so wird die ganze electromotorische Kraft = 348 Volt. Unter Voraussetzung, dass die Inductionsconstante für die Gase ebenso gross sei, wie für die Leiter erster Ordnung, berechnet Foepppl, dass die in der Spirale *A* inducirte electromotorische Kraft mehr als 5000 Volt betrug. Um den Widerstand zu verringern, wurde die Spirale *B* weggenommen, die Spirale *A* durch ein ganz kurzes Verbindungsrohr geschlossen und darauf die Spannkraft der eingeschlossenen Luft auf 1,5 mm Quecksilberdruck gebracht. Bei dem Oeffnen und Schliessen des inducirenden Stromes wurde aber keine Lichterscheinung in der Spirale beobachtet. Nun ist die Frage, warum konnte Foepppl mit seiner starken electromotorischen Kraft keine Lichterscheinung hervorbringen, da dies mit einer mehr als 14 mal geringeren Kraft bei den Hittorf'schen Versuchen gelungen war, obwohl der Strom bei diesen Versuchen auch den bedeutenden Widerstand zwischen den Electroden und dem Gase zu überwinden hatte? Nach meiner Ueberzeugung erreichte die electromotorische Kraft bei Foepppl's Versuchen nicht im entferntesten 5000 Volt, sondern war in der That viel kleiner, eine Folge davon, dass die Inductionsconstante für die Gase geringer als für die übrigen Leiter ist.

1) Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 612. 1879.

V. *Magnetische Untersuchung einiger Gase; von A. Toepler und R. Hennig.*

(Aus den Sitzungsber. d. königl. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin vom
15. März 1888; mitgetheilt von den Herren Verfassern.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 1.)

Bekanntlich hat Quincke durch eine verdienstvolle Experimentaluntersuchung¹⁾ an Flüssigkeiten im homogenen, magnetischen Felde eine Druckerscheinung nachgewiesen; es entsteht an der von Luft begrenzten Flüssigkeitsoberfläche eine hydrostatisch messbare, senkrecht zur Oberfläche gerichtete Druckdifferenz, welche durch

$$p = k H^2$$

ausgedrückt werden kann und bei magnetischen Flüssigkeiten nach aussen, bei diamagnetischen nach innen wirkt. Hierbei bedeutet k eine nur von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante, H die Intensität des Magnetfeldes. Quincke bestimmte die Constante k für eine grosse Anzahl von Flüssigkeiten aus der Steighöhe in einer U-förmigen Glasröhre, indem er die eine der beiden Flüssigkeitskuppen plötzlich einem starken Magnetfelde aussetzte, während die andere einer magnetischen Kraft nicht unterworfen war, und macht dazu die Bemerkung,²⁾ dass sich dieselbe Methode auch auf Gase anwenden lasse, indem man die atmosphärische Luft über einer diamagnetischen Flüssigkeit durch andere Gase ersetzt.

Es war nicht zu bezweifeln, dass derartige Vergleichsbeobachtungen, nacheinander mit verschiedenen Gasen angestellt, mit praktischen Schwierigkeiten verknüpft sein würden wegen der relativen Kleinheit der zu beobachtenden Unterschiede. In der That würde ein Fehler, welcher bei den auf einander bezogenen Vergleichsbeobachtungen beispielsweise in der Ausgleichung oder Bestimmung der Feldstärke begangen würde, einen 40 bis 50 mal grösseren Fehler im gesuchten Resultate zur Folge haben können, wenn die Gase

1) Quincke, Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1. p. 17. 1884 u. Wied. Ann. 24. p. 347. 1885.

2) l. c. p. 25.

unter Atmosphärendruck untersucht werden. Da es nichtsdestoweniger wünschenswerth erschien, auf Grund der Quincke'schen Druckerscheinungen magnetische Beobachtungen an Gasen anzustellen, so wurde die im Folgenden beschriebene Methode benutzt, bei welcher zwei Hauptfehlerquellen, nämlich die magnetische Wirkung auf die das Gas absperrende Flüssigkeit und der Einfluss der verschiedenen Gasschwere, durch ein Compensationsverfahren beseitigt sind. Wenngleich die Versuchsanordnung in hohem Grade einfach ist, so erfordern die Beobachtungen wegen ihrer Feinheit dennoch Zeit und Mühe. Dieser Umstand, sowie die Thatsache, dass über den Magnetismus der Gase verhältnissmässig wenige Messungen vorliegen, mögen es rechtfertigen, dass wir Resultate mittheilen, welche noch der Vervollständigung bedürfen.

In der Fig. 1 ist die Zusammenstellung des benutzten Apparates schematisch dargestellt, wobei der Deutlichkeit halber von der Wiedergabe der wirklichen Grössenverhältnisse abgesehen ist.

Zwischen den beiden einander gegenüberstehenden, kreisförmigen Polflächen eines Ruhmkorff'schen Electromagnets wird eine in der Mitte schwach geknickte, im übrigen gut cylindrische, beiderseits offene, enge Glasröhre *ab* mittelst zweier seitlicher Träger *nn* in der Weise festgehalten, dass eine etwa 2 bis 3 cm lange, leicht bewegliche Flüssigkeitsäule *cd* (meistens Petroleum) an der Knickungsstelle im Gleichgewichte einspielt. Weder die Träger, noch die geknickte Röhre, welche der Kürze halber magnetische Libelle heissen mag, sind mit dem Electromagnete oder dessen Träger in Berührung, wodurch etwaige Erschütterungen der Libelle durch die Deformationen des Eisenkerns beim plötzlichen Magnetisiren und Entmagnetisiren ausgeschlossen sind. Auf die Flüssigkeitskuppe *d* ist ein verticales Mikroskop *m* mit Glasscala im Ocular eingestellt; das Mikroskop ist ebenfalls auf einem besonderen Gestell befestigt.

In dem Raume zwischen den parallelen Polflächen, welcher nahe als ein homogenes Feld anzusehen ist, ist es möglich, der Libelle eine solche Stellung zu geben, dass die

magnetischen Wirkungen auf die Flüssigkeitskuppen sich aufheben, sodass der Flüssigkeitsfaden bei starker Magnetisirung stehen bleibt. Werden nun in die Libellenschenkel zwei verschiedene Gase gebracht, so rührt der beim Magnetisiren entstehende Libellenausschlag nur von der Verschiedenheit im Magnetismus der beiden Gase her. In Wirklichkeit braucht selbstverständlich die erwähnte Compensation nur angenähert erreicht zu sein; eine Abweichung von der völligen Compensation wird durch einen Vorversuch bestimmt und in Rechnung gezogen. Aus dem im Mikroskop gemessenen Ausschlage und aus der als bekannt vorausgesetzten Feldstärke berechnet sich die Constante k sehr einfach, wenn man vorher den Knickungswinkel α (vgl. Fig. 1) ermittelt hat. Ist dieser Winkel so klein, dass für ihn Sinus und Tangens vertauscht werden können, so entspricht einer im Mikroskop gemessenen Verschiebung von der Grösse b eine hydrostatische Druckdifferenz der beiden Kuppen von der Grösse:

$$\sigma b \sin \alpha,$$

wenn σ das specifische Gewicht der Libellenflüssigkeit bedeutet. Bezeichnet H die Feldstärke, so ist also:

$$(1) \quad k = \frac{\sigma b \sin \alpha}{H^2}.$$

Zu bemerken ist, dass die Libelle für die Beobachtung nur so eingestellt zu werden braucht, dass die beiden Libellenschenkel nahe in eine Verticalebene fallen; es ist nämlich unter der gemachten Voraussetzung, dass α klein ist, gleichgültig, ob die beiden Libellenschenkel gegen den Horizont gleiche Neigung haben oder nicht.

Um den Knickungswinkel der Libelle genau festzustellen, bedient man sich, wie bei der gewöhnlichen Röhrenlibelle, eines sogenannten Libellenprobers, d. h. einer in drei Punkten gestützten Unterlage, welche mittels einer getheilten Elevationsschraube um kleine Winkelgrössen gegen den Horizont geneigt werden kann. Verschiebt sich der Flüssigkeitsfaden der magnetischen Libelle um die Strecke a , falls dieselbe in der Knickungsebene um die kleine Winkelgrösse β geneigt wird, so ist:

$$\sin \alpha = \frac{l}{a} \sin \beta,$$

worin l die Länge des Flüssigkeitsfadens (genauer den Horizontalabstand der Kuppen) bedeutet. Dasselbe Hilfsmittel dient auch, um zu ermitteln, ob die Libellenschenkel mit hinreichender Annäherung als gerade gelten können. Selbstverständlich sind nur ausgesuchte Röhren zu benutzen.

Die Kürze der Flüssigkeitssäule ist von Nutzen, da sie der Beweglichkeit zu Gute kommt; auch der Temperatureinfluss wegen der Längendehnung wird dadurch vermindert. Bei der 3 mm weiten Röhre, welche zu den unten mitgetheilten Beobachtungen diente, betrug der Knickungswinkel $\alpha = 1^\circ 53,5'$; ein Scalentheil im Mikroskop entsprach einer Verschiebung der Flüssigkeit um 0,0437 mm. Da der Flüssigkeitsfaden nach jeder Ablenkung mit erheblicher Genauigkeit, nämlich bis auf Bruchtheile eines Scalenintervalls, wieder in die alte Gleichgewichtslage zurückkehrte, so ergibt sich, dass das Instrument eine Druckdifferenz von ein Zehnmilliontel Atmosphäre noch anzeigt. Diese Genauigkeit hat nichts Ueberraschendes, wie man sofort erkennt, wenn man vergleichsweise die hydrostatischen Kräfte berechnet, welche die Luftblase einer gewöhnlichen, feineren Röhrenlibelle bei deren Neigung in Bewegung setzen. Diese Kräfte sind noch kleiner als die obigen.

Die Empfindlichkeit des Druckmessers und die Kleinheit der zu messenden Kräfte machen eine ganz besondere Vorkehrung für die Zu- und Ableitung der zu untersuchenden Gase nöthig. Da ein Zehnmilliontel einer Atmosphäre dem Schweredruck einer verticalen Luftsäule von nicht mehr als etwa 0,8 mm Höhe gleichkommt, so ist klar, dass, wenn die Libellenschenkel mit verschiedenen Gasen gefüllt sind, schon durch die Verschiedenheit der Gasschwere Druckdifferenzen entstehen können, welche die zu messenden Drucke bei weitem übersteigen.¹⁾ Daher wurde an das Ende der Libelle bei b mittels eines kurzen Gummischlauches das Rohrsystem $befg$ (s. Fig. 1) angesetzt und gehörig befestigt. Die Verbindung zwischen e und f war jedoch beweglich, sodass das gerade

1) Wollte man nach der im Eingang erwähnten Vergleichsmethode beobachten, so würde selbstverständlich dieselbe Schwierigkeit zu beachten sein.

Rohrstück fg möglichst genau in dieselbe Horizontalebene eingestellt werden konnte, in welcher die Kuppen der beiderseits mit Luft gefüllten Libelle einspielten. Die Röhre fg war mindestens 50 cm lang und endete mit einer feinen Öffnung. Zur Füllung mit dem zu untersuchenden Gase diente die enge Zuleitung hi , welche sich in den Libellenschenkel b bis nahe zur Kuppe d fortsetzt. Die Füllung geschieht langsam, indem man zugleich das Ende a der Libelle verschliesst. Wenn das ganze Rohrsystem von d bis g mit dem Gase erfüllt ist, so schliesst man den Hahn h und öffnet wiederum a . Nunmehr ist die Blase offenbar genau an derselben Stelle im Gleichgewicht, an welcher sie vor der Einführung des Gases einspielte, weil die Punkte d und g in derselben Horizontalebene liegen. Der Einfluss der ungleichen Gasdichte ist also compensirt, gleichgültig, welche Gasfüllung in der Röhre besteht. Diese Compensation ändert sich auch während der nun folgenden magnetischen Beobachtung für längere Zeit nicht, denn die bei g durch Diffusion langsam eindringende Luft muss erst bis zum Punkte f vorgeschritten sein, bevor sie Einfluss auf das Gleichgewicht der Gasmasse ausüben kann.¹⁾ Zu erwähnen ist ferner, dass selbst schwache

1) Bemerkung von Toepler: Wie sehr die aërostatischen Druckkräfte in Betracht kommen, zeigte sich, wenn man an dem Apparate nach geschehener Füllung, z. B. mit Leuchtgas, die Röhre fg um wenige Millimeter höher oder tiefer einstellte; es entstand sofort eine messbare Verschiebung der Libellenflüssigkeit. Ich will auch bemerken, dass schon früher Hr. Recknagel (Wied. Ann. 2, p. 291. 1877) sich mit ähnlichen feinen aërostatischen Messungen befasst hat. Recknagel misst mit seinem Differentialmanometer, welches aus einer schwach ansteigenden Röhre in Verbindung mit einem weiten Gefäss, ähnlich dem Druckmesser des Riess'schen Luftthermometers besteht, den Unterschied des Bodendrucks, welcher zwischen einer 2 m hohen Gassäule und einer gleich hohen Luftsäule besteht, und berechnet daraus das specifische Gewicht des Gases. Ich kann nicht nur die Angaben des Hrn. Recknagel bezüglich der Brauchbarkeit der Methode bestätigen, sondern auch hinzufügen, dass zu derselben Gasdichtenbestimmung mit meiner Libelle eine Gassäule von nur 0,1 anstatt 2 m völlig ausreichte, da der Ausschlag z. B. für Leuchtgas dann schon mehr als 50 Mikroskoptheile betrug. Recknagel hat auch schon Petroleum als manometrische Flüssigkeit empfohlen. Die mit der Libelle ermöglichten, enorm feinen Druckmes-

Luftströmungen in der Nähe von *a* die Libelle beunruhigen; man thut daher gut, in dieses Rohrende einen lockeren Baumwollpfropfen zu stecken.

Unter Beachtung der besprochenen Vorsichtsmaassregeln ergeben sich recht befriedigende Uebereinstimmungen in den Beobachtungen der durch die Gase veranlassten magnetischen Verschiebungen. Als Beispiel lassen wir eine Reihe successiver Mikroskopablesungen folgen, welche bei Sauerstofffüllung erhalten wurden, als das Feld mit 10 Bunsenelementen abwechselnd magnetisirt und entmagnetisirt wurde:

| | | | | |
|------|------|------|------|---------------|
| 11,5 | 12,1 | 12,0 | 11,5 | Mittel: 11,8. |
| 34,9 | 34,7 | 34,1 | „ | 34,6. |

Die mittlere Differenz 22,8 ist jedenfalls bis auf wenige Procente genau. Durchschnittlich gleich gute Einstellungen ergaben die anderen Gase. Zu bemerken ist, dass, wie auch die eben mitgetheilte Zahlenreihe erkennen lässt, die Ausschläge der Libelle bei unveränderter Füllung und wiederholter Magnetisirung stetig, aber langsam kleiner wurden, was wohl zum Theil in der einseitigen Veränderung des Flüssigkeitsfadens durch Gasabsorption begründet sein mag.

Eine Hauptsache ist selbstverständlich die Beschaffenheit der Libellenflüssigkeit. Dieselbe muss, abgesehen von ihren chemischen und molecularen Beziehungen zu den Gasen, leicht beweglich und sehr gut benetzend sein und eine niedrige Dampfspannung besitzen. Ausser dem vortrefflich geeigneten Petroleum vom specifischen Gewicht 0,801 wurden Alkohol und Schwefelsäure versucht, ersterer bei Beobachtungen mit Sauerstoff. Diese stimmten mit den mittelst Petroleum angestellten gut überein. Schwefelsäure erfordert

sungen scheinen mir geeignet, gewisse Eigenschaften und Erscheinungen bei Gasen und Dämpfen, z. B. Ausdehnungscoefficienten, Dissociation u. s. w., ohne Einfluss der Gefässwände zu studiren. Zu den beschriebenen magnetischen Beobachtungen sei noch bemerkt, dass die beiden Kuppen zum Zwecke der Compensation auch in zwei getrennten, jedoch durch einen und denselben Strom erzeugten und miteinander abgeglichenen Magnetfeldern liegen können. Diese Anordnung bietet die Möglichkeit, das magnetische Verhalten der Gase mit Bezug auf das Vacuum zu untersuchen.

ein weites Libellenrohr und kann wegen der grossen Trägheit des Einspiels nur ausnahmsweise benutzt werden.

Die in der folgenden Tabelle mitgetheilten Resultate sind ohne weiteres verständlich. Für jedes Gas wurde die beim Magnetisiren des Feldes entstehende Verschiebung der Flüssigkeit gemessen und davon in Abzug gebracht die unmittelbar vorher beobachtete kleine Verschiebung bei beiderseitiger Luftfüllung. Die Zahlen der Tabelle sind bei mehrmals erneuerter Gasfüllung erlangte Mittelwerthe solcher Differenzbeobachtungen und beziehen sich auf das C.-G.-S.-System. Die Feldintensitäten wurden für die hauptsächlich angewandten Stromstärken nach der Quincke'schen Methode mit einer Eisenchloridlösung vom specifischen Gewichte 1,505 bestimmt, deren magnetische Constante k nach Quincke 329 beträgt. Kleine Variationen der Feldstärke wurden nach dem Gange einer in der Entfernung aufgestellten geachteten Bussole in Rechnung gezogen.

| Namen des Gases | Feld- stärke C.G.S. | Beobacht. Verschie- bung in Scalenth. | Druck- säule in Millim. | Beobacht. magnet. Druck in g pro qem | Magneti- sche Constante $k \cdot 10^{10}$ |
|-----------------------|---------------------------|--|----------------------------------|---|--|
| Sauerstoff (unrein) / | 6600 | 20,0 | 0,0288 | 0,00231 | 0,590 |
| Vorversuch) . . | 8030 | 28,9 | 0,0416 | 0,00333 | 0,517 |
| Sauerstoff rein . . | 7800 | 34,9 | 0,0503 | 0,00403 | 0,662 |
| Stickoxyd | 6400 | 2,6 | 0,0037 | 0,00080 | 0,120 |
| Stickstoff rein . . | 9100 | -11,9 | -0,0171 | -0,00137 | -0,165 |
| Stickoxydul | 9920 | -13,4 | -0,0193 | -0,00155 | -0,158 |
| Wasserstoff | 9730 | -14,5 | -0,0209 | -0,00167 | -0,176 |
| Kohlensäure | 10020 | -15,0 | -0,0216 | -0,00173 | -0,172 |
| Kohlenoxyd | 10100 | -11,7 | -0,0169 | -0,00135 | -0,132 |
| Schwefelwasserstoff | 10100 | -15,4 | -0,0222 | -0,00178 | -0,175 |
| Cyan | 9920 | -15,6 | -0,0225 | -0,00180 | -0,183 |
| Leuchtgas | 9980 | -12,9 | -0,0186 | -0,00149 | -0,150 |

Die beiden ersten Versuche wurden mit verunreinigtem Sauerstoff angestellt und hatten nur den Zweck, zu constatiren, dass, wie bei Flüssigkeiten, so auch bei Gasen die magnetischen Drucke den Quadraten der Feldstärken proportional sind. Dies ist in der That der Fall, da jene Quadrate etwa im Verhältniss 43 : 65 stehen, und die nach Formel (1) berechneten Werthe für k bis auf einen in die Fehlergrenzen fallenden Unterschied übereinstimmen.

Grössere Sorgfalt wurde auf den dritten und fünften Versuch mit reinem Sauerstoff und Stickstoff verwendet; ersterer war electrolytisch¹⁾, letzterer aus Luft durch Anwendung von Pyrogallussäure und Natron dargestellt. Diese Beobachtungen können als vorläufige Probe für eine Beziehung dienen, welche durch das Verhalten schwach magnetischer Substanzen in Lösung, sowie besonders durch die von Plücker²⁾ und E. Becquerel³⁾ mit Sauerstoff, Stickstoff und Luft angestellten Wägungsversuche sehr wahrscheinlich gemacht ist, nämlich: dass die magnetische Druckwirkung der Gase, bezogen auf den leeren Raum, unter sonst gleichen Umständen dem Gasdrucke proportional ist, und dass in Gemischen chemisch indifferenter Gase die magnetischen Drucke sich addiren.

Seien k_o , k_n und k_l die unbekannten magnetischen Drucke, welche Sauerstoff, Stickstoff und Luft in der Feldeinheit auf die Flächeneinheit gegenüber dem Vacuum entwickeln würden, wenn diese Gase die dem normalen Atmosphärendrucke entsprechende Dichte besitzen, so beobachtet man in Wirklichkeit durch die obigen Libellenversuche zwei Werthe A und B , welche durch die Gleichungen:

$$(2) \quad k_o - k_l = A \quad \text{und:}$$

$$(3) \quad k_n - k_l = B$$

definirt sind. Seien nun m und n die Partialdrucke (in Atmosphären ausgedrückt), welche Sauerstoff und Stickstoff in ihrer Mischung als Luft besitzen, so würde nach obiger Beziehung:

$$(4) \quad k_l = m k_o + n k_n$$

sein, wobei:

$$(5) \quad 1 = m + n$$

ist. Wegen Gl. (5) ist es nicht möglich, aus (2), (3) und (4) die Werthe k_o und k_n zu rechnen; diese Grössen können überhaupt aus Gasgemischen bei unverändertem Gesamt-

1) Das Gas enthielt nur eine durch den Geruch kaum wahrnehmbare Spur von Ozon.

2) Plücker, Pogg. Ann. 83. p. 87. 1851 u. 84. p. 161. 1851.

3) E. Becquerel, Ann. de chim. et de phys. 44. p. 209. 1855. Vgl. auch G. Wiedemann, Electricität. 3. p. 864 u. f.

drucke nicht bestimmt werden. Wohl aber geben die Gleichungen die Bedingung:

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{m}.$$

Da A und B die beiden Werthe von k sind, welche nach der Tabelle für Sauerstoff und Stickstoff gefunden wurden, so folgt für das Verhältniss n/m aus der magnetischen Beobachtung der Werth 4,0; in Wirklichkeit ist er 3,8; der Versuch kann daher als Bestätigung der vorausgesetzten Beziehung gelten.

Als nahezu rein kann auch noch wegen seiner Darstellung aus reinem Ammoniumnitrat das untersuchte Stickoxydul gelten; seine Constante stimmt mit derjenigen des Stickstoffes sehr nahe überein.

Die Untersuchung des magnetischen Stickoxydgases war umständlich, da das Petroleum vor der Einwirkung der höheren Oxyde des Stickstoffes geschützt werden musste. Daher wurde die Libelle zuerst mit Kohlensäure gefüllt und diese durch Stickoxyd verdrängt. Das Gas erwies sich als mit 17 Volumenprocenten Stickoxydul verunreinigt und ergab aus den Beobachtungsdaten direct berechnet die magnetische Constante 0,073. Daraus wurde die in der Tabelle verzeichnete Grösse $k 10^{10}$ des reinen Gases nach der Gleichung:

$$83(k 10^{10}) - 17.0,158 = 100.0,073,$$

welche aus der oben besprochenen Relation folgt, berechnet.

Für die übrigen Gase können die Zahlen der letzten Columnne nur als erste Annäherung gelten, da dieselben, wenn auch vorsichtig dargestellt, auf ihre Reinheit nicht geprüft wurden. Bei allen Beobachtungen wurde weder auf den Feuchtigkeitsgehalt des Gases, noch auf den Barometerstand Rücksicht genommen. Von den Unterschieden der Grösse k lässt sich wenigstens das eine bestimmt behaupten, nämlich dass sie in der Hauptsache nicht von Fehlern der Libellenablesung herkommen, und dass daher eine sorgfältige Wiederholung dieser oder ähnlicher Beobachtungen mit Berücksichtigung aller Correctionen nicht zwecklos erscheint.

Die älteren Beobachtungen von Faraday, Plücker und

Becquerel* lassen es noch zweifelhaft, wie sich Stickstoff, Stickoxydul und die meisten anderen Gase unserer Tabelle gegen den leeren Raum verhalten. Jedoch weiss man, dass der Magnetismus oder Diamagnetismus der beiden genannten Gase im Vergleich zum Magnetismus des Sauerstoffes sehr kleine Werthe hat. Man kann daher mit einiger Annäherung den Werth der Grösse $k10^{10}$ für Sauerstoff und Stickoxyd mit Bezug auf den leeren Raum angeben, indem man zu den Ziffern der letzten Columnne unserer Tabelle die Zahl $+0,16$ hinzufügt, welche zugleich angenähert die magnetische Constante der Luft darstellen würde. Der Werth für Sauerstoff wird dann 0,82. Vergleicht man ihn mit dem Mittelwerthe der von Quincke beobachteten und gleichfalls auf den leeren Raum umgerechneten Zahlen für den Diamagnetismus des Wassers, so ergibt sich das Verhältniss Wasser : Sauerstoff $= -10:2,0$. Nach Becquerel folgte für das Verhältniss dieser Magnetismen aus Wägungsbeobachtungen $-10:1,82$, aus Torsionsbeobachtungen $-10:1,91$.

Von der enormen Kleinheit der in Rede stehenden Drucke in schwächeren Magnetfeldern kann man sich eine ungefähre Vorstellung verschaffen, wenn man nach der obigen Erörterung die Fläche rechnet, auf welche unsere Atmosphäre bei der mittleren Totalintensität des Erdmagnetismus für Deutschland (0,46 C.-G.-S.) den magnetischen Druck 1 g ausübt. Diese Fläche beträgt ungefähr eine halbe Quadratmeile.

Schliesslich sei bemerkt, dass die oben beschriebene Versuchsanordnung von Töpler herrührt; derselbe hat auch die ersten Beobachtungen an Sauerstoff und Leuchtgas angestellt. Hennig setzte die Beobachtungen im Töpler'schen Laboratorium fort und ermittelte die in der Tabelle angegebenen Zahlen.

Nachtrag. Nachdem die obige Arbeit bereits für die Sitzungsberichte übergeben war, erfuhren wir durch gütige Mittheilung des Hrn. Quincke, dass derselbe seit 1884 eine magnetische Untersuchung der Gase selbst durchgeführt hat und demnächst die Ergebnisse zu veröffentlichen gedenkt, dass

auch vorläufige Mittheilungen in den „Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg“ vom 2. Mai 1884 und in einem Vortrage vor der British Association im verflossenen September stattgefunden haben. Letzterer Vortrag war uns unbekannt, und auch die erstere Notiz hatten wir leider nicht beachtet, was hauptsächlich daher kommt, dass in der Ueberschrift zu der eingangs citirten Abhandlung in Wiedemann's Annalen von 1835 gesagt ist: „Ein Theil der Resultate dieser Untersuchungen wurden der k. Academie und dem naturhistorisch-medicinischen Verein zu Heidelberg am 2. Mai 1884 mitgetheilt,“ und dass in der Abhandlung selbst jene Notiz über Gase, die in dem Heidelberger Berichte vorkommt, nicht enthalten ist. Bei nachträglichem Vergleiche dieser Notiz mit unseren vorläufigen Resultaten finden wir allerdings keine grosse Uebereinstimmung, was die ausgesprochene Ansicht über die Schwierigkeit der Beobachtungen bestätigt; unsere Ergebnisse, soweit sie in Betracht kommen, schliessen sich eher an die älteren Beobachtungen von Faraday und Becquerel an. In Erwartung der in Aussicht stehenden, genaueren Resultate des Hrn. Quincke sei nur bemerkt, dass für die Fortsetzung unserer Beobachtungen die Absicht bestand, diejenigen Gase, deren Constanten bezüglich des Vacuums voraussichtlich klein sind, wie Stickstoff, Stickoxydul, Wasserstoff u. s. w. paarweise nach unserer Methode, und zwar in verdichtetem Zustande zu vergleichen. Es lässt sich hierzu, wie leicht einzusehen, mit einer verhältnissmässig einfachen Zuthat dieselbe Versuchsanordnung benutzen, deren Vorthelle dann möglichst genaue Resultate erwarten lassen. Die Beziehung auf den leeren Raum würde dann durch besondere Untersuchung an einem einzelnen Gase herzustellen sein.

**VI. Ueber Fraunhofer'sche Ringe
und die Farbenerscheinungen behauchter Platten;
von Wilhelm Donle.**

(Aus dem physikalischen Institut der Universität München.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 2.)

Unter den überaus mannigfaltigen und farbenprächtigen, der Forschung immer noch neuen Stoff bietenden Phänomenen, die man mit der Bezeichnung der „Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen“ zusammenfasst, sind sowohl die sogenannten Fraunhofer'schen Ringe, als auch insbesondere die in der Ueberschrift genannten Farbenringe behauchter Platten in allen Einzelheiten ihrer Erscheinung noch nicht völlig aufgeklärt, und es soll deshalb in Folgendem an der Hand zahlreicher Experimente versucht werden, einige neue Momente zur Erklärung dieser Phänomene beizubringen.

Fraunhofer¹⁾ hat bekanntlich die nach ihm benannten Ringe nicht nur durch eine grosse Anzahl unregelmässig vertheilter Stanniolblättchen von gleichen Durchmesser, sondern auch durch Bestreuen einer Glasplatte mit Lycopodiumsamen, der sich durch die überaus gleichmässige Grösse der einzelnen Pollenkörner auszeichnet, hervorgebracht und als Beugungsphänomen erklärt. Aber erst Verdet²⁾ hat unter Anwendung des von Babinet³⁾ aufgestellten Princip, dass ein dunkles Schirmchen oder eine Gruppe solcher, abgesehen von der Schwingungsphase, dieselbe Beugungserscheinung gibt, wie gleichgestaltete Oeffnungen, gezeigt, dass bei Anwendung sehr vieler unregelmässig vertheilter Schirmchen die von einem einzigen hervorgebrachte Erscheinung nicht ihrem Wesen, sondern nur der Intensität nach geändert wird. Ein späterer Versuch Osann's⁴⁾, die Lycopodiumringe durch Dispersion des Lichtes in der zum Experiment verwendeten

1) Schumacher, Astronom. Abhandlungen Heft 3. p. 58f.

2) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) 34. p. 129. 1852.

3) Babinet, Compt. rend. 4. p. 638. 1837.

4) Osann, Verhandlungen der physik.-med. Gesellsch. in Würzburg. 9. p. 161. 1859.

Glastafel zu erklären, darf schon wegen der Farbenfolge als vollkommen missglückt betrachtet werden. Neuerdings hat Hr. Exner¹⁾ in einer Abhandlung, die ich unten noch mehrmals zu erwähnen Gelegenheit haben werde, besonders auf die röthlich gelbe Aureole, von der die Lichtquelle unmittelbar umgeben erscheint, aufmerksam gemacht zum Unterschied von den Ringen behauchter Platten, bei denen der erste Ring durch einen völlig dunklen Raum von der direct gesehenen Lichtquelle getrennt ist. Die Ringe behauchter Platten erklärt Hr. Exner²⁾ für Fraunhofer'sche Ringe, deren Aureole infolge nicht völlig unregelmässiger Vertheilung der Wassertüpfchen, wie auch schon Dove³⁾ vermuthete, sich zum Theil in einen dunklen Raum verwandelt hat, und zwar soll eine den Dreiecksgittern analoge Anordnung den dunklen Raum, die nahezu gleiche Grösse der Wassertüpfchen die Ringe bedingen.

Es dürfte vielleicht zunächst von Interesse sein, auf einige Besonderheiten der Lycopodiumringe hinzuweisen, die ich nirgends erwähnt fand.

Die Lycopodiumringe bleiben wegen der fast genau gleichen Grösse der Pollenkörner und ihrer ganz unregelmässigen Vertheilung völlig unverändert um die centrale Lichtquelle herum stehen, wie man auch die bestäubte Platte senkrecht gegen die directe Strahlenrichtung verschieben mag. Es ist dies auch erklärlich, da überhaupt die ganze Ringerscheinung nur von der merklich gleichen Grösse der bewegenden Körperchen, nicht aber von ihrer Lagerung abhängig ist. Ein im ersten Augenblick überraschendes, jedoch leicht zu deutendes Resultat ist es aber, dass das Ringsystem auch noch ohne die geringste Aenderung stehen bleibt, wenn die bestäubte Platte zum directen Lichtstrahl irgendwie geneigt wird. Dieses Ergebniss erklärt sich dadurch vollkommen, dass die einzelnen Pollenkörner mit nur ganz geringen Abweichungen Kugeln von gleichem Radius sind, und dass in-

1) Exner, Wien. Ber. 76. (2). p. 522. 1877.

2) Exner, l. c. p. 530.

3) Dove, Pogg. Ann. 26. p. 310. 1832.

folgedessen von einem parallelen Lichtbündel durch irgend ein solches Pollenkorn stets ein Strahlenbündel von durchweg gleichem Querschnitt aufgehalten wird, weshalb die fundamentale Beugungserscheinung für jedes beugende Körperchen die gleiche ist. Denkt man sich nun bei Drehung der Platte um irgend eine zur Strahlenrichtung senkrechte Axe die auf der Platte aufgestreuten Pollenkörner durch ihre Projectionen auf einem zur directen Strahlenrichtung senkrechten Schirm ersetzt, was, wie Knochenhauer¹⁾ beweist, für kleine von der Einfallrichtung des Lichtes aus gerechnete Beugungswinkel gestattet ist, so ist klar, dass die kugelförmigen Körner, weil ihre Projectionen stets die gleichen bleiben, auch jetzt noch von jedem einfallenden elementaren Lichtbündel den gleichen Theil wie vorher hinwegnehmen, dass ferner die Lagerung dieser Projectionen ebenso willkürlich ist, als die ursprüngliche Anordnung der Samenkörner auf der Platte, und dass infolgedessen die Erscheinung beim Drehen der Platte genau die nämliche sein muss.

Es lässt sich erwarten, dass bei einer Ersetzung der beugenden Kugeln durch ebene runde Scheibchen die Drehung der Platte auch eine Aenderung der Beugungserscheinung hervorbringt, und zwar müssen die bei senkrechter Incidenz der Lichtstrahlen kreisförmigen Ringe bei einer Drehung der Platte in elliptische übergehen, entsprechend der nun elliptischen Projectionen der beugenden Körperchen und ihrer genau gleichen Orientirung. Derjenige Ringdurchmesser, welcher der Drehungsaxe der Platte parallel ist, bleibt unverändert und wird die kleine Axe der neuen Ellipse, während der hierauf senkrechte Durchmesser des Farberinges gemäss der durch die Drehung verursachten Verkleinerung des entsprechenden Scheibchendurchmessers in der Projection grösser werden muss. Obwohl dieses Verhalten bei flachen runden Scheibchen an und für sich evident ist, glaubte ich es doch auch experimentell bestätigen zu müssen. Am einfachsten erhält man solche runde und unregelmässig vertheilte Scheibchen, wenn man einen Tropfen Blut, etwas mit

1) Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichts, Berlin 1839. p. 15.

Wasser verdünnt, auf einer Glasplatte ausbreitet, ein Verfahren, das auch Delezenne¹⁾ in einer Abhandlung „Sur les couronnes“ angewendet hat. Man erhält auf diese Weise bei senkrechter Incidenz der Lichtstrahlen ein sehr schönes Ringsystem mit Aureole unmittelbar um die Lichtquelle, das in allen Einzelheiten mit den Lycopodiumringen übereinstimmt, jedoch sehr viel grösser als dieses ist. Man muss deshalb, um diese Ringe genügend lichtstark zu erhalten und sie vollständig zu überschauen, das Auge der Lichtquelle sehr nahe bringen. Da nun die die Erscheinung verursachenden Blutkörperchen flach und tellerförmig sind, so gehen, wie vorausgesagt, beim Neigen der Platte gegen die Richtung des Lichtstrahles in der That die kreisförmigen Farbenringe in elliptische über, deren grosse Axe senkrecht zur Drehungsaxe der Platte liegt.

Ein weiteres sehr beachtenswerthes Untersuchungsergebniss lässt einige Vermuthungen zu betreffs der Entstehung der die direct gesehene Lichtquelle umgebenden Aureole gebeugten Lichtes, ein Resultat, das auch Hr. Exner¹⁾ vorübergehend erwähnt. Derselbe beobachtete nämlich bei der mit den Lycopodiumringen identischen Beugungsercheinung eines mit sehr vielen gleichen Oeffnungen unregelmässig bedeckten Schirmes, dass bei Anwendung eines rothen Glases die Aureole nicht gleichmässig erhellt, sondern aus überaus zahlreichen, durch dunkle oder doch lichtschwächere Zwischenräume getrennten Pünktchen zusammengesetzt war. Die gleiche Beobachtung wie Hr. Exner habe ich ebenfalls bei monochromatischem Lichte gemacht; völlig neu dürfte aber sein, dass sich die Aureole auch noch in lauter vollkommen getrennte Lichtpünktchen auflöst, wenn man von der bestäubten Platte mittels eines runden Sehloches von circa $\frac{1}{4}$ — $1\frac{1}{2}$ mm Durchmesser eine kleine, aber sonst beliebige Partie auswählt und durch diese hindurch die Lichtquelle betrachtet. Es treten dabei natürlich auch die Beugungsercheinungen des angewendeten Sehloches auf, die sich aber

1) Delezenne, Mémoires de la société des sciences de Lille. I. p. 29 ff. 1837—38.

1) Exner, l. c. p. 525.

als ein den Lichtpunkt sehr nahe umschliessendes, äusserst feines Ringsystem vollkommen getrennt von der übrigen Erscheinung erkennen lassen.

Diese Pünktchen sind verschieden gestaltet, meist rund, oft aber auch mehr oder weniger langgestreckt; sie sind gegen das directe Flammenbild zu gelblich bis weiss, von der Farbe der Lichtquelle, am entgegengesetzten Saume schwach orange und roth gefärbt. Die Rothfärbung ist am Saume der Aureole besonders lebhaft und übertrifft hier sogar die rothen Säume der Ringe an Intensität. Gleichzeitig mit diesen die Aureole bildenden Pünktchen und dem rothen Saume der Areole selbst ist wenigstens der erste Farbenring zwar lichtschwach, entsprechend der jetzt geringeren Anzahl der beugenden Körperchen, aber doch noch vollkommen deutlich erkennbar. Sowohl der Saum der Aureole, als der noch sichtbare erste Farbenring sind jedoch nicht mehr vollständig zusammenhängend, was wohl davon herrühren mag, dass durch Anwendung der kleinen Oeffnung eine neue Beugungserscheinung mit ihren Minimis über die ursprüngliche Ringerscheinung sich lagert, ähnlich wie es Hr. Exner¹⁾ beim experimentellen Nachweis des Principis von Babinet in den Figuren 6, 7, 8 und 12 darstellt.

Bei eingehender Betrachtung der die Aureole zusammensetzenden Lichtpünktchen fiel es mir auf, dass ein Paar gleichgestaltete stets symmetrisch zu beiden Seiten der direct gesehenen Lichtquelle lagen, was besonders dann mit Sicherheit festgestellt werden konnte, wenn die Pünktchen nicht rund, sondern länglich und dadurch besonders kenntlich gestaltet waren. Ausser dieser paarweisen Anordnung liess sich keine weitere Regelmässigkeit der Vertheilung constataren. Besonders charakteristisch ist nun, dass wenn man das Sehloch auf der bestäubten Platte langsam hin und her schiebt, diese Pünktchen gewissermassen durcheinandergewirbelt werden, andere und andere zur Lichtquelle symmetrische Lagen, auch meist ganz andere Formen annehmen, während ja, wie schon oben bemerkt, die Ringe selbst und

1) Exner, l. c. p. 526.

der rothe Saum der Aureole vollkommen starr mit dem leuchtenden Punkte verbunden scheinen. Sehr bemerkenswerth ist ferner, dass wenn die bestäubte Platte gedreht wird, während man unter Anwendung eines feinen Sehloches die Auflösung der Aureole in leuchtende Pünktchen wahrnimmt, dann immer noch der rothe Saum der Aureole und der bei kleinem Sehloch meist nur sichtbare erste Ring ganz unverändert stehen bleibt, hingegen die Pünktchen ihren Abstand vom mittleren Lichtpunkte ändern, und zwar wird der Abstand in der zur Drehungsaxe senkrechten Richtung grösser.

Auf Grund dieser Thatsachen lässt sich die Entstehung der Lycopodiumringe und der hellen Aureole folgendermassen auf ganz einfache Weise erklären: Die Ringe entstehen, wie schon Fraunhofer¹⁾ sie erklärt, durch zahlreiche und dadurch die Intensität der Erscheinung bedingende Uebereinanderlagerung des durch ein einzelnes beugendes Körperchen entstehenden elementaren Ringphänomens. Dabei ist als erster dieser Ringe der gefärbte Saum der an die Lichtquelle sich anschliessenden Aureole anzusehen. Es folgt dies nicht nur aus dem oben erwähnten Verhalten des Saumes der Aureole bei Veränderung der Stelle, durch welche hindurch man den Lichtpunkt betrachtet, sondern auch aus einer Reihe von Messungen der Ringdurchmesser, die ich mit dem Spectrometer ausführte. Trotz der beträchtlichen Lichtstärke der Ringe bei Beobachtung mit blossem Auge wird die Erscheinung im Spectrometer äusserst lichtschwach, und sind die Grenzen der Aureole und des ersten Ringes nur schätzungsweise einzustellen; der zweite Ring, der doch mit blossem Auge stets sehr deutlich sichtbar ist, ist bei Messung mit dem Spectrometer überhaupt nicht, oder nur bei sehr intensivem und mit Linsen auf die sehr kleine Collimatoröffnung concentrirtem Sonnenlicht zu erkennen. Innerhalb welcher beträchtlicher Grenzen infolge dieser Umstände die gemessenen Beugungswinkel schwanken, trotzdem nach einer erstmaligen Einstellung unter Zwischenschaltung von Ruhepausen

1) Schumacher, astron. Abhandl. Heft 3. p. 56.

für das Auge diese Einstellung mehrmals controlirt und eventuell corrigirt wurde, möge folgende, aus den directen Ablesungen sich ergebende Tabelle zeigen:

Beugungswinkel für das äusserste Roth.

| a) Der Aureole | b) des ersten Ringes |
|-----------------------|------------------------|
| 1° 18' 50" | 2° 22' 20" |
| 1 19 10 | 2 22 50 |
| 1 19 20 | 2 23 10 |
| 1 18 40 | 2 24 20 |
| 1 18 50 | 2 23 10 |
| 1 19 50 | 2 22 10 |
| 1 18 30 | 2 22 40 |
| 1 19 0 | 2 23 50 |
| 1 19 10 | 2 24 10 |
| im Mittel 1° 19' 2,2" | im Mittel 2° 23' 11,1" |

Den Beugungswinkel für den zweiten Ring habe ich leider in keinem Falle, auch nicht bei besonders günstigem Sonnenlicht mit einiger Sicherheit messen können. Da der Radius der kreisförmigen Oeffnung am Collimator unter dem Winkel 3' 10" erschien, so sind die zur Berechnung zu ziehenden Winkel 1° 15' 52,2" und 2° 20' 1,1". Berechnet man nach der Verdet'schen Formel¹⁾ für den n ten dunklen Ring den Durchmesser der beugenden Körperchen:

$$d = \frac{(0,22 + n) \lambda}{\sin \varphi},$$

indem man mit Exner²⁾ eine mittlere Wellenlänge $\lambda = 0,000550$ zu Grunde legt und auf die Bemerkung Verdet's³⁾ Rücksicht nimmt, dass die gemessene äusserste rothe Grenze der Ringe, wo die Lichtintensität sehr gering ist, der Lage nach zusammenfällt mit dem Minimum des mittleren weissen Lichtes von obiger Wellenlänge, so erhält man die Durchmesser:

0,03041 und 0,02999 mm.

Dagegen ergab die directe mikrometrische Messung unter dem Mikroskop aus zwanzig ersten Messungen:

0,03167 mm, aus zwanzig weiteren

0,03174 mm, also im Mittel

0,03170 mm.

1) Verdet, Wellentheorie des Lichts, deutsch von Exner, 1. p. 207.

2) Exner, l. c. p. 526.

3) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) 34. p. 137. 1852.

Die Abweichungen von diesen letzteren, sehr gut übereinstimmenden Werthen betragen sonach ca. 4 und 5,4 Proc., welche in Anbetracht der kaum 1 Proc. übersteigenden Abweichungen der Winkelmessungen vom Mittel doch zu beträchtlich sind, um für die Bestimmung der Durchmesser der beugenden Körperchen die Verdet'sche Annahme für zulässig zu erachten. Ich habe daher neuerdings Messungen gemacht, und zwar mit rothem Licht, das nach der spectroscopischen Untersuchung zwischen den Wellenlängen 0,000 732 und 0,000 620 mm gelegen war, sonach eine mittlere Wellenlänge von $\lambda = 0,000\ 676$ mm besass. Die Einstellung geschah diesmal, wie es auch die Theorie verlangt, auf die Minima, wovon das erste sehr gut, das zweite aber schwieriger zu erkennen war. Doch zeigen die gefundenen Winkelwerthe, dass es mir durch wiederholte Controle dieser schwierigen Einstellung gelungen ist, auch in letzterem Falle genügende Uebereinstimmung zu erzielen. Zur Berechnung habe ich ferner nicht die abgekürzte Verdet'sche Formel, sondern die von Prof. Lommel in den Tabellen seiner Abhandlung: „Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung“¹⁾, gegebenen genaueren Werthe der Gangunterschiede der Randstrahlen für die Minimumstellen benutzt, nämlich:

$$d = \frac{1,21967 \lambda}{\sin q_1} = \frac{2,23313 \lambda}{\sin q_2}.$$

Es ergab sich als

Beugungswinkel

| für das erste Minimum | | | für das zweite Minimum | | |
|-----------------------|--------|-------|------------------------|--------|--------|
| 1° | 30' | 10" | 2° | 45' | 10" |
| 1 | 29 | 50 | 2 | 43 | 40 |
| 1 | 29 | 40 | 2 | 44 | 40 |
| 1 | 30 | 0 | 2 | 44 | 10 |
| 1 | 29 | 30 | 2 | 45 | 0 |
| 1 | 29 | 20 | 2 | 45 | 20 |
| 1 | 30 | 20 | 2 | 45 | 40 |
| 1 | 29 | 50 | 2 | 44 | 50 |
| 1 | 29 | 20 | 2 | 45 | 10 |
| 1 | 29 | 40 | 2 | 44 | 40 |
| 1 | 30 | 10 | 2 | 44 | 10 |
| 1 | 29 | 40 | 2 | 44 | 20 |
| im Mittel | 1° 29' | 47,5" | im Mittel | 2° 44' | 44,16" |
| bezw. | 1° 26' | 37,5" | bezw. | 2° 41' | 34,16" |

1) Lommel, Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15. p. 167. 1870.

Hieraus berechnet sich:

$$d = 0,03272 \text{ mm} \quad \text{und} \quad d = 0,03213 \text{ mm},$$

sonach Abweichungen von nur 3,2 und 1,3 Proc. Es dürfte daher nach letzteren Resultaten wohl gerechtfertigt erscheinen, die Verdet'sche Annahme dahin zu berichtigen, dass die äusserste rothe Grenze der Farbenringe nicht genau zusammenfällt mit den Minimumstellen für mittleres weisses Licht, sondern dass vielmehr, wenn auch die Messungen Fraunhofer's¹⁾ berücksichtigt werden, auf diese Stellen etwa die Minima für $\lambda = 0,000570$ zu liegen kommen.

Was nun den Ursprung der Aureole betrifft, so entsteht dieselbe durch gegenseitige Einwirkung solcher Strahlen, die an mindestens zweien, unter günstigen Umständen an mehreren zufällig in nahezu gleichen Abständen oder in Parallellreihen angeordneten Körperchen gebeugt worden sind. Denn erstens ist durchaus kein Grund vorhanden, warum bei der Hervorbringung des Phänomens nur an einem einzigen Körperchen gebeugte Strahlen thätig sein sollen, und warum nicht auch Strahlen, die, an verschiedenen Körperchen gebeugt, nach derselben Richtung gehen, miteinander interferiren. Ferner ist, wie es in der That stattfindet, die stetige Veränderung des Aussehens der durch ein kleines Sehloch in Punkte aufgelösten Aureole beim Verschieben der kleinen Oeffnung auf der bestäubten Platte eine nothwendige Folge der obigen Erklärung, da die Anordnung der Körperchen und folglich die gegenseitige Einwirkung der an ihnen gebeugten Strahlen von Stelle zu Stelle wechselt. Schliesslich muss irgend ein zur Lichtquelle symmetrisches Punktpaar dieser aufgelösten Aureole, da sein Abstand nach obiger Ansicht nicht vom Durchmesser, sondern von der gegenseitigen Entfernung der Körperchen abhängt, vom direct gesehenen Lichtpunkt nach dem Rande der Aureole hinrücken, jemehr die Platte gedreht, oder mit anderen Worten, der zur Bestimmung des Beugungswinkels zu berücksichtigende gegenseitige Abstand der einzelnen Lycopodiumkörperchen, bzw. ihrer Projectionen auf einem zur Strahlenrichtung senkrechten Schirm, verkleinert wird. Auch diese

1) l. c. p. 58.

Folgerung wird, wie bereits erwähnt, durch die Erfahrung bestätigt.

Dass solche die Aureole zusammensetzende Punktpaare stets innerhalb des ersten Ringes, d. h. innerhalb des als Ring zu betrachtenden rothen Saumes der Aureole fallen müssen, ist ohne weiteres klar, wenn man berücksichtigt, dass die Entfernung gleichliegender Ränder zweier oder mehrerer zufällig regelmässig angeordneter *Lycopodium*körner mindestens gleich, in den allermeisten Fällen grösser ist als der Durchmesser eines Körnchens, und dass folglich das Beugungsbild, welches aus der gegenseitigen Einwirkung der an gleichliegenden Rändern gebeugten Strahlen entsteht, innerhalb des von einem einzigen Körperchen herrührenden Beugungsphänomens liegen muss. Wenn ferner ein farbiges, z. B. ein rothes Glas, das fast nur rothe Strahlen durchlässt, die Aureole ebenfalls in einzelne Pünktchen auflöst, so erklärt sich dies, wie folgt: Die erwähnten Pünktchen sind in Wirklichkeit kleine erste Beugungsspectren, die noch deutlich roth gesäumt sind; die übrigen Farben geben wegen der Uebereinanderlagerung einer Reihe von solchen kleinen Spectren im selben Punktpaar, das ja von verschiedenen, aber analog angeordneten Partien der bestreuten Platte herrührt, möglicherweise auch infolge der Ueberdeckung durch zweite, nahezu auf dieselbe Stelle treffende kleine Spectra, in ihrer Zusammenwirkung einen gelblichweissen, vielleicht auch schwach orangefarbenen Ton. Nimmt man nun durch ein rothes Glas alle anderen Farben ausser der rothen hinweg, so bleibt offenbar nur der rothe Saum jedes dieser kleinen Spectren, während die übrigen Farben und somit der gelblichweisse Rest eines solchen Pünktchens verschwunden ist. Die Aureole erscheint nicht mehr continuirlich, sondern rothpunktirt auf dunklem Grunde. Als weiterer Beweis mag noch angeführt werden, dass die Punktirung um so bestimmter auftritt, je besser das Glas nur eine Farbe durchlässt; bei einem hellen rothen Glas, das nur ganz schwache Absorption im Grün zeigt, ist dieselbe kaum wahrzunehmen, dagegen tritt dieselbe stets bei Anwendung von Natriumlicht auf.

Die Farbenringe behauchter Platten unterscheiden sich, wie erwähnt, von den eben beschriebenen Fraunhofer'schen Ringen dadurch, dass die Lichtquelle von einem völlig dunklen Raum umgeben ist, der von einem zunächst schwach blaugrünen, dann intensiver gelben und rothen Ring eingeschlossen wird; nicht eben selten sieht man noch einen zweiten Ring mit derselben Farbenfolge. Meist hat die ganze Erscheinung ein mehr oder weniger strahliges Aussehen, ähnlich wie die Figur, welche Fraunhofer¹⁾ für das durch gleiche gekreuzte Gitter entstehende Beugungsbild gezeichnet hat. Ist die Behauchung sehr zart, so erhält man nur einen, am äussersten rothen Rande ziemlich scharf begrenzten Farbenring von mässiger Intensität; der übrige Raum erscheint dunkel oder doch nur ganz schwach erhellt. Sind die Farben jedoch durch einen günstigen Zufall lebhafter, so tritt nicht nur die strahlige Structur der ganzen Erscheinung stärker hervor, sondern es schliesst sich auch noch unmittelbar an den äusseren rothen Saum des Ringes ein schwach grünlich-blauer Saum an, der allmählich mehr ins Gelbe geht und schliesslich mit einem ganz schwachen rothen Schimmer endigt, was offenbar als ein nicht vollständig ausgebildeter zweiter Ring anzusehen ist.

Die eine oder die andere dieser Erscheinungen tritt jedesmal auf, wenn man eine zuvor gut gereinigte und tüchtig abgeriebene Glasplatte ein- oder zweimal schwach behaucht. Wenn die Behauchung sich durch Verdunsten allmählich wieder verliert, so verschwindet zunächst der genannte äussere Schimmer; der eigentliche Farbenring erscheint wenn auch lichtschwächer, gut, und zwar roth begrenzt, wird dann vom Roth nach innen fortschreitend schwächer und schwächer, und mit einem mal ist die ganze Erscheinung vollständig ausgelöscht. Dabei rücken, was bemerkenswerth ist, die Farben nicht dem Centrum näher, sondern jede Farbe verschwindet an ihrer Stelle, eine Beobachtung, die bereits Dove²⁾ gemacht hat. Behaucht man dieselbe Stelle mehrere mal

1) Fraunhofer, Denkschriften der k. bayr. Acad. 8. Tafel VI.

2) Dove, Pogg. Ann. 26. p. 310. 1832.

hintereinander, so verengert sich der centrale dunkle Raum mehr und mehr, um schliesslich ganz zu verschwinden, wobei dann meist die Lichtquelle gefärbt erscheint. Mehrere der hier angeführten Beobachtungen finden sich bei Dove (l. c.) und bei H. Meyer¹⁾; auch Hr. Exner erwähnt die hier und da auftretende Färbung der Flamme, ohne die Erscheinungen näher zu discutiren; den von demselben noch gesehenen Ring mit innerem rothen Rande habe ich leider nur einmal beobachten und da nicht weiter verfolgen können, als ich durch eine bethaute Fensterscheibe nach dem Monde sah; derselbe ist wegen der Farbenfolge ohne Zweifel durch Brechung hervorgerufen.

Sehr merkwürdige, mannigfaltige und farbenprächtige Ringerscheinungen, die von den eben beschriebenen völlig verschieden sind, erhält man, wie vorhin schon angedeutet, durch sehr starke, öfter aufeinander folgende Behauchung. Der centrale dunkle Raum ist dann vollständig verschwunden, und anstatt eines die Spectralfarben aufweisenden Ringes sieht man ausser dem gefärbten centralen Raume meist zwei weitere Ringe mit abwechselnd complementären Farben.

Diese complementären Farbenringe sind oft prächtig rosenroth und grün oder braunroth und gelblichgrün, oft blau und gelb oder braunviolett und grünlichgelb, und zwar umgibt die eine oder die andere Farbe abwechselnd unmittelbar die Lichtquelle; dabei zeigen die Durchmesser der Aureole und die Breite der ohne jeden Zwischenraum sich anschliessenden Ringe grosse Verschiedenheit. Die Erscheinung ist auch jetzt strahlig und nach aussen stets mit einem röthlich bis gelblich weiss gefärbten verwaschenen Hof umgeben, der sich in beträchtlicher Breite und mit allmählich abnehmender Intensität nach aussen hin erstreckt. Bei sehr andauernder und starker Behauchung werden diese Erscheinungen unter beträchtlicher Zunahme des strahligen Aussehens undeutlicher und lichtschwächer, treten aber beim Verdunsten der Behauchung wieder stärker hervor und zeigen nacheinander verschiedene Complementärfarben.

1) H. Meyer, Pogg. Ann. 96. p. 235, hier p. 253 u. 254. 1855.

Benutzt man bei Betrachtung der Erscheinung wie oben beim Studium der Lycopodiumringe kleine Sehlöcher, so ändert sich bei der ganzen Erscheinung nur die Lichtintensität, der eigentliche Charakter des gesehenen Ringsystems wird jedoch dadurch in keiner Weise umgestaltet.

Da die Absicht, die Ringe behauchter Platten auch messend zu verfolgen, durch ihre rasche Vergänglichkeit vollständig vereitelt wird, so war ich darauf bedacht, die Erscheinungen durch eine geeignete Präparation von Glasplatten zu fixiren, um sie so jederzeit mit allen ihren Einzelheiten beliebig lange zur Beobachtung bereit zu haben. Nach vielen vergeblichen Versuchen ist es mir in der That gelungen, sämtliche oben beschriebene Erscheinungen zum Theil in gleicher Schönheit zu erzeugen; die mikroskopische Besichtigung dieser dauerhaft hergestellten Platten führte sodann überdies zu Resultaten, die den Ursprung der Ringe ganz unzweifelhaft erkennen liessen. Mit diesen Erfahrungen ausgestattet, geschah dann natürlich die mikroskopische Untersuchung der wirklichen Behauchung unter ganz anderen Gesichtspunkten, und es konnte auch an den behauchten Platten der Grundcharakter der Structur in Uebereinstimmung mit jenen mit Sicherheit constatirt werden.

Wenn man nämlich bedenkt, dass die Sublimation fester Körper ein der Condensation von Wasserdampf ganz analoger Vorgang ist, so lässt sich wohl schliessen, dass, wenn beim Niederschlagen von Wasserdampf eine gewisse Gleichförmigkeit der Anordnung sich herausbildet, auch wohl bei der Sublimation gewisse Regelmässigkeiten in der Gruppierung des Sublimates auftreten könnten. Letzteres findet nun in der That statt, und zwar bei verschiedenen sublimirbaren Körpern in verschiedenem Grade. Am günstigsten erwies sich die Sublimation von Salmiak, weniger geeignet für die Beobachtung war wegen der verhältnissmässig raschen Verflüchtigung Jod, am ungünstigsten Quecksilbersublimat und Zinnober. Die Sublimation von Salmiak ergibt auf einer kalten Glasplatte einen äusserst zarten, weisslichgrauen Niederschlag, der sich zwar leicht von der Platte wegwischen lässt, sich aber andererseits, da er nicht hygroskopisch ist, und wenn

man Vorsorge trägt, dass die bereiften Stellen nicht mit anderen Körpern in Berührung kommen, beliebig lange, ohne sich irgendwie zu verändern, auf der Platte erhält. Erwärmt man den Beschlag wieder gelinde, so wird der Ueberzug äusserst zart, oft kaum sichtbar und meist gerade dann für den vorliegenden Zweck besonders brauchbar.

Indem ich durch so hergestellte Platten eine punktförmige intensive Lichtquelle betrachtete, erhielt ich an sehr vielen Stellen mehr oder minder lichtstarke, oft äusserst schöne und regelmässige Höfe von der verschiedensten Grösse, die sich in allen Einzelheiten der Erscheinung vollständig identisch erwiesen mit dem Ringphänomen behauchter Platten. Es trat vor allem stets der charakteristische, die Lichtquelle unmittelbar umgebende dunkle Raum auf. Oft liessen sich zwei, sogar drei Höfe deutlich erkennen, wobei dann stets der innerste am intensivsten und schönsten, von den beiden anderen bald der äussere, bald der innere lichtstärker war. Letzterer und der Umstand, dass die Abstände der aufeinanderfolgenden Ringe durchaus nicht gleichmässig erschienen, brachten mich auf die Vermuthung, dass diese Ringe völlig voneinander unabhängig und nur durch Ueber- oder Nebeneinanderlagerung mehrerer beugenden Systeme von analoger Anordnung entstanden sein müssten. In der That hatte ich bei den Platten, welche mehrfache Ringe zeigten, wiederholt Salmiakdämpfe auf derselben Stelle sich niederschlagen lassen.

Eine Stelle auf einer Platte, die einen grossen und regelmässigen, auch ziemlich lichtstarken Ring ergab, zeigte unter dem Mikroskop eine sehr grosse Anzahl wie Federbärte aussehende Krystallanhäufungen in ganz unregelmässiger Vertheilung. Alle diese Federchen bildeten Gitter mit drei bis sechs vollständig gleich grossen Zwischenräumen, sodass der durch diese Stelle gesehene Ring wohl nur da-



durch entstanden sein konnte, dass jedes solches Elementargitter zu beiden Seiten des Lichtpunktes Beugungsspectra von der Höhe der Lichtquelle hervorrief. Da nun auf sehr kleinem Raum äusserst viele solche Elementargitter und in

beliebiger Richtung vertheilt sind, da überdies zufällig mehrere nach der gleichen Richtung orientirt sein können, so müssen Beugungsfransen nach allen Richtungen hin entstehen. Die ersten und lichtstärksten Beugungsspectra werden, weil durch Gitter von gleicher Breite hervorgerufen, alle in nahezu gleichem Abstand von der Lichtquelle auftreten, da die räumliche Vertheilung der Elementargitter beim ersten Beugungsbild nicht so stark merklich wird, und müssen sich somit zu einem Ring aneinanderreihen. Bei den zweiten Spectren, die bei einer so geringen Anzahl von Gitteröffnungen, wie im vorliegenden Falle, ohnehin schon sehr lichtschwach sind, wird sich die Vertheilung der Elementargitter auf einer grösseren Fläche insofern geltend machen, als zwei durch Zufall völlig gleich orientirte Elementargitter für ein und dieselbe Farbe schon merklich auseinanderliegende zweite Maxima ergeben. Es fallen also die zweiten Spectra und in höherem Grade die allenfalls noch vorhandenen dritten nicht genau an dieselbe Stelle, sondern mehr oder minder übereinander und ergeben somit einen hellen Lichtschein von gelblicher oder röthlich gelber Farbe, der breit und verwaschen mit nach aussen hin abnehmender Intensität den ersten starken und gut begrenzten Ring umgibt. Dass dieser Lichtschein wirklich von den zweiten Beugungsspectren seinen Ursprung nimmt, ersieht man dann am besten, wenn man sich mit der vor das Auge gehaltenen Platte der Lichtquelle beträchtlich nähert, wodurch die Ringe kleiner und intensiver werden, und der ursprünglich unbestimmte Lichtschein sich zu einem ausgesprochenen, wenn auch weniger scharf begrenzten zweiten Ring gestaltet.

Genau dasselbe lässt sich für die Ringe behauchter Platten feststellen, und es war somit kein Zweifel mehr, dass auch diese durch unzählige, nach allen Richtungen orientirte Gitter mit gleichen Oeffnungen entstehen und nicht, wie Hr. Exner meint, wie die Fraunhofer'schen Ringe unter gleichzeitiger Anordnung der beugenden Körperchen in regulären Dreiecken. Uebereinstimmend mit dieser Anschauung ist es auch, dass kleine und lichtstarke Höfe, auch bei behauchten Platten, wegen der zu ihrer Erzeugung nothwen-

digen Gitter mit beträchtlich grossen Spaltbreiten, vielleicht auch wegen geringer Schwankungen in den Gitterconstanten, oft nicht vollkommen kreisförmig, sondern zackig, mit einem Zahnrad vergleichbar, erscheinen, weil bei solchen der Umstand, dass die einzelnen, sonst beliebig gerichteten Gitter nicht alle an nahezu derselben Stelle, sondern oft beträchtlich auseinander liegen, sich mehr im Beugungsbild geltend macht, als bei sehr nahe aneinander liegenden Gittern mit kleinen Zwischenräumen.

Wenn ich auch die erwähnte federartige Structur der einzelnen Krystallgruppen durch Zufall nur auf einer Platte erhalten habe, und ich den dadurch entstehenden Farbenring, der zwar für das blosse Auge genügend lichtstark, im Spectrometer aber trotz Concentration des Lichtes auf die Colli-matoröffnung kaum erkennbar war, nicht habe messen können, wobei mir dann die direct mit dem Mikrometer gemessene Gitterconstante den Beweis für die Richtigkeit meiner Ansicht geliefert hätte, so habe ich doch, einmal auf Gitter aufmerksam gemacht, auch auf anderen Platten nach den verschiedensten Richtungen hin eine gitterartige Anordnung constataren können.

Die einzelnen Salmiakkrystalle selbst sind von der verschiedensten Gestalt, oft rund, oft eckig oder nadelförmig, meist sind kleinere Krystalle in fast rechteckigen, oft auch in vollständig oder nahezu kreisförmigen Haufen angeordnet, welch letztere dann an äusserst zahlreichen Stellen zu dreien oder fünf, oft in grösserer Anzahl bis zu zehn, linear und gitterförmig gereiht sind, und zwar so regelmässig, dass bei allen diesen Gittern gleichliegende Ränder stets merklich gleiche Abstände haben. Manche Platten zeigen ausser den eben genannten linearen und nach allen Richtungen liegenden Gittern an vielen Stellen mehrere Parallelreihen von gleichen, fast quadratischen Krystallgruppen von solcher Regelmässigkeit, dass man glaubt, ein regelrechtes quadratisches Gitter vor sich zu haben. Bei Platten, die um den Lichtpunkt mehrere verschieden intensive Farbenringe zeigen, lassen sich auch stets mit Entschiedenheit mehrere, oft äusserst feine gitterartige Anordnungen mit verschiedener Spalt-

breite an derselben Stelle erkennen. Eine derselben mit einem kleinen und einem zweiten sehr grossen Farbenring zeigte z. B. nahe gleiche Krystallgruppen in fast gitterförmiger Anordnung in einen äusserst fein und regelmässig punktirten Grund eingelagert, und zwar so, dass jede solche Krystallgruppe von einem überall gleich breiten, von jeder Punktirung völlig freien Ring umgeben war. Den ersten sehr intensiven Ring glaubte ich zunächst durch die fast gitterförmige Anordnung der Krystallgruppen verursacht, es hat sich aber herausgestellt, dass die genannten völlig leeren Räume, welche als je zwei Spalten von gleicher Breite und gleichem Abstand homologer Ränder betrachtet werden können, die Ursache des ersten kräftigen Farbenringes, die feine, gitterartige Grundirung die des zweiten noch sichtbaren Ringes gewesen ist.

In Zusammenfassung des Vorhergehenden hat sonach die mikroskopische Betrachtung als Ursache der Ringe ein Vorhandensein von unzähligen, nach allen Richtungen orientirten Gittern von gleicher Constante ergeben. Bei einer Behauchung erscheinen diese linearen Gitter meist noch viel regelmässiger und mit mehr Oeffnungen, woraus sich der meist viel grössere Glanz der Erscheinung erklärt.

Zur Unterstützung und zum Beweis für die Richtigkeit dieser Anschauung habe ich die Durchmesser von mehreren besonders lichtstarken, mit Salmiakbeschlag erzeugten Ringe gemessen. Dann wurde aus dem bei einem Gitter von der Oeffnungsbreite a und der Entfernung zweier Oeffnungen d für den Beugungswinkel δ geltenden Intensitätsausdruck:

$$J = a^2 \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda}} \cdot \frac{\sin^2 n \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}},$$

resp. aus der Bedingung für die im zweiten Factor enthaltenen m ten Hauptmaxima zweiter Classe:

$$\sin \delta = \frac{m \lambda}{a+d}, \quad \text{resp. für diesen Fall} \quad \sin \delta = \frac{\lambda_B}{a+d}$$

die Entfernung $(a+d)$ gleichliegender Spaltränder des Gitters berechnet und schliesslich diese Gitterconstante mit der

direct mit Mikroskop und Mikrometer gemessenen verglichen. Dabei mussten selbstverständlich wegen der obenerwähnten häufigen gleichzeitigen Existenz zweier oder mehrerer beugender Systeme an derselben Stelle meist die Constanten beider Systeme gemessen werden. Als Wellenlänge wurde $\lambda = 0,000\,687\,5$ der Linie *B* als die Grenze des ohne besondere Hilfsmittel sichtbaren Roth angenommen. Die Unsicherheit der Einstellung auf die rothen Ränder der Farbringe und die Fehler der mikrometrischen Längenbestimmung wurden durch eine sehr grosse Anzahl von Messungen thunlichst zu eliminiren gesucht. Um von der Grösse der einzelnen Abweichungen eine Vorstellung zu gewinnen, sei es gestattet, eine solche Messung ausführlich mitzutheilen.

Für den Ringdurchmesser wurden die Winkel gemessen:

| | |
|------------|------------|
| 4° 16' 40" | 4° 16' 20" |
| 4 15 40 | 4 16 40 |
| 4 16 20 | 4 16 0 |
| 4 15 40 | 4 16 40 |

im Mittel 4° 16' 15", woraus sich der Beugungswinkel für den äussersten rothen Saum unter Berücksichtigung der Correctur wegen der Collimatoröffnung zu 2° 4' 57,5" und die Gitterconstante:

$$(a + d) = \frac{0,000\,687\,5}{\sin 2^\circ 4' 57,5''} = 0,01892 \text{ mm}$$

ergibt. Letztere wurde mittelst des Mikrometers zwanzigmal gemessen; für das Verständniss der nun folgenden Tabelle möge erwähnt werden, dass die Zähler der darin vorkommenden Brüche die an der Trommel des Mikrometers abgelesenen Theile, wobei die Zehntel geschätzt wurden, die Nenner die Anzahl der Gitteröffnungen angeben:

| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 26,0/5 = 5,20 | 21,6/4 = 5,40 | 15,7/3 = 5,23 |
| 21,5/4 = 5,38 | 20,7/4 = 5,17 | 10,2/2 = 5,10 |
| 10,7/2 = 5,35 | 15,1/3 = 5,03 | 15,4/3 = 5,13 |
| 25,8/5 = 5,16 | 15,8/3 = 5,27 | 21,0/4 = 5,25 |
| 15,7/3 = 5,23 | 20,0/4 = 5,00 | 10,5/2 = 5,25 |
| 16,2/3 = 5,40 | 15,2/3 = 5,07 | 16,2/3 = 5,40 |
| 15,9/3 = 5,30 | 25,5/5 = 5,10 | |

Hieraus ergibt sich die Gitterbreite im Mittel:

$$(a + d) = 5,221 \text{ Trommeltheile} = 5,221 \cdot \frac{14,3}{4000} \text{ mm} = 0,01866 \text{ mm,}$$

sonach eine Abweichung von etwas über 1 Proc. Ferner wurde für andere Farbenringe in ebenfalls sehr guter Uebereinstimmung erhalten:

| Beugungswinkel | | | | Gitterconstante in mm | |
|----------------|-----|-------|------|-----------------------|--------------|
| | | | | berechnet | gemessen |
| 0° | 48' | 16'' | (8) | 0,04897 | 0,04859 (25) |
| 2 | 58 | 14 | (8) | 0,01327 | 0,01358 (25) |
| 1 | 32 | 51 | (10) | 0,02546 | 0,02588 (25) |
| 0 | 55 | 36,25 | (8) | 0,04248 | 0,04167 (30) |

Die in der ersten und dritten Rubrik beigefügten eingeklammerten Zahlen geben die Anzahl der gemachten Einzelmessungen an.

Es erübrigt noch die Erklärung der Erscheinungen bei mehrfacher starker Behauchung. Betrachtet man eine solche Platte, welche unmittelbar an den Lichtpunkt sich anschliessende complementär gefärbte Ringe zeigt, unter dem Mikroskop, so erkennt man, dass die früher kleinen, fast kreisrunden Tröpfchen zu grossen, meist unregelmässig gestalteten Wasserflächen zusammengeflossen sind, die jedoch an manchen Partien durch schmale, von Flüssigkeit völlig freie Stellen in nach vielen Richtungen gitterartiger Anordnung (bis zu vier oder fünf gleichbreite Streifen in gleichen Abständen) getrennt sind. Es ist also die Erscheinung ohne Zweifel das Resultat des Zusammenwirkens zweier Strahlungsgattungen, deren eine durch die freie Stelle, deren andere durch die Flüssigkeitslamelle hindurchgegangen ist, mit anderen Worten, man hat es mit einer Beugung durch ein sogenanntes lamellares Gitter¹⁾ zu thun, und es sind infolgedessen die für diese Erscheinungen aufgestellten Formeln ohne weiteres anwendbar, eine Messung und Controle derselben durch die Theorie jedoch, wie leicht erklärlich, völlig unausführbar.

Auch diese Erscheinungen der complementärfarbigten Ringe nachzubilden und zu fixiren, ist mir gelungen, indem ich eine Auflösung von Sandarakharz in einem empirisch gefundenen Gemische von Aether und Weingeist in sehr

¹⁾ Verdet, Wellentheorie. 1. p. 184 oder Quincke, Pogg. Ann. 132. p. 364 1867.

dünnere Schicht über eine Glasplatte goss und eintrocknen liess. Die mikroskopische Betrachtung solcher Platten lässt einen gleichmässigen, im durchfallenden diffusen Tageslicht Farben dünner Blättchen zeigenden Grund erkennen, auf welchen kleine, in manchen Fällen runde, in anderen langgestreckte Körperchen in sehr grosser Anzahl und Regelmässigkeit aufgelagert sind. Mit monochromatischem Licht, z. B. mit Natriumlicht erhält man daher fast stets einen oder zwei, je nach der Dicke genannter Schicht mehr oder minder intensive Ringe mit dunklem, centralem Raume, seltener aber auch eine Aureole und einen Ring, sodass man im letzteren Falle keine Beugungserscheinung durch Gitter, sondern durch unregelmässig gelagerte, nahezu gleich grosse Körperchen vor sich hat.

Unter besonders günstigen Umständen, meist bei mehrmaligem Begiessen der Platte mit Lösung, erhält man eine, den Spectralfarben zeigenden Ringen behauchter Platten mit dunklem, centralem Raume analoge, aber meist sehr zackige Ringerscheinung; es fehlen dann aber an solchen Stellen die Farben dünner Blättchen im diffusen Tageslicht vollständig.

Dass die durch starke Behauchung oder auf die letzterwähnte Art hervorgebrachten complementären Ringe nicht bloss Farben dünner Blättchen sind, die ja bei gleichförmiger Dicke der Schicht um einen allerdings sehr nahen Lichtpunkt herum ebenfalls complementäre Ringe zeigen müssten, dafür spricht in erster Linie die Kleinheit der Ringe; denn bei einem dünnen Blättchen von bestimmter Farbe könnte bei Betrachtung eines Lichtpunktes nur an einer solchen Stelle ein complementärer Ring vorhanden sein, wo die auftreffenden Strahlen zur Erreichung des erforderlichen Gangunterschiedes unter demselben Winkel aus dem Blättchen austreten würden, um welchen man das Blättchen im diffusen Tageslicht drehen muss, um die Complementärfarbe zu sehen. Nun ist dieser Winkel, wie man sich durch Neigen der Platte gegen den Lichtstrahl ohne weiteres überzeugen kann, in der That sehr bedeutend, sodass von vornherein das Auge wohl kaum solche stark divergirende Strahlen auf der Netzhaut zur Vereinigung bringen könnte, während die Winkel, unter

denen die beobachteten complementären Ringe in der That erscheinen, von der Grössenordnung der oben direct gemessenen Winkel sind. Infolge dieses Umstandes dürfte also wohl die soeben ausgesprochene Entstehungsursache dieser Ringe ausgeschlossen sein.

Nimmt man aber, wie oben schon bemerkt, noch eine Gitterwirkung hinzu, so erklären sich die complementären Ringe bei behauchten Platten auf einfachste Weise als lamellare Gittererscheinungen. Die Farbenringe der künstlich mit Sandaraklösung hergestellten Platten sind jedoch, obwohl in der Erscheinung die gleichen wie jene, bezüglich ihrer Entstehung wohl etwas anders zu erklären, da bei ihnen auf der dünnen Lamelle fast völlig undurchsichtige Körperchen aufgelagert sind, während das Charakteristikum für das lamellare Gitter das ist, dass belegte, aber das Licht fast ungeschwächt durchlassende, also nur einen bestimmten Gangunterschied bedingende Stellen mit solchen abwechseln, welche dem Licht einen völlig ungehinderten Durchtritt gestatten. Jedoch erklärt sich auch für jenen Fall das Phänomen sehr einfach. Denn ein auf ein dünnes Blättchen von bestimmter Dicke senkrecht auffallender Strahl weissen Lichtes erscheint nach seinem Austritt nicht mehr weiss, sondern irgendwie gefärbt, da in dem Lichtstrahl gewisse Farben durch Interferenz vollständig oder theilweise ausgelöscht sind. Erhalten nun die einzelnen Farben eines solchen Strahles, der ja noch sämtliche Lichtgattungen enthält, weil Interferenz, nicht Absorption stattgefunden hat, durch irgendwelche beugende Körperchen neuerdings Gangunterschiede, so kann und muss der Fall eintreten, dass die eben ausgelöschten Strahlen vermöge der erlangten Wegdifferenz wieder wirksam werden, während die anderen, vorher die Mischfarbe des Lichtes bedingenden, ausgelöscht werden. Bei einem gewissen Beugungswinkel muss sonach eine zu derjenigen complementäre Farbe auftreten, welche die Lichtquelle unmittelbar umgibt.

Heisst man, um die Ideen zu fixiren, diejenige Lichtsorte von der Wellenlänge λ für eine gewisse Newton'sche Farbe dann die charakteristische, wenn für sie das Maximum der

Intensität im durchgehenden Lichte eintritt, also die Dicke der Schicht ein gerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist, so erkennt man, dass bei einer Entfernung $(a + b)$ gleichliegender Spalt-ränder des Gitters dann im gebeugten Lichte dieselbe oder nahezu dieselbe Newton'sche Farbe, wie bei dem ohne nachherige Ablenkung durchgegangenen Licht, auftritt, wenn $(a + b) \cdot \sin \delta = m \cdot \lambda$ ist, wobei δ den Beugungswinkel, m eine ganze Zahl bedeutet. Dass für die charakteristische oder überhaupt für irgend eine Farbe wirklich die für ein gewöhnliches Gitter geltenden Formeln anzuwenden sind, und dass die durch den Durchgang des Lichtes durch die Lamelle bedingte Intensität gewissermassen als constanter Factor im Resultat erscheint, möge folgende Betrachtung in Kürze darthun.

Man denke sich eine in einen Spalt von der Breite a eingesetzte dünne Lamelle (cf. Fig. 2) vom Brechungsexponenten n und der Dicke A , sodass der auf Luft reducirte Weg des durch das Blättchen gehenden Lichtes $n \cdot A$ beträgt. Trifft dann auf einen Streifen der oberen Fläche CD der Lamelle von der Breite 1 die Lichtmenge 1 einer bestimmten Farbe mit der Geschwindigkeit:

$$M \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

senkrecht auf, so soll in einer zum Spalte senkrechten Ebene die nach der Richtung δ gebeugte Lichtintensität gesucht werden unter gleichzeitiger Berücksichtigung, dass der an der Unterseite AB der Lamelle austretende gebeugte Lichtstrahl aus Strahlen zusammengesetzt ist, die in der Lamelle eine null-, zwei-, vier-, . . . $2m$ -fache Reflexion erfahren haben. Bezeichnet man noch mit r den an der Fläche CD in Luft reflectirten, mit g den gebrochenen, mit ρ den im Blättchen reflectirten und mit γ den schliesslich an der Unterfläche AB austretenden Antheil einer ankommenden Lichtmenge 1, so genügen diese Coëfficienten unter der vereinfachenden Annahme, dass kein Licht verloren geht, und die Amplitude durch diese Brechungen und Reflexionen keine Veränderung erleidet, wie leicht zu zeigen ist, den Relationen:

$$r = -\rho; \quad r^2 + g\gamma = \rho^2 + g\gamma = 1,$$

woraus folgt: $g\gamma = 1 - \rho^2$. $\rho^2 + 1 = 2 - g\gamma$.

Betrachtet man nun einen Streifen von der Breite dx an der Unterfläche der Lamelle im Abstände x von der Kante A , so hat der aus diesem Streifen austretende und nach der Richtung δ gebeugte Lichtstrahl, welcher, ohne irgend eine Reflexion erfahren zu haben, durch das Blättchen gegangen ist, wegen seines um $x \cdot \sin \delta$ im Vergleich zum entsprechenden Randstrahl mehr zurückgelegten Weges die Geschwindigkeit:

$$g \cdot \gamma \cdot M \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - \frac{nA}{\lambda} \right) dx.$$

Die anderen Theilstrahlen haben nach der Reihe die Geschwindigkeiten:

$$\rho^2 g \gamma \cdot M \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - 3 \frac{nA}{\lambda} \right) dx,$$

$$\rho^4 g \gamma \cdot M \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - 5 \frac{nA}{\lambda} \right) dx,$$

$$\rho^6 g \gamma \cdot M \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - 7 \frac{nA}{\lambda} \right) dx \text{ u. s. w.}$$

Die aus allen diesen Antheilen resultirende Geschwindigkeit des gesammten, an der Unterfläche des Streifens dx nach der Richtung δ austretenden Lichtes ist dann, wenn man zur Abkürzung:

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - \frac{nA}{\lambda} \right) = \theta; \quad 2\pi \frac{2nA}{\lambda} = \varepsilon \quad \text{setzt:}$$

$$\begin{aligned} V &= g \gamma M [\sin \theta + \rho^2 \sin (\theta - \varepsilon) + \rho^4 \sin (\theta - 2\varepsilon) + \dots] dx \\ &= g \gamma M [\sin \theta + \rho^2 \{ \sin (\theta - \varepsilon) + \rho^2 \sin (\theta - 2\varepsilon) \\ &\quad + \rho^4 \sin (\theta - 3\varepsilon) + \dots \}] dx. \end{aligned}$$

Summirt man die in {} Klammer stehende Reihe in bekannter Weise, so erhält man:

$$\begin{aligned} V &= g \gamma M \left[\sin \theta + \rho^2 \frac{\sin (\theta - \varepsilon) - \rho^2 \sin \theta}{1 - 2\rho^2 \cos \varepsilon + \rho^4} \right] dx \\ &= g \gamma \cdot M \cdot \frac{\sin \theta - \rho^2 \sin (\theta + \varepsilon)}{1 - 2\rho^2 \cos \varepsilon + \rho^4} dx. \end{aligned}$$

Setzt man die Werthe für θ und ε wieder ein und formt gleichzeitig unter Berücksichtigung obiger Relationen den Nenner um, so kommt:

$$V = g\gamma M \cdot \frac{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - \frac{nD}{\lambda} \right) - \varrho^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} + \frac{nD}{\lambda} \right)}{g^2 \gamma^2 + 4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda}} dz$$

$$= g\gamma M \cdot \frac{\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} + \frac{nD}{\lambda} \right) - \varrho^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x \sin \delta}{\lambda} - \frac{nD}{\lambda} \right)}{g^2 \gamma^2 + 4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda}} dx.$$

Bezeichnet man vorläufig den Nenner obigen Bruches abkürzend mit N , so erhält man durch Auswerthen der im Zähler stehenden sinus und entsprechendes Zusammenfassen:

$$V = g\gamma \cdot \frac{M}{N} \left\{ \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \left[\cos 2\pi \frac{x \sin \delta + nD}{\lambda} - \varrho^2 \cos 2\pi \frac{x \sin \delta - nD}{\lambda} \right] \right. \\ \left. - \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \left[\sin 2\pi \frac{x \sin \delta + nD}{\lambda} - \varrho^2 \sin 2\pi \frac{x \sin \delta - nD}{\lambda} \right] \right\} dx.$$

Hieraus erhält man die Intensität des gesammten nach der Richtung δ gebeugten Lichtes:

$$J = g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \left\{ \left[\int_0^a \left(\cos 2\pi \frac{x \sin \delta + nD}{\lambda} - \varrho^2 \cos 2\pi \frac{x \sin \delta - nD}{\lambda} \right) dx \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\int_0^a \left(\sin 2\pi \frac{x \sin \delta + nD}{\lambda} - \varrho^2 \sin 2\pi \frac{x \sin \delta - nD}{\lambda} \right) dx \right]^2 \right\}$$

$$= g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \sin^2 \delta} \left\{ \left[\sin 2\pi \frac{a \sin \delta + nD}{\lambda} - \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right. \right. \\ \left. \left. - \varrho^2 \left(\sin 2\pi \frac{a \sin \delta - nD}{\lambda} + \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right) \right]^2 \right. \\ \left. + \left[\cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{a \sin \delta + nD}{\lambda} \right. \right. \\ \left. \left. - \varrho^2 \left(\cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} - \cos 2\pi \frac{a \sin \delta - nD}{\lambda} \right) \right]^2 \right\}.$$

Nach einigen leicht ausführbaren Transformationen erhält man:

$$J = g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \sin^2 \delta} \left\{ (1 - \varrho^2) \sin 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right. \\ \left. - (1 + \varrho^2) \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \left(1 - \cos 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \right) \right]^2 \\ + \left[(1 - \varrho^2) \cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} \left(1 - \cos 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \right) \right. \\ \left. + (1 + \varrho^2) \sin 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right]^2 \Big\}$$

$$\begin{aligned}
 &= g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \sin^2 \delta} \left\{ \left[g\gamma \sin 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2(2 - g\gamma) \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right]^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left[2g\gamma \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \cos 2\pi \frac{nD}{\lambda} + (2 - g\gamma) \sin 2\pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \sin 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right]^2 \right\} \\
 &= g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \sin^2 \delta} \left\{ 4g^2 \gamma^2 \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \cos^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \right. \\
 &\quad \left. + 4g^2 \gamma^2 \sin^4 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} + 16 \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right. \\
 &\quad \left. - 16g\gamma \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right\} \\
 &= g^2 \gamma^2 \frac{M^2}{N^2} \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \sin^2 \delta} \left\{ 4 \sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda} \left[g^2 \gamma^2 + 4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

und schliesslich, wenn man für N seinen Werth wieder einführt und gleichzeitig Zähler und Nenner mit N kürzt:

$$J = (g^2 \gamma^2) \cdot a^2 M^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \frac{1}{g^2 \gamma^2 + 4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda}}$$

oder auch:

$$J = a^2 M^2 \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda^2}} \cdot \left[1 - \frac{4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda}}{g^2 \gamma^2 + 4(1 - g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{nD}{\lambda}} \right].$$

Der so erhaltene Ausdruck für die Intensität besteht ersichtlich aus zwei Factoren, von denen der erste allein von der Beugung herrührt und mit der für die Beugungserscheinung eines einfachen Spalts gültigen Formel identisch ist, während der zweite eingeklammerte, vom Beugungswinkel δ völlig unabhängige Factor nichts anderes darstellt, als die Intensität des aus dem dünnen Blättchen senkrecht austretenden Lichtes.

Bei der Beugung durch eine Reihe äquidistanter und gleich breiter Spalten kommt nur noch, wie es ja auch beim gewöhnlichen Gitter der Fall ist, der Factor:

$$Q = \frac{\sin^2 p\pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}$$

hinzu, wo p die Anzahl der Spalten, $(a+d)$ die Entfernung gleichliegender Spaltränder bedeutet, sodass man für ein Gitter von der oben vorausgesetzten Eigenschaft für die dem Beugungswinkel δ entsprechende Lichtintensität den Ausdruck erhält:

$$J_p = a^2 M^2 \cdot \frac{\sin^2 \pi \frac{a \sin \delta}{\lambda}}{\pi^2 \frac{a^2 \sin^2 \delta}{\lambda}} \cdot \frac{\sin^2 p \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}}{\sin^2 \pi \frac{(a+d) \sin \delta}{\lambda}} \left[1 - \frac{4(1-g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{n d}{\lambda}}{g^2 \gamma^2 + 4(1-g\gamma) \sin^2 2\pi \frac{n d}{\lambda}} \right].$$

Die Theorie ergibt sonach in Uebereinstimmung mit obiger Voraussage, dass im gebeugten Licht dann eine Farbe in demselben Schwingungszustand nur mit fast p^2 facher Intensität wie im directen durch die Lamelle gegangenen vorhanden ist, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen für diese Farbe ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge beträgt oder, unter m eine ganze Zahl verstanden, wenn:

$$(a+d) \sin \delta = m \lambda$$

ist, da durch einen solchen Werth der die Beugungserscheinung darstellende Factor ein Maximum wird, während der andere eingeklammerte Ausdruck vollständig die Rolle einer Constanten spielt.

Es wurde schon oben bemerkt, dass unter dem Beugungswinkel δ_c für die charakteristische Farbe des Blättchens nur nahezu dieselbe Newton'sche Farbe wie im directen Licht erscheint. Denn eine der charakteristischen Wellenlänge λ_c benachbarte Farbe λ' [die Wellenlängen mögen der Kürze halber gleich zur Bezeichnung der Farbe gebraucht werden] würde bei einem Beugungswinkel δ_c nur eine Phasenänderung $m \lambda_c$ erfahren, während sie, um mit demselben Schwingungszustand, wie im directen, auch im gebeugten Licht vorhanden zu sein, eine Phasenänderung $m \lambda'$ hätte erfahren müssen. Da jedoch dieser Unterschied in der Phase für die Farbe λ' und infolgedessen die Unterschiede in der Vibrationsgeschwindigkeit, resp. in der hieraus resultirenden Intensität für benachbarte Farben jedenfalls sehr gering sind, so bleibt die Farbe des durch Beugung entstandenen ersten Ringes mit nur geringer Aenderung der Nuance die

gleiche, wie diejenige, welche das direct gesehene Flammenbild, resp. das dünne Blättchen im diffusen weissen Lichte zeigt.

Infolge der eben erwähnten Ursache sind auch die Aureolen und Ringe nie durchaus gleichmässig gefärbt, sondern ändern von Stelle zu Stelle die Nuance, jedoch unter Beibehaltung des Grundcharakters der Farbe. Uebereinstimmend mit vorstehender Erklärung ist es auch, dass bei Platten, welche in monochromatischem Licht einen dunklen Raum um die Lichtquelle zeigen, dieser dunkle Raum bei Betrachtung einer weissen Lichtquelle nahezu die zur Farbe des Lichtpunktes und des ersten gebeugten Ringes complementäre Färbung zeigt, während bei solchen Platten, welche in einfarbigem Licht die Fraunhofer'sche Aureole aufweisen, diese Aureole, wie man von vornherein erwarten muss, bei auftreffendem weissen Licht nahezu in der gleichen Farbe erscheint, wie die Lichtquelle.

Es erübrigt mir nur noch, dem Vorstand des hiesigen Instituts, Hr. Prof. Dr. Lommel, sowie Hr. Prof. Dr. Narr für die vielseitige Anregung und Unterstützung mit Rath und That bei Ausführung dieser Arbeit meinen besten Dank auszusprechen.

München, im April 1888.

VII. *Die Newton'schen Ringe im durchgehenden Lichte (experimenteller Theil);* von *E. Gumlich.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 3—7.)

Als ich vor einigen Jahren auf dem von den Herren Sohnecke und Wangerin eingeschlagenen Wege¹⁾ die Theorie der Newton'schen Ringe im durchgehenden Lichte entwickelte²⁾, war ich leider nicht in der Lage, die theoretisch gefundenen Resultate durch Experimente zu bestätigen. Erst

1) Sohnecke u. Wangerin, Wied. Ann. 12. p. 1 u. 201. 1881.

2) E. Gumlich, Wied. Ann. 26. p. 337. 1885.

im Laufe des vorigen Jahres wurde ich durch die Güte des Hrn. v. Helmholtz in den Stand gesetzt, dies nachzuholen, und ich möchte nicht versäumen, ihm bei dieser Gelegenheit den wärmsten Dank hierfür auszusprechen, ebenso den Herren König, Lummer und Lehmann, die mich dabei mannigfach freundlichst unterstützten.

Bei den Messungen kam folgender Apparat zur Verwendung (Fig. 3).

Auf das frei bewegliche Mittelstück eines mit feiner Kreistheilung versehenen Spectralfusses wurde die von Schmidt und Hänsch zu Berlin gefertigte Linsencombination fest aufgeschraubt. Dieselbe bestand aus einer planparallelen Platte und einer planconvexen Linse, beide Theile zusammengehalten durch eine doppelte Fassung aus Messing, und zwar so, dass von der einen Fassung aus sechs Schrauben durch Löcher der zweiten Fassung hindurchgingen, sodass die letztere durch Schraubenmutter an die erstere beliebig angedrückt werden konnte; zur besseren Regulirung des Druckes waren ausserdem zwischen beide Fassungen in Höhlungen derselben sechs kleine Spiralfedern eingelegt. Vermöge eines mit dem ganzen Mittelstücke fest verbundenen Armes, der zur Kreistheilung führte und ein Mikroskop trug, konnte man die jeweilige Stellung des Linsensystems bis auf Minuten genau ablesen.

Als Lichtquelle benutzte ich anfangs einen mit Kochsalzlösung getränkten Asbestdocht über einem Bunsenbrenner, was jedoch wegen der mangelhaften Lichtstärke nur sehr ungenügende Resultate gab. Viel besser wurden dieselben, als ich statt dessen eine sehr intensiv leuchtende Natriumlampe verwendete. Das so erhaltene Licht wurde, durch ein Collimatorrohr möglichst parallel gemacht, auf das Linsensystem geworfen und auf der anderen Seite mit dem Mikroskope beobachtet. Das letztere war befestigt an einem mit Horizontal- und Verticalverschiebung versehenen kleinen Kathetometer, dessen Nonien noch 0,02 mm abzulesen gestatteten, und vermittelte also direct die Messungen in einer Ebene. Die Messungen nach der Tiefe zu, also in der zur Kathetometerebene senkrechten Richtung, würden sich einfacher gestalten haben, wenn man das ganze, auf seiner

Oberfläche mit einer Millimetertheilung versehene Mikroskop etwa in einer Hülse hätte verschieben und so die verschiedene Tiefenlage der anvisirten Punkte direct auf der Theilung hätte ablesen können. Da das Mikroskop jedoch fest lag, musste statt dessen der Objectivauszug, der leider auch nicht mit einem Getriebe, sondern nur mit der Hand bewegt werden konnte, mit einer Theilung in halbe Millimeter versehen werden, und es war daher durch eine Voruntersuchung zu bestimmen, welche thatsächliche Verrückung des anvisirten Gegenstandes einer bestimmten, abgelesenen Verschiebung des Mikroskopauszugs in jeder möglichen Stellung desselben entsprach. Dies gelang folgendermassen: Ich drehte das Mikroskop so, dass seine Axe parallel wurde der horizontalen Verschiebung des Kathetometers, stellte in derselben Richtung ein anzuvisirendes Object, feine Nadelspitze oder Coconfaden, auf, und verschob den Kathetometeraufsatz — ohne den Mikroskopauszug zu benutzen — solange, bis das betreffende Object vollkommen deutlich erschien. (Jedesmal acht Einstellungen.) Sodann wurde der Auszug um 5 mm herausgezogen und gleichzeitig der ganze Kathetometeraufsatz so weit zurückgeschoben, bis wieder das Bild ganz deutlich war — die dazu nöthige Verschiebung betrug beispielsweise 4,79 mm. Hierauf wurde das Objectiv bis zum Theilstrich 10 herausgezogen und das Kathetometer entsprechend — etwa um 9,40 mm zurückverschoben und so fort bis zum Theilstrich 100, wo schliesslich einer Verschiebung des Objectivs um 100 mm eine Zurückziehung des Kathetometeraufsatzes oder, was dasselbe ist, eine Verschiebung des anvisirten Gegenstandes um 96,02 mm entsprach. Auf diese Weise wurden 20 Gleichungen gewonnen, die sich folgendermassen weiter verwerthen liessen: Sei allgemein a die Verschiebung des Objectivrohres vom Nullpunkt an gerechnet, b die zugehörige Verschiebung des anvisirten Objectes, so ist die Differenz zwischen beiden ($b - a$), jedenfalls eine Function der Verschiebung a , die sich in eine nach Potenzen von a fortschreitende Reihe wird entwickeln lassen, sodass man setzen kann:

$$b - a = x.a + y.a^2 + z.a^3 + \dots$$

Die Coëfficienten x, y, z, \dots dieser Entwickelung kann man

aus den 20 Beobachtungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen, und wenn man die so erhaltenen Werthe in die Gleichungen einsetzt, dann ergibt die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung sofort, ob man bereits eine genügende Anzahl von Gliedern in der Entwicklung berücksichtigt hat, oder ob man weiter gehen muss. So genügte es z. B. bei der gewöhnlich angewandten, starken Vergrösserung (von linear 52—92, je nach Stellung des Objectivs), noch das quadratische Glied der Reihe zu berücksichtigen, denn die Rechnung ergab einen wahrscheinlichen Fehler von ca. 0,05 mm, — eine Grösse, die jedenfalls weit unter der Grenze der zu erwartenden Einstellungsfehler liegt. Wendete man dagegen schwächere Vergrösserung (ca. 23—77fach) an, so blieb der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung bei Berücksichtigung von zwei Coëfficienten x und y noch 0,56 mm, bei Berücksichtigung von drei Coëfficienten immer noch 0,12 mm. Es empfahl sich also schon aus diesem Grunde, bei der Tiefenmessung, wenn irgend möglich, von der stärkeren Vergrösserung Gebrauch zu machen, ganz abgesehen davon, dass bei Anwendung der schwächeren Vergrösserung die Einstellungsfehler so viel grösser sind, und man das Objectiv oft um mehrere Millimeter verschieben konnte, ohne dass die Schärfe des Bildes sich wesentlich zu ändern schien, während andererseits freilich die Verschwommenheit der Erscheinungen in manchen Fällen den Gebrauch der stärkeren Vergrösserung geradezu ausschloss.

Die zunächst erforderliche Bestimmung der Brennweite, resp. des Krümmungsradius der Linse lieferte recht unbefriedigende Resultate: Trotzdem fünf verschiedene Methoden zur Anwendung kamen, und ich bei den Versuchen, die theilweise einen Raum von 20 m in Anspruch nahmen, und deshalb von einem einzelnen gar nicht vorgenommen werden konnten, von verschiedenen Seiten freundlichst unterstützt wurde, blieb doch die Unsicherheit eine ziemlich bedeutende; auch die von Hrn. Sohncke¹⁾ angegebene Modification der Methode der Spiegelung ergab, obwohl mehrfach und

1) Sohncke, Wied. Ann. 12. p. 1 u. 201. 1881.

mit vorzüglichen Instrumenten ausgeführt, keine befriedigende, innere Uebereinstimmung. Der wahrscheinlichste Werth des Krümmungsradius war 2,41 m. — Die Dicke der Glaslinse wurde mit dem Sphärometer zu 5,706 mm bestimmt. — Die Justirung des ganzen Apparates geschah in folgender Weise: Zunächst wurden Spectralfuss und Kathetometer durch Libellen möglichst horizontal, resp. vertical gestellt, und dann durch Drehung des Linsenaufsatzes die Ebene desselben parallel zur Ebene des Kathetometers, also senkrecht zur Axe des Beobachtungsmikroskopes, gerichtet. Da sich im Lager des letzteren ein Fernrohr mit Gauss'schem Ocular nicht anbringen liess, musste dies so bewerkstelligt werden, dass man zunächst den Mikroskopauszug bis fast zur Berührung mit der planen Fläche der Linse herauszog und beobachtete, ob bei der Verschiebung des Mikroskopes über die Fläche der Linse hinweg das Objectiv und sein Spiegelbild dieselbe relative Lage beizubehalten schienen. Die feinere Einstellung wurde sodann dadurch hervorgebracht, dass man mit Hülfe der stärksten Vergrösserung auf die über die ganze hintere Linsenfläche zerstreuten Lycopodiumkörner einstellte und das Linsensystem so lange drehte, bis bei derselben Stellung des Objectivauszugs sämmtliche Lycopodiumkörner auf der ganzen Oberfläche gleichmässig scharf erschienen; es dürfte hierdurch die normale Stellung des Linsensystems bis auf $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}^{\circ}$ garantirt werden können. Sodann wurde das Lager des Collimatorrohres mit Hülfe eines Fernrohrs mit Gauss'schem Ocular senkrecht gerichtet gegen die planparallele Platte und das Collimatorrohr eingelegt. Es war also auf diese Weise der Fall des senkrecht einfallenden Lichtes realisirt; wollte man dann den Einfallswinkel des Lichtes ändern, so hatte man nur nöthig, den Arm des Linsensystems um den gewünschten, auf der Kreistheilung abzulesenden Winkel zu drehen.

Was zunächst das Aussehen der Ringe betrifft, so erscheinen dieselben, mit dem Mikroskop betrachtet, namentlich in der Nähe des Mittelpunktes als ungemein verschwommene, nebelhafte Gebilde, um so schwerer erkennbar, je stärker die angewandte Vergrösserung, und je grösser der Einfalls-

winkel des Lichtes ist. Die Deutlichkeit ist noch am grössten in der centralen Einfallsebene des Lichtes, sie nimmt um so mehr ab, je weiter man sich von derselben entfernt, und erreicht ihr Minimum in der auf dieser centralen Einfallsebene senkrecht stehenden centralen Querebene. Hier war bei grösserem Einfallswinkel mit starker Vergrösserung überhaupt nichts mehr zu entdecken, bei Anwendung der schwächeren Vergrösserung blieb eine geringe Anzahl von Ringen auch hier noch sichtbar, wenn auch sehr schwer einstellbar.

Die Messungen selbst ergaben für senkrecht einfallendes Licht, wie die Theorie erwarten liess, nichts Neues: War das Mikroskop einmal auf einen beliebigen Punkt der in diesem Falle kreisförmigen Ringe scharf eingestellt, so konnte man dasselbe über das ganze System mit derselben Stellung des Objectivauszugs hinwegbewegen, ohne dass irgendwo die Deutlichkeit sich vermindert hätte. Das ganze System liegt also hier in einer Ebene, nämlich der inneren Ebene der planparallelen Platte. Für die Maassverhältnisse der Ringdurchmesser gilt das bekannte Gesetz der Quadratwurzeln.

Ganz anders sind die Verhältnisse bei schräg einfallendem Lichte.

Die Theorie verlangt, dass in diesem Falle die Ringe nicht mehr Kreise sind, sondern Curven doppelter Krümmung, die sämmtlich auf einer geradlinigen Fläche dritter Ordnung liegen, der Interferenzfläche. Diese letztere soll eine zur entsprechenden Interferenzfläche im reflectirten Lichte spiegelbildliche Lage haben (wenn man als spiegelnde Fläche die innere Fläche der Glasplatte betrachtet); während dieselbe also im reflectirten Lichte sich innerhalb der der Lichtquelle zugewandten Glasplatte ausbreiten würde, soll sie in unserem Falle innerhalb der dem Lichte abgewandten Linse liegen, im übrigen aber sämmtliche für die Interferenzfläche im reflectirten Lichte bereits durch die Herren Sohncke und Wangerin nachgewiesene Eigenthümlichkeiten zeigen, mit dem einzigen Unterschiede, dass ihre Gestalt nicht, wie beim reflectirten Lichte, abhängt von der Dicke der Glasplatte, sondern von der Dicke der Glaslinse, gemessen im Mittelpunkt des Linsensystems.

Auch in unserem Falle wird also die Interferenzfläche zwei Gerade enthalten, welche sämmtliche Ringe treffen, und zwar die in der centralen Einfallsebene des Lichtes liegende Hauptgerade und die senkrecht dazu liegende centrale Quergerade. Die Hauptgerade soll bei schrägem Einfall des Lichtes nicht mehr parallel sein den planen Flächen der Platte, sondern mit diesen einen Winkel bilden, dessen Grösse einzig und allein abhängt vom Einfallswinkel des Lichtes. Die Quergerade dagegen wird stets parallel bleiben den Flächen der Platte, sie soll ohne Schnitt unter der Hauptgeraden vorbeigehen, und zwar um so tiefer unter die letztere sinken, je grösser der Einfallswinkel des Lichtes ist. Die auf diesen beiden Geraden liegenden Durchmesser der Ringe sollen das Gesetz der Quadratwurzeln befolgen, und zwar sollen die in Richtung der Hauptgeraden gemessenen Durchmesser gleich sein den in Richtung der Quergeraden gemessenen, wenn man sich die ersteren durch Parallele zur Mikroskopaxe auf die Ebene der Platte projecirt denkt.

Die lichtferne Hälfte der Ringe wird schneller und tiefer unter eine senkrecht zur Einfallsebene durch die Hauptgerade gelegte Ebene — die Hauptebene — sinken, als sich die lichtnahe Hälfte darüber erhebt; zum Theil wird die lichtnahe Hälfte noch unter Hauptebene liegen.

Es wurde nun zunächst die Lage der Interferenzorte in der centralen Einfallsebene geprüft. Zu diesem Zwecke waren, wenn man die Richtungen der horizontalen und verticalen Verschiebung des Kathetometers als Coordinatenaxen bezeichnet, die scheinbaren Coordinaten des Mittelpunktes des Ringsystems zu suchen, was, da man mit der angewandten starken Vergrösserung nie einen Ring vollkommen überblicken konnte, nur dadurch zu erreichen war, dass man die erst horizontal, dann vertical gestellten Fäden des Mikroskops als Tangenten an ein und denselben Ring legte und durch Halbiring der so erhaltenen Grössen die Mittelpunktscoordinaten berechnete. In der für den Mittelpunkt gefundenen Höhe, die also gleichzeitig die Einfallsebene des Lichtes darstellt, wurde dann das Mikroskop mittelst der horizontalen Verschiebung des Kathetometers an das eine Ende des

Ringsystems verschoben und mit Hülfe des Objectivauszuges auf den zwischen dem Fadenpaare erscheinenden Ring scharf eingestellt, dessen Abscissen direct der Nonius des Kathetometers angab, und die Stellung des Objectivrohres abgelesen. Sodann wurde der ganze Kathetometeraufsatz um ein bestimmtes Stück in horizontaler Richtung nach der Mitte zu verschoben, das Mikroskop wieder scharf eingestellt, die neue Stellung des Objectivrohres abgelesen, und so fort über das ganze System hinweg. Die so abgelesenen Stellungen des Rohres hatte man sämmtlich mit Hülfe der oben bestimmten Correctionen x und y zu reduciren, die bei dieser Vergrößerung resp. $-0,05964$ und $+0,0001819$ betrugen, also beispielsweise bei der Stellung 50, resp. 52 des Mikroskoprohres:

$$50 + 50 \cdot x + 50^2 \cdot y = 47,471$$

$$52 + 52 \cdot x + 52^2 \cdot y = 49,342$$

Die Differenz 1,871

der so gefundenen, aufeinander folgenden Werthe ergibt die factische Verschiebung der Interferenzpunkte in Richtung der Mikroskopaxe. Trägt man diese Grössen, von einem beliebigen Anfangspunkte ausgehend, als Ordinaten eines schiefwinkligen Coordinatensystems auf, dessen Abscissen durch die entsprechenden horizontalen Verschiebungen des Kathetometeraufsatzes geliefert werden, so sollen die Verbindungslinien der betreffenden Endpunkte eine gerade Linie bilden. Fig. 4, in der die Erscheinungen für die Einfallswinkel $\vartheta = 28\frac{3}{4}$, 45 , $54\frac{3}{4}$, 60° in vierfacher Vergrößerung wiedergegeben sind, zeigt, dass dies in der That in sehr befriedigender Weise der Fall ist. Die Abweichungen von einer Geraden betragen im Maximum $0,3$ mm und zeigen auch keinerlei Gang, der auf andere Ursachen, als auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler schliessen liesse.

Diese Hauptgerade soll nun mit der Platte einen Winkel ω bilden, dessen Grösse gegeben ist durch die Formel: $\operatorname{tg} \omega = \sin \vartheta \cos \vartheta / (1 + \cos^2 \vartheta)$, wenn ϑ der Einfallswinkel des Lichtes ist, und zwar soll die Gerade nach der lichtnahen Hälfte des Systems aufsteigen. Dies letztere lässt sich leicht dadurch verificiren, dass man die plane Fläche der Linse mit

Lyc
licht
eben
auf e
Lyc
deutl
findet
Ueber
lichtst
24. R
liegen
innerl
Theil
der L
D
vorher
E
Strahl
also h
Kathe
dann i
AD.
man d
kel &
Haupt
mit ihr
Ni
nächst
schiebu
so war,
Stück h
gleich i
die Grö
JH (ab
nach tg
des Dre
Setzt m
kann au

Lycopodiumsamen bestäubt und nun das Mikroskop, von der lichtfernen Hälfte beginnend, in der Richtung der Einfallsebene vorschiebt. Man kommt dann in der lichtnahen Hälfte auf einen Punkt, wo neben den Ringerscheinungen auch die Lycopodiumkörner, die vorher unsichtbar waren, deutlich und deutlicher werden, dann aber wieder verschwinden, und man findet beispielsweise für den Einfallswinkel $\vartheta = 28\frac{3}{4}^\circ$, in Uebereinstimmung mit der Theorie, dass die Körner am deutlichsten erscheinen etwa beim 115. Ring, bei $\vartheta = 45^\circ$ beim 24. Ring etc. Bei den Ringen mit niedrigerer Ordnungszahl liegen demnach die scheinbaren Interferenzen vollkommen innerhalb der Glascombination, bei den folgenden liegt ein Theil derselben jedoch ausserhalb des ganzen Systems in der Luft.

Die Neigung der Hauptgeraden ω findet man aus den vorher angegebenen Messungen auf folgende Weise:

Es sei (cf. Fig. 5) PO die Richtung der einfallenden Strahlen, $ABCD$ das Linsensystem in normaler Stellung, also bei senkrecht einfallendem Lichte, M das längs der Kathetometersohle EF horizontal verschiebbare Mikroskop, dann ist, wie oben nachgewiesen, die Hauptgerade parallel AD . Aendert man nun den Einfallswinkel dadurch, dass man das um O drehbare System um den gewünschten Winkel ϑ in die Stellung $A'B'C'D'$ dreht, so ist nunmehr die Hauptgerade ST nicht mehr parallel $A'D'$, sondern bildet mit ihr den zu bestimmenden Winkel ω .

Nimmt man an, man habe nach der Drehung um ϑ zunächst den Punkt L ins Auge gefasst, dann nach der Verschiebung des Mikroskops um das Stück GN den Punkt J , so war, um diesen scharf zu sehen, das Objectivrohr um ein Stück herauszuziehen, das nach der Reduction durch x und y gleich ist dem Stücke JH . Man kennt also im Dreieck JHL die Grössen LH ($= GN$, direct abgelesen an Nonius) und JH (abgelesen auf dem Mikroskopauszuge), und findet demnach $\text{tg } \lambda = JH/LH$, somit aber, da $\nless \vartheta$ der Aussenwinkel des Dreiecks LKR ist, auch den gesuchten $\nless \omega = \vartheta - \lambda$. Setzt man also $\text{tg } \lambda = x$, so hat man $JH = x \cdot LH$ und kann aus sämtlichen Beobachtungen die Grösse x nach der

Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, somit $\lambda = \arctg x$ finden, und damit auch den Werth von ω . Hierbei hat man noch zu berücksichtigen, dass die Einstellungen in der Nähe des Mittelpunktes des Systems ungemein unsicher werden, da die Ringe hier kaum mehr sichtbar sind, — es ist deshalb vollkommen gerechtfertigt, diesen Beobachtungen bei der Ausgleichung ein geringeres Gewicht — etwa das Gewicht $\frac{1}{2}$ — zu ertheilen. Mit Berücksichtigung dieses Umstandes ergaben sich für die verschiedenen Einfallswinkel ϑ folgende Werthe von ω :

| | | | |
|---------------------------------------|---|----------------------------|--|
| $\vartheta = 28\frac{3}{4}^{\circ}$: | ω (beob.) = $13^{\circ} 17'$ ω (berechn.) = $13^{\circ} 25'$ $v = + 0^{\circ} 8'$ | $\vartheta = 45^{\circ}$: | ω (beob.) = $18^{\circ} 9'$ ω (berechn.) = $18^{\circ} 26'$ $v = + 0^{\circ} 17'$ |
| $\vartheta = 54\frac{3}{4}^{\circ}$: | ω (beob.) = $20^{\circ} 8'$ ω (berechn.) = $19^{\circ} 28'$ $v = - 0^{\circ} 40'$ | $\vartheta = 60^{\circ}$: | ω (beob.) = $19^{\circ} 28'$ ω (berechn.) = $19^{\circ} 15'$ $v = - 0^{\circ} 13'$ |

Bedenkt man die Unsicherheit des Winkels ϑ , die bei der angewandten Methode, das Mikroskop senkrecht zum Linsensystem zu stellen, wohl noch bis zu $\frac{1}{2}^{\circ}$ betragen kann, sowie die Schwierigkeit der Beobachtung, die, um auf diesem Wege überhaupt ans Ziel zu gelangen, für jeden Punkt mindestens 5—8 Einzeleinstellungen nöthig machte, so darf die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung gewiss als eine befriedigende betrachtet werden.

Aus theoretischen Gründen ergibt sich, dass $\neq \omega$ bei einem Einfallswinkel des Lichtes von $54\frac{3}{4}^{\circ}$ sein Maximum erreicht haben muss. Leider gelang es nicht, Versuche mit grösserem Einfallswinkel als 60° anzustellen, weil die vorstehende Fassung der Linse das Licht am Eintritt hinderte. Da jedoch die theoretische Formel für die Grösse des $\neq \omega$ durch das Experiment bestätigt zu sein scheint, so ist jedenfalls auch die aus ihr abgeleitete Maximalbestimmung richtig, und der Rückgang des beobachteten Werthes ω_{60} gegenüber $\omega_{54\frac{3}{4}}$ spricht ebenfalls dafür, wenn auch die Differenz der theoretisch geforderten Werthe noch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

Demnächst war zu untersuchen die Lage der Ringpunkte

in der zur centralen Einfallsebene senkrechten Ebene, der centralen Querebene. Sämmtliche Punkte sollten hier ebenfalls auf einer Geraden liegen, die aber bei jedem Einfallswinkel parallel den planen Flächen des Systems verläuft.

Nur beim Einfallswinkel $\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$ gelang es überhaupt, einige Interferenzen in dieser Richtung auch mit starker Vergrößerung zu sehen, bei den grösseren Einfallswinkeln musste schwächere Vergrößerung gewählt werden, die natürlich viel unsicherere Einstellungen ergibt. Es zeigte sich aber doch, dass man in jedem Falle die sämmtlichen Punkte des ganzen Systems in dieser Richtung deutlich erkennen konnte, ohne die Stellung des Objectivrohres zu ändern, wenn man einmal auf einen bestimmten Punkt eingestellt hatte, was an sich schon zum Beweise genügen würde. Auch die graphische Aufzeichnung gibt zwar natürlich bei Anwendung der schwächeren Vergrößerung stärkere Abweichungen, dieselben sprechen jedoch ebenfalls ihrem Vorzeichen nach nur für zufällige Einstellungsfehler, die mit stärkerer Vergrößerung bei $\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$ vorgenommenen Messungen stimmen dagegen auch der Grösse nach ganz vorzüglich miteinander überein (cf. Fig. 6).

Nach der Theorie soll die Quergerade ohne Schnitt hinter der Hauptgeraden vorbeigehen, und zwar soll die Entfernung beider Linien voneinander mit dem Einfallswinkel des Lichtes wachsen.

Auch dies wurde durch die Messungen vollkommen bestätigt, und zwar in dem Falle, wo stärkere Vergrößerung anwendbar war ($\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$), auch quantitativ. Es wurde aus zwei correspondirenden Einstellungen auf die Hauptgerade die Grösse berechnet, um welche das Objectivrohr hätte herausgezogen werden müssen, wenn man gerade im Mittelpunkt des Systems die Lage der Hauptgeraden hätte fixiren wollen. Stellte man dann die Quergerade wirklich ein, so ergab sich für $\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$, dass das Mikroskop noch um 0,42 mm weiter herausgezogen werden musste, um von dem betreffenden Punkte der Hauptgeraden aus gezählt die auf der Quergeraden liegenden Punkte deutlich zu sehen, — die Theorie ergab 0,59 mm entsprechend:

$$\vartheta = 28\frac{3}{4}^{\circ} \text{ (starke Vergrößerung) beob.: } 0,42 \text{ mm}$$

$$\text{berechn.: } 0,59 \text{ "}$$

$$v = + 0,17 \text{ mm}$$

$$\vartheta = 45^{\circ} \text{ (schwache Vergr.) beob.: } 0,88 \text{ mm}$$

$$\text{berechn.: } 1,53 \text{ "}$$

$$v = + 0,65 \text{ mm}$$

$$\vartheta = 54\frac{3}{4}^{\circ} \text{ (beob.): } 3,56 \text{ mm}$$

$$\text{(berechn.): } 2,37 \text{ "}$$

$$v = - 1,19 \text{ mm.}$$

Um von der Gestalt der Interferenzfläche auch ausserhalb der Haupt- und Quergeraden ein Bild zu gewinnen, verfährt man nach Angabe von Sohncke¹⁾ am besten folgendermassen: Man denkt sich die durch die horizontale und verticale Verschiebung des Kathetometers bestimmte Ebene in lauter Rechtecke zerlegt, deren Projection auf die plane Fläche der Linse parallel der Mikroskopaxe natürlich ebenfalls ein entsprechendes Gitter bilden würde, und zwar wird bei der Projection die Grösse der verticalen Seiten der Rechtecke nicht geändert, die der horizontalen wird gleich der Horizontalverschiebung des Mikroskopes dividirt durch den cosinus des Einfallswinkels. Nimmt man nun in den betreffenden Eckpunkten der Rechtecke Einstellungen auf die Ringpunkte vor, dann erhält man durch die Grösse der Verschiebung, welche man dem Mikroskop ertheilen muss, um den jeweilig eingestellten Punkt scharf zu sehen, direct ein Bild von der Gestalt der Fläche. Es ergibt sich dann in der That sofort, entsprechend der Theorie, dass die centrale Einfallsebene eine Symmetrieebene für die Interferenzfläche ist, nicht aber die Querebene. Am deutlichsten erkennt man die Verhältnisse, wenn man sich durch die Hauptgerade eine auf der Einfallsebene senkrecht stehende Ebene (die Hauptebene) gelegt denkt, die also in unserem Falle eine verticale Lage haben würde, und nun zusieht, welche Hebung über, resp. Senkung unter diese Ebene dem betreffenden Interferenzorte zukommt. Im Folgenden sind die Beobachtungen für zwei Einfallswinkel wiedergegeben, sodass die Zahlen schon durch ihre Stellung die entsprechende Lage der Ringpunkte anzeigen, und zwar sind die beobachteten Zahlen die Mittel aus den für die beiden symmetrischen Hälften erhaltenen Werthe, während die aus den theoreti-

1) Sohncke, l. c.

schen Formeln hierfür berechneten Grössen in Klammer darunter stehen. Die Richtung der mit 0,00 bezeichneten Zahlen würde also zugleich die Richtung der Hauptgeraden, die Richtung der stark gedruckten die der Querggeraden angeben, das \pm Zeichen sagt, ob das Mikroskop, von der Einstellung auf den entsprechenden Punkt der Hauptgeraden an gerechnet, zurückgezogen oder vorgeschoben werden musste.

$\vartheta = 28^{\circ} \frac{3}{4}$ (starke Vergrösserung)

| | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | -0,47 | -0,52 | -0,50 | +0,20 | | |
| | [-0,16] | [-0,23] | [-0,57] | [-0,09] | | |
| -0,14 | -0,14 | -0,42 | -0,50 | +0,07 | +0,08 | +0,05 |
| [-0,03] | [-0,04] | [-0,08] | [-0,57] | [-0,03] | [+0,03] | [+0,06] |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 mm |

$\vartheta = 45^{\circ}$ (schwache Vergrösserung)

| | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | -0,55 | -1,49 | -0,91 | +0,06 | | |
| | [-0,45] | [-0,93] | [-1,53] | [-0,10] | | |
| -0,23 | -0,25 | -0,96 | -0,91 | +0,04 | +0,09 | +0,00 |
| [-0,07] | [-0,12] | [-0,27] | [-1,53] | [-0,03] | [+0,04] | [+0,04] |
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 mm |

Nach demselben Principe verfahrend, kann man auch einem einzelnen Ringe folgen und findet dann beispielsweise die in Fig. 7 gegebenen Werthe: (Ring Nr. 13).

Bedenkt man, dass der Objectivauszug, durch den diese Messungen vermittelt wurden, nur in halbe Millimeter getheilt war, also die Zehntel bereits auf Schätzung beruhen, dass die Reduction der Mikroskopangaben auf die thatsächliche Verschiebung bei Anwendung der starken, resp. schwachen Vergrösserung noch mit wahrscheinlichen Fehlern von 0,05, resp. 0,12 mm behaftet ist, und zieht man die Verschwommenheit der Gebilde seitwärts von der Hauptgeraden namentlich bei grösseren Einfallswinkeln in Betracht, durch welche es bedingt wurde, dass die Einzeleinstellungen auf ein und denselben Punkt mit der starken Vergrösserung Abweichungen bis zu 2 mm, mit der schwachen sogar bis zu 5 mm ergeben konnten, so liess sich eine derartige Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment, durch welches letzteres wenigstens der ganze Charakter der Interferenzfläche wiedergegeben wird, wohl kaum von vornherein erwarten.

Die grössten, bei den gegebenen Verhältnissen fast überwindlichen Schwierigkeiten stellten sich den Messungen entgegen bei Bestimmung der Durchmesser der verschiedenen Ringe. Die Theorie verlangt, dass die Durchmesser der Ringe, gemessen in Richtung der Hauptgeraden und der darauf senkrecht stehenden Quergeraden, das Gesetz der Quadratwurzeln befolgen, aber nur in dem Falle des senkrecht einfallenden Lichtes einander ohne weiteres gleich sind. Bei jedem anderen Einfallswinkel soll erst die Projection der auf den Hauptgeraden liegenden Ringdurchmesser auf die plane Fläche der Linse, ausgeführt in Richtung der Mikroskopaxe, gleich sein den entsprechenden, in Richtung der Quergeraden direct gemessenen Ringdurchmessern. Die absolute Grösse der letzteren ergibt sich theoretisch als:

$$d = 2 \cdot \sqrt{h} \cdot \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\cos \vartheta}},$$

wenn man mit λ die Wellenlänge, mit ϑ den Einfallswinkel des Lichtes, mit r den Krümmungsradius der Linse und mit h die Ringnummer bezeichnet, wobei noch zu bemerken ist, dass diese Formel in unserem Falle nicht für die dunklen, sondern für die hellen Ringe gilt, welch' letztere ich der grösseren Deutlichkeit halber bei den Messungen allein berücksichtigte, während in der Formel für die dunklen Ringe statt h einzutreten hätte $[(2h - 1)/2]$.

Diese Formel für die Durchmesser der Ringe hat die Annahme zur Grundlage, dass Platte und Linse sich nur in einem Punkte, dem Mittelpunkte des ganzen Systems, berühren, eine Annahme, die thatsächlich wohl nie vollkommen erreicht werden kann und ganz besonders dann nicht, wenn man nicht in der Lage ist, für eine gleichmässige Temperatur zu sorgen. Obiger Uebelstand machte sich auch bei den vorliegenden Messungen sehr unangenehm fühlbar, denn dieselben wurden in einem kleinen Dunkelzimmer angestellt, dessen Temperatur sehr rasch stieg. Es musste dies zur Folge haben, dass die Schrauben, womit die beiden Glasfassungen zusammengehalten waren, sich verlängerten, den Druck der Federn unterstützten und die Glascombination auseinander pressten, sodass die Ringe rasch an Grösse ab-

nahmen. Ein nach dieser Richtung hin angestellter Versuch ergab in der That das in folgender kleinen Tabelle zusammengestellte Resultat, deren erste Spalte die Temperatur, welche zur Zeit der Messungen an einem an dem Linsensystem angebrachten Thermometer abgelesen wurde, die zweite Spalte die dazu gehörigen Durchmesser des ersten, die dritte Spalte die entsprechenden des zehnten Ringes enthält:

| Temperatur | 17,0 | 18,7 | 19,9 | 21,0 | 22,0 | 22,5° |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| d_1 | 6,68 | 6,06 | 5,36 | 4,84 | 5,32 | 5,32 mm |
| d_{10} | 15,90 | 15,58 | 15,22 | 15,12 | 15,08 | 15,12 mm |

Es fand also bei einer Temperaturzunahme um 4^0 eine Abnahme des Durchmessers des ersten Ringes von nahezu 30 Proc. statt, was der Grösse nach mindestens dem Dreissigfachen eines Einstellungsfehlers entsprechen würde. Weiter zeigt die Tabelle, dass diese Abnahme keineswegs gleichmässig erfolgte, ja sogar einmal in das Gegentheil umzuschlagen scheint, was wohl nur auf veränderte Spannungsverhältnisse der Glascombination, Biegung der Platte oder dgl. zurückzuführen sein dürfte. Da die Herstellung einer constanten Temperatur als vollkommen unausführbar von vornherein ausgeschlossen werden musste, die directen Messungen aber nur absolut unbrauchbare, negative Resultate ergeben konnten, so kam es darauf an, wenigstens einen möglichst grossen Theil des Temperatureinflusses durch die Art und die Reihenfolge der Messungen zu eliminiren, und in der That gelang das in ziemlich befriedigender Weise auf folgendem Wege: Es wurde zunächst durch eine vorläufige Messung der Mittelpunkt des ganzen Systems bestimmt; hierauf mass ich, von diesem ausgehend, die Halbmesser der Ringe auf den Hauptgeraden nach einer Seite hin und zurück und nahm das Mittel (I), sodann die entsprechenden Halbmesser in Richtung der Quergeraden hin und zurück und nahm das Mittel (II), und schliesslich wieder die Halbmesser auf den Hauptgeraden und nahm das Mittel (III). Das Mittel aus I und III ergab dann erst das bei der Rechnung in Betracht kommende, mit II zu vergleichende Resultat. Wäre die Voraussetzung gültig, dass die Abnahme der Ringdurchmesser proportional ist der auf die Messungen verwandten Zeit, resp.

der damit verbundenen Temperaturerhöhung, so würde diese Methode jedenfalls in vollkommen genügender Weise den Temperatureinfluss eliminirt haben. Da diese Annahme jedoch, wie die kleine Tabelle zeigt, keineswegs streng erfüllt ist, so konnte auch nur auf eine theilweise, aber doch schon recht beträchtliche Elimination des Wärmeeinflusses gerechnet werden. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, und zwar enthält die erste Spalte die Nummer des Ringes, die zweite die Grösse des direct gemessenen Halbmessers in Richtung der Quergeraden, die dritte die entsprechenden, bereits auf die plane Fläche projectirten Halbmesser in Richtung der Hauptgeraden, die vierte die entsprechenden Differenzen, die fünfte die Mittel aus 2 und 3, die sechste Spalte die entsprechenden, aus der theoretischen Formel berechneten Werthe, die siebente die Differenzen zwischen 5 und 6. Die letzte Spalte gibt somit zugleich auch die bei der angewandten Beobachtungsmethode noch übrig bleibenden Abweichungen vom Gesetze der Quadratwurzeln, denn die theoretische Formel für die Grösse der Ringhalbmesser:

$$\rho = \sqrt{h} \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\cos \vartheta}},$$

enthält eben in dem Factor \sqrt{h} dies Gesetz als wesentlichen Bestandtheil.

 $\vartheta = 0^\circ.$
 $\vartheta = 28^\circ \frac{3}{4}.$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----|------|------|----------------------|-------------------|------------------|---------------------|------|------|------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| mm | | | | | | | mm | | | | | | |
| 1 | 1,17 | 1,22 | + 0,05 | 1,19 ₅ | 1,19 | - 0,00 ₅ | 1 | 1,11 | 1,07 | - 0,04 | 1,09 | 1,27 | + 0,16 |
| 2 | 1,68 | 1,74 | + 0,05 | 1,70 ₅ | 1,68 | - 2 ₅ | 2 | 1,68 | 1,67 | - 7 | 1,67 ₅ | 1,80 | + 12 ₅ |
| 3 | 2,10 | 2,11 | + 12,10 | 2,06 | - 4 ₅ | 3 | 2,13 | 2,10 | - 3 | 2,11 ₅ | 2,20 | + 8 ₅ | |
| 4 | 2,40 | 2,43 | + 3 | 2,41 ₅ | 2,38 | - 3 ₅ | 4 | 2,47 | 2,44 | - 3 | 2,45 ₅ | 2,54 | + 8 ₅ |
| 5 | 2,70 | 2,70 | + 0 | 2,70 | 2,66 | - 4 | 5 | 2,77 | 2,73 | - 4 | 2,75 | 2,84 | + 9 |
| 6 | 2,97 | 2,96 | - 12,96 ₅ | 3,92 | - 4 ₅ | 6 | 3,05 | 3,02 | - 3 | 3,03 ₅ | 3,12 | + 8 ₅ | |
| 7 | 3,22 | 3,19 | - 3 | 3,20 ₅ | 3,15 | - 5 ₅ | 7 | 3,29 | 3,27 | - 2 | 3,28 | 3,37 | + 9 |
| 8 | 3,43 | 3,41 | - 2 | 3,42 | 3,37 | - 5 | 8 | 3,53 | 3,51 | - 2 | 3,52 | 3,60 | + 8 |
| 9 | 3,63 | 3,60 | - 3 | 3,61 ₅ | 3,57 | - 4 ₅ | 9 | 3,75 | 3,72 | - 3 | 3,73 ₅ | 3,82 | + 8 ₅ |
| 10 | 3,82 | 3,80 | - 2 | 3,81 | 3,77 | - 4 | 10 | 3,96 | 3,94 | - 2 | 3,95 | 4,02 | + 7 |
| 20 | 5,38 | 5,35 | - 3 | 5,36 ₅ | 5,33 | - 3 ₅ | 15 | 4,88 | 4,85 | - 3 | 4,86 ₅ | 4,93 | + 6 ₅ |
| 30 | 6,59 | 6,53 | - 6 | 6,56 | 6,52 | - 4 | 20 | 5,67 | 5,61 | - 6 | 5,64 | 5,68 | + 4 |
| | | | | | | | 25 | 6,36 | 6,27 | - 9 | 6,31 ₅ | 6,36 | + 4 ₅ |
| | | | | | | | 30 | 6,97 | 6,89 | - 8 | 6,93 | 6,97 | + 4 |
| | | | | | | | 40 | 8,08 | 7,98 | - 10 | 8,03 | 8,04 | + 1 |

$$\vartheta = 45^\circ.$$

$$\vartheta = 54\frac{3}{4}^\circ.$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|------|-------|---------------------|------|--------------------|----------------|---------|-------|-------|----------------------|-------|--------------------|-----------------|
| mm | | | | | | | mm | | | | | | |
| 1 1,37 | 1,34 | -0,03 | 1,35 ₅ | 1,42 | +0,06 ₅ | | 1 1,75 | 1,72 | -0,03 | 1,73 ₅ | 1,57 | -0,16 ₅ | |
| 2 2,04 | 1,99 | - | 5 2,01 ₅ | 2,00 | - | 1 ₅ | 2 2,41 | 2,36 | - | 5 2,38 ₅ | 2,22 | - | 16 ₅ |
| 3 2,50 | 2,46 | - | 4 2,48 | 2,45 | - | 3 | 3 2,89 | 2,84 | - | 5 2,86 ₅ | 2,72 | - | 14 ₅ |
| 4 2,86 | 2,84 | - | 2 2,85 | 2,83 | - | 2 | 4 3,33 | 3,24 | - | 9 3,28 ₅ | 3,14 | - | 14 ₅ |
| 5 3,19 | 3,18 | - | 1 3,18 ₅ | 3,17 | - | 1 ₅ | 5 3,68 | 3,60 | - | 8 3,64 | 3,51 | - | 13 |
| 6 3,49 | 3,48 | - | 1 3,48 ₅ | 3,47 | - | 1 ₅ | 6 4,02 | 3,93 | - | 9 3,97 ₅ | 3,84 | - | 13 ₅ |
| 7 3,79 | 3,75 | - | 4 3,77 | 3,75 | - | 2 | 7 4,32 | 4,23 | - | 9 4,27 ₅ | 4,15 | - | 12 ₅ |
| 8 4,04 | 4,00 | - | 4 4,02 | 4,01 | - | 1 | 8 4,60 | 4,49 | - | 11 4,54 ₅ | 4,44 | - | 10 ₅ |
| 9 4,29 | 4,26 | - | 3 4,27 ₅ | 4,25 | - | 2 ₅ | 9 4,87 | 4,77 | - | 10 4,82 | 4,71 | - | 11 |
| 10 4,51 | 4,48 | - | 3 4,49 ₅ | 4,48 | - | 1 ₅ | 10 5,10 | 5,03 | - | 7 5,06 ₅ | 4,96 | - | 10 ₅ |
| 15 5,50 | 5,47 | - | 3 4,48 ₅ | 4,49 | + | 0 ₅ | 15 6,21 | 6,13 | - | 8 6,17 | 6,08 | - | 9 |
| 20 6,36 | 6,35 | - | 1 6,35 ₅ | 6,33 | - | 2 ₅ | 20 7,20 | 7,03 | - | 17 7,11 ₅ | 7,02 | - | 9 ₅ |
| 25 7,10 | 7,06 | - | 4 7,08 | 7,08 | + | 0 | 25 | 7,87 | | 7,87 | 7,85 | - | 2 |
| 30 7,83 | 7,75 | - | 8 7,79 | 7,76 | - | 3 | 30 | 8,61 | | 8,61 | 8,59 | - | 2 |
| 35 | 8,36 | | 8,36 | 8,38 | + | 2 | 40 | 9,95 | | 9,95 | 9,92 | - | 3 |
| 40 | 8,94 | | 8,94 | 8,96 | + | 2 | 60 | 12,11 | | 12,11 | 12,15 | + | 4 |

Der Gang der Abweichungen v in der vierten und siebenten Spalte, deren Grösse die Einstellungsfehler immerhin noch bedeutend übersteigt, lässt natürlich noch das Vorhandensein einer das Resultat systematisch verfälschenden Fehlerquelle, eben des nicht vollkommen eliminirten Temperatureinflusses, erkennen, allein die Wirkung derselben ist doch mittelst der angewandten Methode so weit verringert, dass man unter Berücksichtigung der Schwierigkeit der Verhältnisse Theorie und Experiment auch in diesem Punkte als in ziemlich genügender Uebereinstimmung stehend wird betrachten dürfen.

VIII. Ueber Totalreflexion an doppeltbrechenden Krystallen; von Joh. Norrenberg.

(Zum Theil nach der Inauguraldissertation bearbeitet vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VI Fig. 8—15.)

I.

Die vorliegende, auf Anregung der Herren Prof. Ketteler und Dr. Pulfrich ausgeführte Experimentaluntersuchung bezweckt, einige Lücken auszufüllen, welche sämmtliche mit Hülfe der Totalreflexion zur experimentellen Prüfung

der Fresnel-Huygens'schen Gesetze bisher ausgeführten Arbeiten zeigen. Während die Beobachtungen von Wollaston¹⁾, W. Kohlrausch²⁾, Danker³⁾ und Pulfrich⁴⁾ angestellt wurden mit monochromatischem Lichte, mit demjenigen einer Na-Flamme, stellte ich mir zunächst die Aufgabe, die Abhängigkeit der Gestalt und Neigung der Grenzcurven von der Wellenlänge des die Krystallfläche beleuchtenden Lichtes genauer zu präcisiren.

Da ferner eine Prüfung der die Totalreflexion begleitenden Polarisationsverhältnisse bisher noch nicht ausgeführt worden, der theoretische Zusammenhang von Grenzwinkel, Neigungswinkel und Polarisationsazimuth aber von Ketteler⁵⁾ schon nachgewiesen ist, so habe ich gleichzeitig mit den eben genannten Versuchen die Bestimmung des Polarisationsazimuthes des unter dem Grenzwinkel reflectirten Lichtes verbunden.

Die ersten Beobachtungen beziehen sich vorwiegend auf eine Kalkspathfläche parallel zur optischen Axe. Jedoch hielt ich es mit Rücksicht auf die für das Polarisationsazimuth erhaltenen Resultate für nothwendig, meine Untersuchungen auch auf eine natürliche Spaltfläche des Kalkspathes auszudehnen. Von zweiaxigen Krystallen wurde ferner eine Gypsplatte parallel der optischen Axenebene untersucht und die Grenzcurven für vier Fraunhofer'sche Linien festgestellt. Im Hinblick auf die von W. Kohlrausch l. c. für eine Weinsäureplatte angegebenen Resultate wurde das Augenmerk auch auf die Polarisationsverhältnisse in der Richtung der optischen Axen gelenkt.

Die theoretischen Relationen, durch welche sich Grenz- und Neigungswinkel in ihrer Abhängigkeit von den optischen Constanten des Krystalls darstellen, waren schon früher durch

1) Wollaston, Phil. Trans. 1802. p. 365 u. 381; Gilbert, Ann. 31. p. 252. 1834.

2) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. p. 36. 7. p. 427. 1879.

3) Danker, N. Jahrb. f. Min. 1885. Beil. 4. p. 241.

4) Pulfrich, ibid. Beil. 5. p. 167. 1887.

5) Ketteler, Wied. Ann. 28. p. 290 u. 520. 1886.

die Herren Ketteler l. c., Liebisch¹⁾ und Pulfrich l. c. ermittelt worden. Es bedeute N den Brechungsexponenten des umgebenden Mediums, n_1 und n_2 die Hauptindices des Krystalls ($n_2 > n_1$), μ den Winkel zwischen Normale der Grenzfläche und der optischen Axe, endlich δ den Winkel zwischen der Ebene beider und der Einfallsebene, das sogenannte Azimuth der Einfallsebene. Alsdann ergibt sich unter Berücksichtigung, dass der zu einer beliebigen Schnittfläche gehörende Extremexponent durch die Formel:

$$(1) \quad n_2'^2 = n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu$$

definiert ist, für den der ausserordentlichen Welle entsprechenden Grenzwinkel die Gleichung:

$$(2) \quad \operatorname{tg}^2 e' = \frac{1}{\left(\frac{N^2}{n_1^2} - 1\right) \sin^2 \delta + \left(\frac{N^2}{n_2'^2} - 1\right) \cos^2 \delta}.$$

Umgekehrt ergibt sich hieraus zur Bestimmung des Azimuths der Einfallsebene der kurze Ausdruck:

$$(3) \quad \sin^2 \delta = \frac{n_1^2 (n_2'^2 - N^2 \sin^2 e')}{N^2 (n_2^2 - n_1^2) \sin^2 e'}.$$

Mut. mut. gelten diese Relationen auch für die drei Hauptschnitte zweiaxiger Krystalle. Für den Hauptschnitt eines einaxigen Krystalls, auf dessen Verificirung es uns bei den Beobachtungen zunächst ankommen wird, vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen dadurch, dass durch Einsetzen des Werthes $\mu = 90^\circ$ n_2' und n_2 identisch werden.

Berücksichtigen wir, dass $\operatorname{tg} e' = \rho$ den Radiusvector der Grenzcurve darstellt, so erhält diese letztere durch Gl. (2) die Gestalt einer Ellipse, einer Hyperbel oder zweier Geraden, sobald N grösser, kleiner oder gleich n_2' wird.

Projiciren wir in der von den genannten Herren ausgeführten Weise den Winkel zwischen Grenzcurve und Reflexionsebene auf eine zur Beobachtungsrichtung normale Ebene und nennen diesen projecirten Winkel den Neigungswinkel S , so ergibt sich für denselben die Gleichung:

$$(4) \quad \operatorname{tg} S = N^2 \frac{n_2'^2 - n_1^2}{n_1^2 n_2'^2} \sin \delta \cdot \cos \delta \cdot \sin e' \cdot \operatorname{tg} e'.$$

1) Liebisch, N. Jahrb. f. Min. 1885. 2. p. 181. 1886. 2. p. 47.

Auch die Formeln, durch welche für den Fall der Totalreflexion die Schwingungsrichtung des einfallenden und des reflectirten Lichtes bestimmt werden, sind vor kurzem von Ketteler l. c. abgeleitet worden. Aus der auf die Wellennormale bezüglichen Grenzbedingungen ergaben sich folgende Relationen:

$$(5) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \Theta_e &= \frac{\sin(r + e') \sin \Theta_d}{\sin(r + e') \cos(r - e') \cos \Theta_d - \operatorname{tg} \vartheta \sin^2 r} \\ \operatorname{tg} \Theta_r &= \frac{\sin(r - e') \sin \Theta_d}{\sin(r - e') \cos(r + e') \cos \Theta_d - \operatorname{tg} \vartheta \sin^2 r} \end{aligned}$$

Es bedeuten in diesen Formeln (entsprechend der Auffassung Fresnel's) Θ_e , Θ_d , Θ_r die Schwingungsazimuthe des einfallenden, durchgehenden und reflectirten Lichtes, ϑ den Winkel zwischen Strahl und Normale; e' den Grenzwinkel und r den zugehörigen Brechungswinkel der Normalen.

In Fig. 8 sei die Ebene (XZ) die Einfallsebene, die Ebene (XY) die reflectirende Trennungsebene. Dem unter dem Grenzwinkel e' einfallenden Strahle EO entspreche der gebrochene Strahl OS , welcher bei der Totalreflexion stets in der Trennungsebene, und die Normale ON , die immer in der Einfallsebene bleibt. Ferner bedeute die Ebene AOZ den durch die optische Axe OA und das Einfallslot gehenden Hauptschnitt. Aus der Betrachtung des Dreiecks AZN ergeben sich alsdann folgende Relationen.

$$\begin{aligned} (6) \quad \cos \alpha &= \cos \mu \cdot \cos r + \sin \mu \cdot \sin r \cdot \cos \delta. \\ (7) \quad \cos \mu &= \cos r \cdot \cos \alpha + \sin r \sin \alpha \cdot \cos \Theta_d. \\ (8) \quad \sin \Theta_d \cdot \sin \alpha &= \sin \delta \cdot \sin \mu. \end{aligned}$$

Ebenso ist im Dreieck ZNS :

$$(9) \quad \cos r_s = \cos r \cdot \cos \vartheta - \sin r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \Theta_d = 0.$$

Hierzu kommen die beiden Gleichungen:

$$(10) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_2^2} - \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$(11) \quad \operatorname{tg} \vartheta = n^2 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Aus Gleichung (9) folgt:

$$(12) \quad \cos \Theta_d = \operatorname{ctg} r \cdot \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in (7) erhalten wir nach einer einfachen Transformation:

$$\cos \mu = \cos r (\cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{ctg} \vartheta),$$

und hieraus unter Zuziehung von (11):

$$(13) \quad \cos \alpha = \frac{n_2^2 \cos r}{(n_2^2 - n_1^2) \cos \mu}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach r auf, so ergibt sich:

$$(14) \quad \operatorname{tg} r = \frac{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \mu}{(n_2^2 - n_1^2) \sin \mu \cos \mu \cos \delta},$$

sodass die praktische Anwendung von (5) vorher die successive Ausführung der Gleichungen (14), (13), (11) und (12) erfordert.

Eine weitere Betrachtung der, wie bemerkt, schon von Ketteler abgeleiteten Gl. (5) lehrt, dass in Bezug auf das Schwingungsazimuth eine gewisse Asymmetrie herrscht. Während nämlich bezüglich des Brechungsexponenten, des Grenz- und Neigungswinkels kein Unterschied zu Tage tritt, ob ein Lichtstrahl eine gewisse Richtung des Krystalles in dem einen oder anderen Sinne durchläuft, ist in Bezug auf das Schwingungsazimuth ein solcher Unterschied thatsächlich vorhanden. Denn ersetzen wir in Gl. (5) (vgl. Figur 9) den Winkel δ durch $\pi + \delta_1$, so wird hierdurch $r_1 = \pi - r$ und successive $\alpha_1 = \pi - \alpha$; $\vartheta_1 = -\vartheta$ und nach (8) $\Theta_1 = \Theta$. Infolgedessen erhalten wir statt (5) die folgende Gleichung:

$$(5_1) \quad \operatorname{tg} \Theta_r' = \frac{-\sin(r + e) \sin \Theta_d}{\sin(r + e) \cos(r - e) \cos \Theta_d - \operatorname{tg} \vartheta \sin^2 r}.$$

Infolgedessen also nach p. 846:

$$\operatorname{tg} \Theta_r' = -\operatorname{tg} \Theta_e.$$

In gleicher Weise ergibt sich auch:

$$\operatorname{tg} \Theta_r = -\operatorname{tg} \Theta_e'.$$

Natürlich wird die erwähnte Asymmetrie nur hervorgerufen durch die asymmetrische Lage der Begrenzungsfläche zur optischen Axe; innerhalb des Krystalles bleibt, wie sich aus den von Schrauf¹⁾ ausgeführten Beobachtungen ergibt,

1) Schrauf, Zeitschr. f. Kryst. 11. (1) p. 6. 1885.

die Symmetrie auch für die Schwingungsrichtung vollständig gewahrt.

Wir wollen nun aus den allgemeinen Gleichungen (5) und (5_a) die wichtigsten Specialfälle abzuleiten suchen. Wir bringen dieselben deshalb auf die übersichtlichere Form:

$$(15) \quad \operatorname{tg} \Theta_r = \frac{\sin \Theta_d (\cos e' - \nu \cos r)}{\cos \Theta_d (\cos r - \nu \cos e') - \operatorname{tg} \vartheta \sin r}.$$

$$(15_a) \quad \operatorname{tg} \Theta_r' = \frac{-\sin \Theta_d (\cos e' + \nu \cos r)}{\cos \Theta_d (\cos r - \nu \cos e') - \operatorname{tg} \vartheta \sin r},$$

wo ν die Bedeutung von $n'N$ hat.

1. Ist die den Krystall begrenzende Fläche ein Hauptschnitt, so ist wegen $\mu = 90^\circ$ auch $r = 90^\circ$, und somit bleibt die gebrochene Wellennormale in der Trennungsebene. In Anbetracht, dass nach (6) $\alpha = \delta$ und somit nach (11) ϑ einen im allgemeinen von Null verschiedenen Werth besitzt, wird $\Theta_d = 90^\circ$ und somit unter Fortfall des ganzen ersten Gliedes des Nenners:

$$\operatorname{tg} \Theta_r = \frac{-\cos e'}{\operatorname{tg} \vartheta}; \quad \operatorname{tg} \Theta_r' = \frac{\cos e'}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Da sich, wie Ketteler¹⁾ gezeigt, der Winkel S für diesen Fall durch die Relation bestimmen lässt:

$$\operatorname{tg} S = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos e'}, \quad \operatorname{tg} S' = \frac{-\operatorname{tg} \vartheta}{\cos e'},$$

so besteht zwischen Schwingungsazimuth und Neigungswinkel die Beziehung:

$$-\operatorname{ctg} \Theta_r = \operatorname{tg} S; \quad -\operatorname{ctg} \Theta_r' = \operatorname{tg} S'.$$

Führen wir statt des Schwingungsazimuthes Θ das Polarisationsazimuth $R = 90^\circ + \Theta$ ein, so erhalten wir für beide Fälle die Gleichung:

$$(16) \quad \operatorname{tg} R = \operatorname{tg} S,$$

d. h. Neigungswinkel und Polarisationsazimuth sind einander gleich.

2. Fällt bei einer beliebigen Schnittfläche die Einfallsebene mit dem Hauptschnitte zusammen $\delta = 0^\circ$, so bleiben Strahl und Wellennormale in der Einfallsebene. Da hier

1) Ketteler, l. c. p. 844.

nach (14) wegen $r = 90^\circ$, $\Theta_d = 0^\circ$ ist, so wird auch $\Theta_r = \Theta_r' = 0^\circ$ oder:

$$(17) \quad R = R' = 90^\circ,$$

d. h. das reflectirte Licht ist senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, oder Einfalls- und Schwingungsebene fallen zusammen. Diese Coincidenz beider Ebenen bleibt nicht bestehen, wenn die Schnittfläche der optischen Axe parallel ist, da hier für $\delta = 0^\circ$ auch $R = S = 0^\circ$ wird.

3. Steht bei einem beliebigen Schnitte die Einfallsebene senkrecht zur Ebene von Axe und Einfallslloth, also zum Hauptschnitt ($\delta = 90^\circ$), so ist nach (14) $r = 90^\circ$, also fällt die Wellennormale in die Trennungsfläche. Da nach Gl. (8) $\sin \Theta_d = \sin \mu / \sin \alpha$, nach Gl. (6) aber $\alpha = 90^\circ$ wird, so erhalten wir für diesen Fall die bemerkenswerthe Relation:

$$(18) \quad \Theta_d = \mu.$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Werthe in Gl. (15) ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \Theta_r = \frac{-\sin \mu \cdot \cos \epsilon'}{r \cdot \cos \mu \cdot \cos \epsilon} = -\frac{1}{r} \operatorname{tg} \mu \quad \text{oder:}$$

$$(19) \quad \operatorname{tg} \Theta_r = -\frac{n_1}{N} \cdot \operatorname{tg} \mu; \quad \text{und ebenso:}$$

$$(19_a) \quad \operatorname{tg} \Theta_r' = \frac{n_1}{N} \cdot \operatorname{tg} \mu.$$

Für den speciellen Fall eines Hauptschnittes $\mu = 90^\circ$, erhalten wir:

$$\Theta_r = -90^\circ; \quad \Theta_r' = +90^\circ; \quad R = 0^\circ; \quad R' = 180^\circ;$$

d. h. in beiden Fällen ist das reflectirte Licht in der Einfallsebene polarisirt, die Schwingungen finden senkrecht zu ihr statt.

II.

Zur Ausführung der Messungen diente das Kohlrausch'sche Totalreflectometer. Das benutzte Fernrohr, welches eine etwa zehnfache Vergrößerung bot¹⁾, ruhte in einer passenden

1) Einem vielfach vertretenen Irrthume gegenüber sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Schärfe der Grenze durchaus nicht an den Grad der Vergrößerung gebunden ist. In dem benutzten Fernrohre zeigte sich die Grenze mindestens ebenso scharf, wie auch bei der 1 $\frac{1}{2}$ -fachen Vergrößerung des minimalen, ursprünglich dem Apparate beigegebenen Fernröhrchens.

Hülse, welche an einer mit dem Apparate fest verbundenen, langen Eisenstange angebracht war. Bei Anwendung von weissem Lichte trat an Stelle des gewöhnlichen Oculars ein kleines Taschenspectroskop, vor dessen Spalt als Marke ein dünner Quersfaden gespannt wurde. Die zu untersuchende Krystallplatte wurde nach den bekannten von Kohlrausch angegebenen Regeln, natürlich vor Anbringung des Spectroskopes, orientirt. Um mich zu überzeugen, dass die spiegelnde Fläche senkrecht zu ihrer Drehungsaxe befindlich war, bediente ich mich auch häufig des Gauss'schen Oculars.

Was die Messungen mit weissem Lichte betrifft, so wurde nach erfolgter Orientirung zunächst das Fernrohr mit Hülfe von Na-Licht so eingestellt, dass die Grenzcurve das Maximum der Deutlichkeit erreichte. Hierauf wurde das Ocular des Fernrohres durch das kleine Browning'sche Taschenspectroskop ersetzt, wobei Sorge zu tragen war, dass der horizontal gestellte Spalt desselben genau die Stelle des Fadenkreuzes einnahm. Die Grenzcurve trat dann auch hier deutlich und scharf hervor, nur erschien infolge der geringen Vergrößerung des Spectroskopoculars alles kleiner und mehr zusammengerückt.

Da der grösste Theil der Beobachtungen im Winter ausgeführt wurde, so musste ich hierbei leider auf die Anwendung von Sonnenlicht verzichten und mich mit dem weissen Lichte eines Argand'schen Brenners begnügen. Um die einzelnen Spectralfarben deutlich als scharfe Linien hervortreten zu lassen, diente mir das monochromatische Licht von Salzperlen, die in einer dicht vor dem Argand'schen Brenner aufgestellten Bunsen'schen Flamme verbrannt wurden. Beide Flammen wurden in einer Entfernung von über einem Meter vom Apparate aufgestellt und das Licht derselben durch eine grosse Linse auf den Krystall concentrirt. Diese von Mach und Arbes¹⁾ zuerst in Anwendung gebrachte Beleuchtungsmethode besitzt sowohl den Vorzug der grösseren Helligkeit und Deutlichkeit, als auch werden

1) Mach u. Arbes, Rep. d. Physik. 22. p. 31. 1886.

durch die grosse Entfernung zwischen Lichtquelle und Apparat die störenden Temperatureinflüsse bedeutend verringert.

Die an Gyps ausgeführten Messungen wurden im Sommer mit dem von einer hellen Wolke reflectirten Lichte angestellt, das mittels Heliostat und Linse auf dem Fläschchen vereinigt wurde. Im übrigen war die Versuchsanordnung dieselbe wie vorhin. Dieses Verfahren, welches sich unmittelbar an das ursprüngliche Wollaston'sche anschliesst, kann als das für das Kohlrausch'sche Totalreflectometer geeignetste angesehen werden. Die Beobachtungen können im hell erleuchteten Zimmer ausgeführt werden, und ist jede andere als durch die Nähe des Beobachters entstehende Temperaturänderung ausgeschlossen.

Bei meinen Beobachtungen bediente ich mich stets des streifend einfallenden Lichtes. Dabei habe ich mich durch Einstellen auch auf die Grenze des reflectirten Lichtes häufig überzeugt, dass beide Grenzen immer vollständig zusammenfielen. Es war mir nicht möglich, eine Abweichung festzustellen, wie solche von Danker¹⁾ beobachtet wurde. Allerdings kann durch falsche Beleuchtung eine der Grenzcurve ähnliche Erscheinung eintreten, wenn nämlich die Lichtstrahlen nicht mehr streifend, sondern unter einem kleineren Winkel als 90° auffallen. Durch die Randstrahlen des Lichtkegels entsteht dann auch eine Grenze, die sich jedoch von der wirklichen Grenze der Totalreflexion durch ihre geringere Schärfe und durch den Umstand unterscheidet, dass dieselbe bei kleinen Verschiebungen des Apparates nicht an derselben Stelle bleibt. Der streifende Eintritt wurde dadurch erleichtert, dass die Krystallplatten, in Form von flachen Cylindern, mit verticalen Mantelflächen versehen wurden.

Die Bestimmung des Grenzwinkels wurde ausgeführt durch Einstellen der Grenzcurve auf den Durchschnittspunkt von Querfaden und Spectrallinie. Durch Beleuchten der Krystallplatte von links und rechts wurde der doppelte Grenzwinkel bestimmt, wodurch die durch eine etwaige mangelhafte Orientirung entstehenden Fehler zum Theil eliminiert wurden.

1) Danker, N. Jahrb. f. Min. 1885. Beil. 4. p. 241.

Die Ablesungen erfolgten an einem horizontalen Theilkreise, welcher mit zwei um 180° auseinander liegenden Nonien versehen war, die eine Bestimmung von $6'$ erlaubten. Aus den an beiden Nonien gemachten Ablesungen, die jedoch infolge einer grossen Excentricität stark differirten, wurde das Mittel genommen.

Der frühere kleine, in der Flüssigkeit befindliche Theilkreis zur Bestimmung der Neigung der Einfallsebene zur optischen Axenrichtung wurde durch einen anderen in 3° getheilten Kreis ersetzt, an dessen beiden Nonien man nach einiger Uebung noch $10'$ bequem schätzen konnte. Die Ablesungen erfolgten stets, nachdem das Fläschchen an dem Apparate befestigt war.

Die Lage der optischen Axe bei Kalkspath resp. der beiden Axen bei Gyps wurde zum Theil aus einer in grossem Maassstabe ausgeführten Zeichnung entnommen, zum Theil erhielt ich dieselbe durch Rechnung, indem ich die beobachteten Grenzwinkel in die Gleichung (3) einsetzte.

Durch passende Ventilation wurde die Temperatur des Beobachtungsraumes nahezu constant gehalten. Da jedoch immerhin kleine Schwankungen innerhalb 1 bis $1\frac{1}{2}$ Grad unvermeidlich waren, so wurden sämtliche beobachteten Grenzwinkel auf eine passende Mitteltemperatur reducirt, und zwar nach der einfachen Gleichung:

$$(20) \quad \sin e_{t_0} = \frac{N_t}{N_{t_0}} \cdot \sin e_t.$$

Die Messung des Neigungswinkels der Grenzcurve konnte natürlich nur bei homogenem Lichte ausgeführt werden, bei Benutzung des Spectroskops hat die Neigung der jetzt sichtbaren Grenzcurve nichts mit dem eigentlichen Neigungswinkel zu thun. Zur Ausführung der Messungen war das Fernrohr mit einem drehbaren Fadenkreuze versehen worden, wobei die Genauigkeit des die Drehung bestimmenden Verticalkreises $1'$ betrug. Jedoch konnte die Parallelstellung von Faden und Grenze nur mit einer Genauigkeit von 5–10' erzielt werden. Um auch hier von der Orientirung möglichst unabhängig zu sein, wurde die Bestimmung links und rechts

vorgenommen. Die Temperatur musste hierbei möglichst constant gehalten werden; eine Reduction auf eine Mitteltemperatur ist nicht möglich, indem hierfür keine einfache Beziehung wie beim Grenzwinkel vorhanden ist.

Wie zur Bestimmung des Grenz- und Neigungswinkels diente mir das Kohlrausch'sche Totalreflectometer auch zur Messung des Polarisationsazimuthes. Die Verwendbarkeit dieses Apparates wird erreicht durch Anbringung eines um seine Längsaxe drehbaren Nicols, welcher bei den Beobachtungen mit homogenem Lichte zwischen Fadenkreuz und Objectivlinse, bei solchen mit weissem Lichte zwischen Objectiv und Spectroskopspalt eingeschaltet und mit dem Theilkreise fest verbunden wird.

Die Beobachtungen wurden ausgeführt durch Einstellen des Nicols auf das Verschwinden der Grenzcurve, resp. auf das Intensitätsminimum des in der Nähe dieser Grenze reflectirten Lichtes. Dieses Verschwinden tritt bei zwei diametral gegenüberliegenden Stellungen des Nicols ein, sobald sowohl die Richtung der auf denselben auffallenden Strahlen, als auch die Längsaxe des Nicols genau mit der Drehungsaxe des Fernrohrs zusammenfällt. Sind diese beiden Bedingungen jedoch nicht erfüllt, so zeigen die beiden Ablesungen Differenzen, die mehr oder minder von 180° verschieden sind. Man kann diese Fehlerquelle, welche unter Umständen zu bedeutenden Abweichungen Veranlassung geben kann, wenn auch nicht vollständig, so doch mit hinreichender Genauigkeit eliminiren, indem man aus den Bestimmungen in den beiden diametral gegenüberliegenden Quadranten das Mittel nimmt¹⁾. Dieses Verfahren wurde bei den folgenden Untersuchungen stets eingeschlagen. Die bei dem angewendeten Beobachtungsverfahren zu erreichende Genauigkeit ist dieselbe, wie sie auch bei den von Schrauf²⁾ u. a. benutzten Methoden erzielt wurde. Sie beträgt durchschnittlich 1 bis

1) cf. van de Sande-Bakhuyzen, Pogg. Ann. 145. p. 259. 1872.
R. T. Glazebrook, Phil. Mag. 10. p. 247. 1880. — J. MacConnel, Phil. Mag. (5) 19. p. 317. 1885.

2) Schrauf, l. c. p. 847.

$1\frac{1}{2}$ Grad und kann auch durch eine 50malige Wiederholung, wie sie vielfach vorgenommen wird, nicht wesentlich erhöht werden.

III.

1) Kalkspath parallel der Axe. Alle möglichen Specialfälle, von denen oben die Rede war (vgl. p. 845), lassen sich unter Anwendung einer einzigen Flüssigkeit erledigen, deren Brechungsexponent für eine mittlere Farbe mit dem ordentlichen Index des Kalkspaths übereinstimmt, und die sich von letzterem ausserdem durch eine ungleiche Dispersion unterscheidet. Eine Flüssigkeit von der verlangten Qualität ist das Monobromnaphtalin, $C_{16}H_7Br$, welches sich auch infolge seiner übrigen Eigenschaften, namentlich seiner hohen Siedetemperatur und seiner Haltbarkeit, zur Benutzung im Kohlrausch'schen Apparate eignet.

Tabelle 1.

Brechungsexponenten von Monobromnaphtalin und Kalkspath.

| Linie | Wellenlänge | Monobromnaphtalin $t = 16,1^\circ C.$ | Kalkspath | |
|-----------------|-------------|--|-----------|---------|
| | | | n_2 | n_1 |
| Ka _u | 0,760 | 1,63988 | 1,64993 | 1,48268 |
| Li _u | 0,6705 | 1,64816 | 1,65391 | 1,48420 |
| Na | 0,5889 | 1,65846 | 1,65850 | 1,48639 |
| Tl | 0,5349 | 1,66868 | 1,66292 | 1,48840 |
| Cs _u | 0,4587 | 1,69394 | 1,67196 | 1,49245 |

Da bei einer Temperatur von $16,1^\circ C.$ der Brechungsexponent desselben für die Linie *D* mit dem der ordentlichen Welle entsprechenden Index des Kalkspaths übereinstimmt, so werden wir in der einen Hälfte des Spectrums Totalreflexion an Kalkspath, in der anderen Totalreflexion an Flüssigkeit haben.

Die Bestimmung der Brechungsexponenten erfolgte mit Hülfe eines grossen Meyerstein'schen Spectrometers. Als Temperaturcoefficient, d. h. als Abnahme des Brechungsexponenten bei einer Temperaturerhöhung von $1^\circ C.$ ergab sich

der Werth 0,000 455, welcher mit dem von Fock¹⁾ angegebenen übereinstimmt.

Nachdem das Nullazimuth, von der optischen Axe an gezählt, in der unter II p. 852 angegebenen Weise ermittelt worden, wurde zur Bestimmung des Grenzwinkels geschritten und alle beobachteten Werthe auf 16,1° C. reducirt. Aus der in grossem Maassstabe ausgeführten graphischen Darstellung sämtlicher Beobachtungen wurden für die von 10 zu 10° wachsenden Azimuthe die Werthe der Grenzwinkel entnommen und mit den aus Formel 1a berechneten verglichen. Die Resultate dieser graphischen Interpolation sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Tabelle 2.

Grenzwinkel zwischen Kalkspath parallel der Axe
und Monobromnaphtalin.

| | K _a | | Li | | Na | | Tl | | Cs | |
|---------|----------------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | e' beob. | Δ | e' beob. | Δ | e' beob. | Δ | e' beob. | Δ | e' beob. | Δ |
| 64° 36' | -4,0' | | 64° 15' | + 1,5' | 63° 42,5' | + 2,4' | 63° 7,5' | + 0,3' | 61° 45' | - 1,3' |
| 65 | -1,2 | | 64 36 | + 1,4 | 64 | - 0,9 | 63 28,8 | + 1,1 | 62 4,8 | - 1,3 |
| 66 4,8 | -0,5 | | 65 38,4 | + 0,3 | 65 1,2 | - 2,2 | 64 28,8 | - 0,5 | 63 | - 5,4 |
| 67 50,4 | -2,3 | | 67 24 | - 0,4 | 66 48 | \pm 0 | 66 12 | - 0,2 | 64 38,4 | - 5,6 |
| 70 21,6 | -2,4 | | 69 52,8 | - 0,9 | 69 14,4 | + 0,1 | 68 36 | + 0,4 | 67 4,8 | + 5,9 |
| 73 33,6 | -6,4 | | 73 | - 6,1 | 72 21,6 | + 0,3 | 71 33,6 | - 4,2 | 69 55,2 | + 4,0 |
| 77 33,6 | -9,3 | | 76 57,6 | - 3,8 | 76 2,4 | - 3,9 | 75 9,6 | - 4,2 | 73 9,6 | + 1,4 |
| | | | 81 31,2 | -12,2 | 80 14,4 | - 9,6 | 79 4,8 | - 8,5 | 76 36 | + 2,1 |
| | | | | | 84 53 | -13,2 | 83 2,5 | - 5,0 | 79 32,2 | + 2,0 |
| | | | | | 90 | - | 84 57 | -16,0 | 80 35,5 | -10,4 |

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, zeigen Beobachtung und Rechnung eine befriedigende Uebereinstimmung (Δ bedeutet beob. — berechn.). Von einzelnen mit grösseren Schwierigkeiten verbundenen Beobachtungen abgesehen, überschreiten die Differenzen nicht die Grenze der Genauigkeit der graphischen Darstellung und der beim Kohlrausch'schen Apparate vorkommenden Beobachtungsfehler.

Eine bessere Uebersicht erhalten die Werthe der Grenzwinkel durch die in Fig. 10 der Tafel wiedergegebene graphische Darstellung. Als Abscissen sind die Azimuthe δ ,

1) Fock, Zeitschr. f. Krystall. 4. p. 583. 1880.

als Ordinaten die Grenzwinkel ϵ' aufgetragen. Man sieht, wie für die Ka_{α} - und Li_{α} -Linie die Grenzwinkel schon den Werth 90° erreichen, wenn das Azimuth $13^{\circ}6'05''$, resp. $17^{\circ}46'31''$ beträgt. Letztere Werthe bestimmen sich aus Gleichung (3) durch Einsetzen von $\epsilon' = 90^{\circ}$. Für die Na-Linie erhält der Grenzwinkel den Werth 90° , sobald die Einfallsebene durch die optische Axe hindurchgeht, während für Tl und Cs_{α} der Grenzwinkel überhaupt nicht den Werth 90° erreicht. Ferner ist aus derselben Fig. 10 ersichtlich, dass in der Richtung der optischen Axe das totalreflectirte Licht nur grüne und blaue Farben enthält, und dass nur für diese Farben eine dem ordentlichen Strahle entsprechende Grenzcurve vorhanden sein kann. Näherte man sich durch Drehen der Verticalaxe langsam dem Grenzwinkel $\epsilon' = 90^{\circ}$, so rückten die beiden Grenzcurven¹⁾ stetig aus dem Blauen nach dem Grünen vor, um schliesslich im Gelb zu verschwinden. Bei einer höheren Temperatur als $16,1^{\circ} C.$ trat dieses Verschwinden der Grenzcurven schon im Grün, bei niedriger erst im Roth ein. Es ist dies leicht erklärlich, da der Brechungsexponent der Flüssigkeit von der Temperatur abhängig ist; die bei $16,1^{\circ} C.$ für die D -Linie stattfindende Coincidenz mit dem Brechungsexponenten von Kalkspath tritt deshalb bei anderen Temperaturen auch für andere Farben ein.

Drehte man nun, nachdem die Grenzcurve im Gelb verschwunden war, die Verticalaxe noch weiter, sodass das Fernrohr jetzt gegen die Rückseite der reflectirenden Krystallfläche gerichtet war, so traten jenseits des Gelb wieder beide Grenzcurven auf, um bei weiterem Drehen im Ultraroth zu verschwinden. Diese letzteren Grenzcurven rühren aber jetzt von einer Totalreflexion an der Flüssigkeit her; berücksichtigt man die Brechung der Grenzstrahlen an der Mantelfläche des Krystallcylinders, so lassen sich auch diese Beobachtungen zur Bestimmung der ordentlichen Brechungsexponenten des Kalkspaths verwenden.

Eine noch grössere Anschaulichkeit erhalten die ermittel-

1) Zur Unterscheidung beider Grenzen diente ein vorgehaltenes Nicol. Beim Azimuth $\delta = 0^{\circ}$ fielen beide Grenzen genau zusammen, ein Zeichen, dass die Platte genau parallel zur Axe geschliffen war.

ten Resultate, wenn wir die dem Grenzwinkel e' entsprechenden und dem Azimuth δ als Polarwinkel zugeordneten Radiivectoren $\rho = tg e'$ graphisch darstellen, wie dies Figur 11 zeigt. Wir erhalten dann sofort die vollständigen Grenzcurven der Totalreflexion, wie sie das in der Flüssigkeit befindliche Auge auf der Krystallfläche bei Beleuchtung mit mehrfarbigem Lichte wahrnehmen würde.

Die Bestimmung des Neigungswinkels musste, wie bemerkt, mit homogenem Lichte ausgeführt werden. Da die Intensität des durch Verbrennen der Ka- und Cs-Salze erzielten Lichtes eine zu geringe ist, so beschränken sich die Beobachtungen auf die durch Beleuchtung mit Li-, Na- und Tl-Licht entstehenden Grenzcurven. Wie beim Grenzwinkel, so wurden auch hier durch graphische Interpolation die den von 10 zu 10° steigenden Azimuthen entsprechenden Neigungswinkel ermittelt und mit den nach Formel (4) berechneten Werthen verglichen.

Tabelle 3.

Neigungswinkel S an einer Kalkspathfläche parallel der Axe.

| Azimuth | Li | | Na | | Tl | |
|------------|-----------------|----------|----------------|----------|-----------|----------|
| | S beob. | Δ | S beob. | Δ | S beob. | Δ |
| 90° | 0° | $\pm 0'$ | 0° | $\pm 0'$ | 0° | $\pm 0'$ |
| 60 | 13 | $- 6$ | $12\ 48'$ | $- 2$ | $12\ 42'$ | $+ 8$ |
| 50 | $16^\circ\ 54'$ | $- 7$ | $16\ 36$ | ± 0 | $16\ 30$ | $+18$ |
| 40 | $20\ 15$ | -21 | $19\ 54$ | $- 0,7$ | $19\ 45$ | $+28$ |
| 30 | 24 — | $+ 1$ | $22\ 54$ | $+14$ | $22\ 12$ | $+38$ |
| 20 | 28 — | $- 5$ | 25 — | $+11$ | $23\ 12$ | $+44$ |
| 10 | — | — | $26\ 48$ | $+14$ | $19\ 36$ | $+ 6$ |
| 5 | — | — | ca. 27° | $+26$ | — | — |

Obgleich die Differenzen hier an einzelnen Stellen die Grenzen der Beobachtungsfehler übersteigen, so muss doch die Uebereinstimmung als eine befriedigende bezeichnet werden, indem die Temperatur auf den Neigungswinkel von grossem Einflusse ist, und die durch sie hervorgerufenen Fehler ohne zu weitläufige Rechnung nicht eliminirt werden konnten.

Während für Ka_{α} , Li_{α} und Na , wie aus der graphischen Darstellung in Fig. 12 ersichtlich, die Neigungswinkel von ihrem Anfangswerthe O an sich einem durch die Formel (8) bestimmbaren Werthe nähern, kehrt für Tl und Cs die Grenzcurve wieder in ihre ursprüngliche Verticalstellung zurück, was durch die bei den Azimuthen $\delta = 0$ und $\delta = 90^{\circ}$ eintretende Coincidenz von Radiusvector und Normale bedingt ist. Für kleine Azimuthe überzeugte schon ein einfacher ad oculos-Versuch von der für verschiedene Farben eintretenden Verschiedenheit des Neigungswinkels. Stellte man für ein solches Azimuth, und zwar für die D -Linie den Faden des Fadenkreuzes parallel zur Grenze, so zeigten beide bei einer Beleuchtung mit Li - oder Tl -Licht eine mehr oder minder grosse Neigung gegeneinander.

Entsprechend der Bestimmung des Grenz- und Neigungswinkels, wurde auch das Polarisationsazimuth an einer zur optischen Axe parallel geschliffenen Kalkspathfläche mit Hülfe des Spectroskops für mehrere Spectralfarben ermittelt, und zwar unter Anwendung von Monobromnaphtalin. Für eine solche Fläche sollen, wie die Theorie zufolge Gleichung (16) verlangt, für beliebige Flüssigkeiten Polarisationswinkel R und Neigungswinkel S übereinstimmen. Die Beobachtungen wurden, wie dies auch schon für den Neigungswinkel geschehen war, nur für Li_{α} , Na und Tl ausgeführt. Die Messungen ergaben jedoch für diese drei Farben, abgesehen von Beobachtungsfehlern, die gleichen Werthe für das Polarisationsazimuth, indem fast für den ganzen Verlauf der Curven, wie Fig. 12 zeigt, die Differenzen der für Li - und Tl -Licht stattfindenden Neigungswinkel und somit auch der Polarisationsazimuthe die Grenzen der Beobachtungsfehler (vgl. p. 853) kaum übersteigen. Es sind in der folgenden Tabelle deshalb nur die für Na -Licht erhaltenen Resultate mitgetheilt, jeder Werth ist das Mittel aus acht bis zehn Beobachtungen. Da in diesem speciellen Falle $\theta = \theta'$, so konnte bei Beleuchtung von links und rechts beobachtet und aus beiden Beobachtungen das Mittel genommen werden.

Tabelle 4.

Polarisationsazimuth R für Kalkspath parallel der
Axe und Monobromnaphtalin.

| δ | R beob. | S ber. — R beob. | δ | R beob. | S ber. — R beob. |
|----------|-----------|----------------------|----------|-----------|----------------------|
| 90° | 0° | $\pm 0^\circ$ | 40° | 20,8° | +0,9° |
| 80 | 4,4° | ± 0 | 30 | 24,0 | +1,3 |
| 70 | 8,8 | ± 0 | 20 | 28,1 | +3,3 |
| 60 | 13,1 | +0,3 | 10 | 36,1 | +9,5 |
| 50 | 17,1 | +0,5 | | | |

Wie aus dieser Tabelle hervorgeht, kann die Uebereinstimmung des Neigungswinkels und des Polarisationsazimuths innerhalb des Intervalles $\delta = 90^\circ$ bis 30° als eine vollständige bezeichnet werden, während bei kleineren Azimuthen wachsende Differenzen auftreten. Eine mehrfache Wiederholung der ganzen Beobachtungsreihe unter Aenderung der Versuchsbedingungen, z. B. mit monochromatischem statt mit weissem, mit reflectirtem statt mit streifend einfallendem Lichte, bestätigte die mitgetheilten Werthe. Uebrigens finden die bei niedrigen Azimuthen auftretenden Differenzen eine einfache Erklärung in niedrigen Temperaturschwankungen; durch dieselben verlieren die Grenzcurven ihre geradlinige Gestalt (cf. Fig. 11) und verwandeln sich in langgestreckte Ellipsen oder Hyperbeln. Auch ist bei kleinen Azimuthen infolge der Verbreiterung des Strahlenbündels und der dadurch bedingten Lichtschwächung der Grad der Genauigkeit überhaupt geringer als bei grösseren Azimuthen. Hierzu tritt noch der Umstand, dass direct von der Lichtquelle kommende, vielleicht zum Theil polarisirte Strahlen, ohne an der Krystallfläche reflectirt zu werden, in das Fernrohr und auf das Nicol gelangen und somit Aenderungen des zu beobachtenden Polarisationsazimuths hervorrufen können.

Mit der zu erreichenden Genauigkeit ist also für den Fall, dass die Grenzcurve die Gestalt zweier Geraden hat, die Coincidenz des Neigungswinkels und Polarisationsazimuthes erwiesen. Um jedoch auch für die anderen Formen der Grenzcurve diese Coincidenz zu prüfen, stellte ich, da dieselbe unter Benutzung der verschiedenen

Spectralfarben nicht darzuthun war, nunmehr Beobachtungen mit anderen Flüssigkeiten an, und zwar mit Schwefelkohlenstoff, Aethylenbromid, Benzol, deren Brechungsexponenten zwischen den Hauptindices des Kalkspathes liegen und somit eine hyperbolische Gestalt der Grenzcurve bewirken. Die Versuche wurden in bekannter Weise mit monochromatischem Lichte ausgeführt, wobei Neigungswinkel und Polarisationsazimuth sowohl gleichzeitig, als auch in getrennten Beobachtungsreihen ermittelt wurden. Es ergaben sich für das Polarisationsazimuth R überall kleinere Werthe, als für den Neigungswinkel S (cf. Tab. 5). Bemerkenswerth ist, dass die für die verschiedenen Flüssigkeiten beobachteten Polarisationsazimuthe, wie eine Vergleichung der Tabellen (4) und (5) ergibt, nur unbedeutend von den für Monobromnaphtalin ermittelten Werthen abweichen.

Tabelle 5.
Neigungswinkel und Polarisationsazimuth für
Kalkspath parallel der Axe.

| Azimuth δ | Schwefelkohlenstoff $N = 1,63190$ | | Aethylenbromid $N = 1,53631$ | | Benzol $N = 1,50024$ | |
|---------------------|--------------------------------------|------|---------------------------------|------|-------------------------|-----|
| | S | R | S | R | S | R |
| 90° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° | 0° |
| 85 | 2,5 | 1,9 | 4,2 | 2,1 | 6,5 | 2,9 |
| 80 | 5,0 | 3,9 | 8,2 | 4,3 | 14,5 | 5,2 |
| 70 | 9,3 | 7,9 | 17,6 | 8,7 | ($\delta = 75$) 27,0° | 6,5 |
| 60 | 14,1 | 11,5 | 35,0 | 12,0 | — | — |
| 50 | 17,2 | 14,9 | — | — | — | — |
| 40 | 24,0 | 18,0 | — | — | — | — |
| 30 | 32,3 | 21,1 | — | — | — | — |

Fragen wir nun nach den möglichen Ursachen dieser bedeutenden Abweichungen von R und S , so können wir dieselben zunächst in Oberflächenveränderungen suchen, welche beim Poliren der Krystallfläche hervorgerufen werden. Eine solche Abhängigkeit des Polarisationsazimuthes von dem benutzten Polirmittel wurde schon von Seebeck¹⁾, Conroy²⁾ und Wernicke³⁾ beobachtet; insbesondere fand Conroy

1) Seebeck, Pogg. Ann. 21. p. 290. 1830; 22. p. 126. 1831.

2) Conroy, Proc. Roy. Soc. 40. p. 173. 1886.

3) Wernicke, Wied. Ann. 30. p. 452. 1887.

das an einer polirten Fläche stattfindende Polarisationsazimuth stets kleiner als an einer natürlichen Spaltfläche. Wenn wir jedoch die Oberflächenveränderungen als alleinige Ursache der beobachteten Differenzen betrachten, so bleibt es immerhin auffallend, dass diese Fehlerquelle für denjenigen Fall wo die Grenzcurven geradlinig sind (Monobromnaphtalin), fast ohne Wirkung bleiben soll. Es schien mir daher andererseits sehr wohl möglich, dass das Polarisationsazimuth in viel empfindlicherer Weise von der Orientirung abhängt, als etwa Neigungswinkel, Grenzwinkel und Brechungsexponent. Wenngleich sich nun die benutzte Platte in Beziehung auf diese letzteren Attribute als ziemlich genau der Axe parallel geschliffen erwiesen hat, so ist möglicherweise die kleine Abweichung $\beta = 90^\circ - \mu$ doch schon ausreichend, um namentlich für kleinere Azimuthe δ die beiden Winkel R und S zu einiger Divergenz zu bringen. In der That lässt sich die strenge Gleichung (15) für sehr kleine β auf die Näherungsformel bringen:

$$\operatorname{tg} S - \operatorname{tg} R = \frac{n_1}{N} \cdot \frac{90 - \mu}{\sin \delta} \cdot \frac{n_2^2 - (n_2^2 - n_1^2) \cos^2 \delta}{n_2^2}.$$

und andererseits scheinen einige unter der Annahme $\beta = 10'$ mit Gleichung (15) versuchsweise ausgeführte Berechnungen der Beobachtungsreihen in Tabelle 5 auch wirklich dieser Deutung zu entsprechen. Um so wünschenswerther war es daher, die Beobachtungen an einer natürlichen Spaltfläche fortzusetzen, da bei dieser die beiden Glieder im Nenner des Ausdrucks für R resp. Θ , zu coordinirtem, selbständigem Einflusse gelangen, und da zudem durch das Polirmittel entstehende Fehlerquellen ausgeschlossen sind.

2) Beobachtungen an einer natürlichen Spaltfläche von Kalkspath. Die Beobachtungen an der natürlichen Spaltfläche wurden in derselben Weise vorgenommen, wie bisher, und zwar unter Anwendung von homogenem Lichte. Grenzwinkel, Neigungswinkel und Polarisationsazimuth wurden in derselben Beobachtungsreihe nebeneinander bestimmt. Die Beobachtungen wurden zunächst unter Anwendung von Monobromnaphtalin ausgeführt, dessen Brechungs-

exponent sich etwas geändert und auf $N_D = 1,65821$ ($t = 15,0^\circ\text{C.}$) gesunken war. Da derselbe den Hauptindex der Spaltfläche ($n' = 1,57364$) übertrifft, so ist die Gestalt der Grenzcurve eine Ellipse. Wie die folgenden Tabellen zeigen, stehen die Beobachtungen sowohl für den Grenz- und Neigungswinkel, als auch für das Polarisationsazimuth in sehr guter Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen. Den Berechnungen ist für den Winkel zwischen Einfallslot und Axe der Werth:

$$\mu = 44^\circ 37' 45''$$

zu Grunde gelegt, als Mittel aus den von mehreren Beobachtern angegebenen Werthen.

Tabelle 6.

Grenz- und Neigungswinkel für Kalkspath
(natürliche Spaltfläche) in Monobromnaphtalin.

| Azimuth δ | Grenzwinkel | | Neigungswinkel | |
|---------------------|-------------------|----------|----------------|----------|
| | ϵ' beob. | Δ | S beob. | Δ |
| 90° | 63° 50' | +1,5 | 0 | $\pm 0'$ |
| 80 | 63 58,5 | -1,5 | 2,2° | -10 |
| 70 | 64 35 | +1,2 | 4,7 | +5 |
| 60 | 65 27 | -0,7 | 6,6 | -2 |
| 50 | 66 38,2 | ± 0 | 8,2 | +16 |
| 40 | 68 1 | +1 | 9,0 | +24 |
| 30 | 69 21 | -2,5 | 8,2 | -5 |
| 20 | 70 39,2 | +1,2 | 6,5 | -5 |
| 10 | 71 28,5 | -1,5 | 3,7 | +2 |
| 0 | 71 49 | ± 0 | 0 | ± 0 |

Tabelle 7.

Polarisationsazimuth.

| Azimuth | R beob. | Δ | Azimuth | R beob. | Δ |
|---------|-----------|----------|---------|-----------|----------|
| 90° | -41,7° | -0,5° | 270° | 41,5° | +0,7° |
| 80 | -44,6 | -0,4 | 260 | 40,1 | ± 0 |
| 70 | -48,0 | -0,5 | 250 | 38,0 | +1,2 |
| 60 | -52,1 | -0,4 | 240 | 38,4 | +0,7 |
| 50 | -56,7 | -0,5 | 230 | 39,8 | -0,2 |
| 40 | -61,2 | -1,2 | 220 | 44,2 | +1,0 |
| 30 | -67,8 | -0,6 | 210 | 51,0 | +1,0 |
| 20 | -75,5 | +0,5 | 200 | 61,4 | +0,2 |
| 10 | -82,0 | -0,2 | 190 | 74,2 | +0,5 |
| 0 | -90,0 | ± 0 | 180 | 90,0 | ± 0 |

Verfolgen wir die Polarisationserscheinungen für den ganzen Verlauf der Grenzcurve, so ergeben sich für das

Polarisationsazimuth R zwei Maxima, wo dasselbe den Wert 90° erreicht, nämlich bei den beiden diametral gegenüberliegenden Azimuthen $\delta = 0^\circ$ oder 360° und $\delta = 180^\circ$. Die beiden Minima fallen jedoch nicht in die Mitte, sondern treten ein etwa bei $\delta = 115^\circ$ und 245° , m. a. W. die die Polarisationsazimuthe darstellende Curve ist symmetrisch zur optischen Axe, jedoch nicht symmetrisch bezüglich der auf ihr senkrecht stehenden Geraden.

Es ist somit auch für eine elliptische Gestalt der Grenzcurve die Richtigkeit der Gleichungen (5) und (5_a) als erwiesen zu betrachten. Um den Grund der oben bei einer Schlißfläche des Kalkspaths beobachteten Abweichungen zu erforschen, wurde das Polarisationsazimuth auch für solche Flüssigkeiten bestimmt, deren Anwendung eine hyperbolische Gestalt der Grenzcurven bedingt. Als solche Flüssigkeiten dienten wieder Aethylenbromid und Benzol, deren Brechungsexponenten zwischen den Extremexponenten der natürlichen Spaltfläche liegen. Da jedoch die für das Polarisationsazimuth ermittelten Werthe selbst bei den verschiedenen, unter gleichen Bedingungen ausgeführten Beobachtungsreihen variierten, so muss auf deren Mittheilung verzichtet werden.

Die sowohl bei der Schlißfläche als auch bei der natürlichen Spaltfläche beobachteten Abweichungen von der Theorie scheinen somit weniger in der durch das Poliren bewirkten Oberflächenänderung als in der Gestalt der Grenzcurven ihren Grund zu haben. Für geschlossene wie für unendlich gestreckte Ellipsen ergaben die Beobachtungen eine vollständige Uebereinstimmung mit der Theorie, während für alle Fälle, wo es sich um Hyperbeln handelte, grössere die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreitende Differenzen constatirt wurden.¹⁾

3) Beobachtungen an einer Gypsplatte parallel der Axenebene. Die Messungen an Gyps beschränken

1) Die Beobachtungen wurden ausgeführt zum Theil mit streifend einfallendem, zum Theil mit reflectirtem Lichte. Obschon die Formeln (5) und (5_a) nur für den Fall der Reflexion abgeleitet sind, so erwiesen doch die angestellten Messungen die vollständige Uebereinstimmung der bei beiden Beleuchtungsarten stattfindenden Polarisationsazimuthe.

sich auf die Bestimmung des Grenzwinkels in Schwefelkohlenstoff, und zwar — die Beobachtungen wurden, wie bemerkt, mit Wolkenlicht ausgeführt — für vier Fraunhofer'sche Linien. Die spectrometrische Untersuchung der Flüssigkeit ergab für den Brechungsexponenten folgende Werthe bei der Temperatur $t = 23,0^\circ \text{C}$:

Tabelle 8.
Brechungsexponenten von Schwefelkohlenstoff.

| Linie | N | Linie | N |
|-------|---------|-------|---------|
| C | 1,61621 | E | 1,63785 |
| D | 1,62516 | F | 1,64962 |

Im ganzen wurden bei der Bestimmung des Grenzwinkels 16 Azimuthe, die auf drei Quadranten vertheilt waren, berücksichtigt. Die graphische Interpolation der Beobachtungen geschah durch eine in besonders grossem Massstabe ausgeführte Zeichnung. Die folgende Tabelle enthält die Grenzwinkel e' zwischen den Azimuthen 0° und 90° . Ihre Berechnung erfolgte wieder nach Formel (2). Da die Differenzen nirgends die Grenze der Beobachtungsfehler erreichen, so ist die Uebereinstimmung als eine vollständige zu betrachten.

Tabelle 9.
Grenzwinkel für Gyps parallel der Axenebene.

| Azimuth δ | C | | | D | | | E | | | F | | |
|---------------------|----------------|----------|--|----------------|----------|--|------------------|----------|--|------------------|----------|--|
| | e' beob. | Δ | | e' beob. | Δ | | e' beob. | Δ | | e' beob. | Δ | |
| 90° | $69^\circ 56'$ | $\pm 0'$ | | $69^\circ 15'$ | $\pm 0'$ | | $68^\circ 27,5'$ | $\pm 0'$ | | $67^\circ 40,5'$ | ± 0 | |
| 80 | 69 58 | -1 | | 69 17 | ± 0 | | 68 29 | ± 0 | | 67 41,5 | -1,5 | |
| 70 | 70 03,2 | +0,2 | | 69 22,5 | +0,5 | | 68 34,5 | +0,7 | | 67 46,5 | -1,0 | |
| 60 | 70 11,7 | +0,5 | | 69 31 | +1,0 | | 68 42,5 | +1,5 | | 67 53,5 | -0,7 | |
| 50 | 70 22,5 | +1,0 | | 69 42 | +2,0 | | 68 52,5 | +2,5 | | 68 3 | ± 0 | |
| 40 | 70 32 | -0,5 | | 69 51,5 | +1,0 | | 69 2 | +2,2 | | 68 12,5 | +0,5 | |
| 30 | 70 41 | -2 | | 70 02,5 | +1,7 | | 69 10,5 | +1,7 | | 68 21 | +0,2 | |
| 20 | 70 49,5 | -2 | | 70 10,5 | +1,5 | | 69 17 | +0,7 | | 68 29 | +1,2 | |
| 10 | 70 56 | -1 | | 70 16,5 | +2 | | 69 21 | -0,2 | | 68 33,5 | +1,0 | |
| 0 | 70 59 | ± 0 | | 70 16,5 | ± 0 | | 69 23 | ± 0 | | 68 34 | ± 0 | |

Was die Polarisationserscheinungen der beiden Grenzen angeht, so verliefen dieselben, wie zu erwarten war, ganz regelmässig. Bei der Verticalstellung der kurzen Diagonale des vorgehaltenen Nicols blieb die dem Oval entsprechende

Grenze in allen Lagen sichtbar. In der Richtung der optischen Axen behielten beide in eine einzige Linie zusammenfallenden Grenzcurven ihre entgegengesetzte Polarisation bei, indem beim Drehen des Nicols die Grenze niemals verschwand. Bei geringer Aenderung des Azimuthes traten wieder beide Grenzcurven getrennt und mit senkrecht aufeinander stehender Polarisationsrichtung auf.

Die nachträglich ausgeführte Untersuchung der Gypsplatte mit dem Pulfrich'schen Totalreflectometer konnte die obigen Messungen und die geschilderten Polarisationserscheinungen nur bestätigen.

Ich komme zum Schlusse der Arbeit auf diese Dinge deshalb zurück, da einige von Dr. Steeg und Reuter bezogene Topas-, Baryt- und Arragonitplatten, die nicht vollständig der Axenebene parallel ausgefallen waren, ganz eigenthümliche Erscheinungen zeigten, die wohl einiges Licht auf die auffälligen Zeichnungen und Resultate werfen, welche W. Kohlrausch¹⁾ für eine parallel zur Axenebene geschliffene Weinsäureplatte mitgetheilt hat.

Statt des Durchschneidens der beiden Grenzcurven, wie es beim Gyps wirklich der Fall war, zeigten die erwähnten Krystallplatten den W. Kohlrausch'schen Zeichnungen ganz ähnliche Erscheinungen. Es beweist dies, dass auch die von ihm benutzte Weinsäureplatte der optischen Axenebene nicht vollständig parallel war. Die Erscheinungen sind in Fig. 13—15 wiedergegeben. Fig. 13 zeigt die abgewinkelte Mantelfläche des Cylinders des Pulfrich'schen Apparates, und zwar für Arragonit; Fig. 14 den entsprechenden Schnitt durch die sogenannte Strahlen- oder Indexfläche, wie die einfache Betrachtung eines Holzmodelles derselben erkennen lässt. Fig. 15 endlich ist ein in der Richtung der optischen Axe aus diesen Curven herausgegriffenes Stück, so wie es im Kohlrausch'schen Totalreflectometer zur Anschauung kommt, und stimmt genau mit den Kohlrausch'schen Zeichnungen überein. Den genähert kreisförmigen Theilen in Fig. 14 entsprechen in Fig. 13 die horizontalen

1) W. Kohlrausch, Wied. Ann. 6. 36; 7. 427. 1879.
Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

Geraden, in Fig. 15 die verticalen Curvenstücke. Es beziehen sich diese Zeichnungen natürlich nur auf homogenes Licht. Bei weissem Lichte sieht man im Totalreflectometer, wie die Curve β constant bleibt, bis die veränderliche α nahe gekommen, dann aber plötzlich selbst sich zu bewegen beginnt, während die eben angekommene in ihrer Bewegung innehält. Beide Curven scheinen ihre Bewegung ausgetauscht zu haben. Von einem Durchschneiden der beiden Curven ist also nichts zu sehen.

Ebenso einfache Resultate ergaben die Polarisationserscheinungen der beiden Curven. Hatte man in der Extremlage α dem Nicol die Stellung gegeben, dass nur diese Curve sichtbar war, so wurde, wenn man durch Drehen des Cylinders an die Gegend der grössten Annäherung heranrückte, β sichtbar, um dann sogleich, wenn die Lage γ erreicht war, wieder zu verschwinden. Beim Drehen des Nicols verschwanden die in der Gegend der grössten Annäherung nahe zusammenliegenden Curven nie vollständig. Die theilweise Polarisation, welche dort herrscht, erklärt sich aber leicht, wenn man bedenkt, dass bei einer immer grösser werdenden Abweichung der Fläche von der optischen Axenebene diejenigen Polarisationserscheinungen immer charakteristischer hervortreten, welche für den zweiten Hauptschnitt, für welchen das Viereck Fig. 14 sich zu einem vollständigen Kreise erweitert, gültig sind.

Von einer Fortsetzung der Curven über das ihnen in Fig. 15 angewiesene Gebiet hinaus wurde bei den untersuchten Krystallplatten nichts bemerkt, und wage ich nicht zu entscheiden, worin die abweichenden Resultate bei der Weinsäureplatte ihre Erklärung finden.

Fl
leit
suc
für
Fl
ist
the
Ar
tra

tige
der
Mit
die
met
Lic
Ebe
mar
sch
düf
wer
der
wer
The

Bou
Inte
folge

1729
publ.
lorun
3

**IX. Ueber diffuse Reflexion;
von J. B. Messerschmitt aus Bamberg.**

(Hierzu Taf. VII.)

Während die Gesetze der Reflexion an ebenen glatten Flächen sich aus relativ einfachen Annahmen theoretisch ableiten lassen und die erhaltenen Formeln durch zahlreiche Versuche mit grosser Annäherung bestätigt worden sind, so liegt für die diffuse Reflexion sowohl an glatten als auch an rauhen Flächen nur ein relativ kleines Beobachtungsmaterial vor, und ist es bis jetzt noch nicht gelungen, die Gesetze derselben von theoretischen Gesichtspunkten aus zu bewältigen. Nachfolgende Arbeit, mehr experimenteller Natur, möge einen kleinen Beitrag zu diesem Gegenstande liefern.

An eine kurze historische Einleitung über den gegenwärtigen Stand der vorliegenden Frage soll sich die Beschreibung der zu den Versuchen benutzten Apparate reihen, hierauf die Mittheilung der Versuche selbst folgen. Es sind dies einmal die in Potsdam angestellten Messungen mit dem Spectralphotometer zur Bestimmung der Grösse der Intensität des reflectirten Lichtes, wenn einfallender und reflectirter Strahl in derselben Ebene liegen. Auf Veranlassung des Hrn. Prof. E. Wiedemann habe ich dann noch einige orientirende Versuche verschiedener Art angeschlossen, um zu zeigen, inwieweit bei dem diffus reflectirten Lichte andere Fragen als bisher berücksichtigt werden müssen. Dann folgen einige Messungen der Helligkeit der Phasen von Kugel und Cylinder; zum Schlusse soll gezeigt werden, dass die Beobachtungen durch die bisher aufgestellten Theorien nicht dargestellt werden können.

Einleitung. — Anknüpfend an die Untersuchungen von Bouguer¹⁾ und Lambert²⁾ lässt sich das Gesetz über die Intensität Q der Beleuchtung eines Körpers nach Beer³⁾ folgendermassen formuliren:

1) Bouguer, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729, u. Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouv. posth. publ. de M. l'Abbé de la Caille. Paris 1760.

2) Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augsburg 1760.

3) Beer, Grundriss des photometrischen Calculs. Braunschweig 1854.

$$Q = J \cdot \mu \cdot \frac{\cos i \cdot \cos \varepsilon}{r^2} \cdot dp \cdot dq,$$

worin J die Helligkeit des ausstrahlenden Lichtes, dp , dq die Flächenelemente des Licht aussendenden, bez. Licht empfangenden Körpers, r der Abstand beider Elemente, i und ε Incidenz, bez. Emanationswinkel und μ die Albedo, einen von der Natur des Elementes und der Farbe des Lichtes abhängigen Coëfficienten, bedeutet.

Die Versuche Lambert's genügten nicht, um über die Richtigkeit dieses Gesetzes zu entscheiden, und die Beobachtungen Bouguer's bestätigten dasselbe durchaus nicht, worauf Zöllner¹⁾ in seinen photometrischen Untersuchungen zuerst aufmerksam machte. Erst in neuerer Zeit hat W. Möller²⁾ für direct emittirtes Licht das Emanationsgesetz an glühenden Körpern geprüft und als richtig befunden, dagegen ist dasselbe nach den Versuchen Ångström's und Godard's³⁾ für die strahlende Wärme auch nur annähernd richtig. Einige Messungen von Kanonowitsch⁴⁾ an Papier lieferten ebenfalls sehr grosse Abweichungen.

Hr. Seeliger⁵⁾ liess in dieser Richtung neuerdings Versuche anstellen, welche wie die Bouguer'schen Beobachtungen das Gesetz nicht bestätigten. Hr. Lommel⁶⁾ versuchte, theo-

— Auf dieses Werk möge wegen der Einzelheiten verwiesen sein. Es soll nur noch bemerkt werden, dass bei Lambert unter i und ε (Incidenz- und Emanationswinkel) stets das Complement des von uns so bezeichneten Winkels verstanden wird, und er daher statt des Cosinus den Sinus hat.

1) F. Zöllner, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865. p. 18.

2) W. Möller, Wied. Ann. 24. p. 266. 1884. — Eine Wiederholung dieser Versuche und einiger ähnlicher Art wären von grossem Interesse, um zu sehen, ob sie das Lambert'sche Emanationsgesetz wirklich allgemein bestätigen.

3) K. Ångström, Wied. Ann. 26. p. 258. 1885. L. Godard, Ann. de chim. et de phys. (6) 10. p. 354. 1887. K. Ångström, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. 13. Afd. I. No. 4.

4) Kanonowitsch, Schrift. d. math. Abth. d. neuruss. naturf. Ges. 2. 1879 u. Fortschr. d. Phys. 35. p. 430. 1879.

5) H. Seeliger, Vierteljahrsschrift d. astron. Gesellsch. 20. p. 111 u. 267. 1885; 21. p. 216. 1886.

6) E. Lommel, Sitzber. d. math.-phys. Cl. d. Acad. München. 1887. p. 95.

retisch diesen Fragen nahe zu treten. Auf die Arbeiten dieser Herren werde ich später bei der Besprechung meiner Beobachtungen noch zurückkommen.

Beschreibung des Apparates. — Der zu den Messungen benutzte Apparat setzte sich aus folgenden Theilen zusammen: 1. aus den Lichtquellen, von denen die eine L (Fig. 1) das reflectirte Licht lieferte, während die andere l als Vergleichslampe diente; 2. aus den zu beobachtenden Flächen mit den nöthigen Vorrichtungen, um dieselben gegen die Lichtquelle unter verschiedenen Winkeln zu neigen und diese wieder zu messen; Fig. di nebst Kreis kk ; 3. aus dem Photometer abc .

1) Als Lichtquelle zur Beleuchtung der reflectirenden Substanzen diente eine Lampe mit Patent-Rundbrenner und einem grossen breiten Reservoir, um Schwankungen der Helligkeit infolge des Sinkens des Petroleums möglichst zu vermeiden. Auf die Lampe wurde ein schwarzer Blechcylinder gesetzt, der an der einen Seite in Flammenhöhe einen runden, ca. 20 mm weiten Ausschnitt hatte.

Zur Herstellung möglichst parallelen Lichtes wurde eine Linse von 78,5 mm Durchmesser und 200 mm Brennweite zwischen Lampe und Substanz eingeschoben. Die Divergenz des Lichtes betrug noch ca. 3—4°. Einige Versuche zur Bestimmung eines etwa vorhandenen Einflusses der Divergenz auf die Resultate durch Verschiebung der Lampe, bez. Linse in der Richtung des Radius zeigten, dass dieselbe ohne Einfluss war.

Die Lichtquelle (L) mit der Linse (g) waren auf einem kleinen Brette mit Index angebracht, sodass sie sich auf der Peripherie des Metallkreises (kk) von 0,5 m Radius drehen liessen; dadurch konnte das Licht unter allen möglichen Winkeln auf die Substanzen fallen. Eine nicht genaue Uebereinstimmung des Index der Beleuchtungslampe mit der Richtung des ausgesandten Lichtes vermischt sich so sehr mit der Nicht-Parallelität desselben, dass es nicht nachweisbar ist. Der Fehler konnte aber einen Grad nicht erreichen. Die Lampe wurde immer so aufgestellt, dass die Mitte der Flamme von der Mitte des Kreises 508 mm und die vordere Seite des Blechcylinders (des Ausschnittes) von ebenda 477 mm entfernt war. Die Linse stand bei den Beobachtungen von Porzellan-Biscuit und polirtem

Marmor 257 mm, bei allen übrigen 273 mm vom Mittelpunkt des Kreises ab, wodurch die Parallelität indess nicht geändert wurde.

Als Vergleichslichtquelle diente eine kleine zum Photometer gehörige Lampe mit Blechcylinder, die in ca. 60 cm Entfernung vom Vergleichsprisma fest aufgestellt war.

2) Die Substanzen wurden in der Mitte des schon oben angegebenen Kreises auf ein Tischchen gestellt, welches auf einem Zapfen drehbar war, und dessen Drehungen mittelst zweier einander gegenüberliegender Indices am Kreise abgelesen werden konnten. In der Mitte des Tischchens war eine Marke angebracht, und zwar so, dass, wenn man den unteren Rand der Vorderfläche der zu beobachtenden Substanzen mit derselben coincidiren liess und den Index des Tischchens auf Null stellte, die Senkrechte zur reflectirenden Oberfläche auf 0° zeigte. Durch die Drehung dieses Tischchens und der Beleuchtungslampe liessen sich alle möglichen Einfalls- und Austrittswinkel herstellen für den Fall, dass hierbei der einfallende und austretende Strahl immer in einer Ebene lagen. — Eine etwaige Neigung, d. h. nicht genaues Senkrechtstehen der vorderen Fläche der Substanz wurde durch Lothung möglichst zu vermeiden gesucht, die etwa übrig bleibenden Abweichungen sind so klein, dass dadurch kein merklicher Fehler zu befürchten ist.

3) Als Photometer benutzte ich zu den Untersuchungen ein dem astrophysikalischen Observatorium in Potsdam gehöriges Glan'sches Spectralphotometer in der Form, die ihm Hr. H. C. Vogel¹⁾ zur Anwendung in der Astrophysik gegeben, das ich schon früher verwendet habe.²⁾ Zu meinen Versuchen liess ich dasselbe auf einem festen Holzstativ anbringen und trennte die Beleuchtungslampe ganz vom Photometer.

Beim Beobachten ist es von Vortheil, wenn die beiden zu vergleichenden Spectralzonen einander möglichst nahe berühren. Deshalb habe ich die von Gouy³⁾ angegebene Abänderung der Construction angebracht, bei welcher man das den Collimatorspalt halbirende Plättchen durch einen mittelst einer Schraube

1) H. C. Vogel, Berl. Monatsber. März 1877. p. 104.

2) J. B. Messerschmitt, Wied. Ann. 25. p. 655. 1885.

3) Gouy, Ann. de chim. et de phys. (5) 18. p. 5. 1879.

verschiebbaren Keil ersetzt. Eine geringe Verschiebung dieses Plättchens gestattet, die Farben zur Berührung zu bringen.

Auf das Collimatorrohr, vor dem Spalte, wurde eine Blechkappe gesetzt, welche wieder durch einen Spalt vorn über der einen Hälfte des Spaltes, die das reflectirte Licht von der Substanz empfang, dasselbe durchliess. Dieser Spalt war 1 mm breit und 372 mm vom Mittelpunkte des Kreises entfernt. Vor der anderen Spalthälfte war ein totalreflectirendes Prisma angebracht, das von der Seite her, von der zum Spectralphotometer gehörigen Vergleichslampe aus einer Entfernung von ca. 60 cm das Licht erhielt.

Dieses Licht war im Vergleich zum reflectirten noch sehr hell, was die Messungen sehr erschwerte. Die Grösse der Abschwächung des Lichtes bei der diffusen Reflexion mögen folgende Beobachtungen zeigen. Setzte man die Beleuchtungslampe in 0,9 m Entfernung vom Spalte und die Vergleichslampe 0,6 m vom Spalte, und ist die Helligkeit der ersteren gleich 10 000, so ist die Menge des von Biscuit reflectirten Lichtes für einen gewissen Incidenzwinkel i und Emanationswinkel ϵ wie folgt:

| im Roth, $\lambda = 598$ | | | im Grün, $\lambda = 552$ | | |
|--------------------------|------------|------------------|--------------------------|------------|------------------|
| i | ϵ | beob. Helligkeit | i | ϵ | beob. Helligkeit |
| 10 | 20 | 12 | 30 | 60 | 11 |
| 20 | 10 | 11 | 45 | 45 | 9 |
| 30 | 30 | 14 | 60 | 30 | 6 |
| im Blau, $\lambda = 485$ | | | beob. Helligkeit | | |
| i | ϵ | | | | |
| 30 | | 60 | | 10 | |
| 45 | | 45 | | 11 | |
| 60 | | 30 | | 7 | |

Bei anderen Substanzen erhält man ähnliche Werthe.¹⁾

Die Schwächung des Lichtes ist also eine ganz enorme, und daher war das Spectrum des reflectirten Lichtes äusserst schwach gegenüber dem der Vergleichslampe. Um die Unterschiede in der Lichtstärke beider zu vergleichender Spectra zu vermindern, habe ich das Licht der Vergleichslampe durch ein Rauchglas (sog. London smoke glass) abgeschwächt, damit die

1) Siehe auch: A. H. Lee, On a standard for estimating the amount of light reflected by various substances. Proc. of the Amer. acad. of arts and sciences. New. Ser. 7. p. 223. 1880.

Ablesungen am Nicol keine zu kleinen wurden. Dieses Glas schwächte das Licht im Roth ($\lambda = 598$) um 0,082; im Grün ($\lambda = 552$) um 0,116; im Blau ($\lambda = 485$) um 0,083. Ausserdem wurde der Spalt bei den Messungen so weit geöffnet (0,4 mm ca.), dass im Sonnenspectrum die stärksten Linien eben verschwanden. Dass dadurch keine merklichen Fehler entstehen, zeigen die Messungen K. Vierordt's¹⁾ und die Untersuchungen von W. Dietrich.²⁾

Die den Strahlen verschiedener Wellenlängen entsprechenden Lagen des Beobachtungsfernrohrs wurden durch graphische Interpolation aus Ablesungen an dem Theilkreise des Photometers abgeleitet. Die Dispersion des Prismas war so, dass bei Einstellung der *D*-Linie auf $50^{\circ} 35'$ des Kreises sich folgende weiteren Einstellungen ergaben:

| | | | | | | |
|---------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Theilkreis: | $50^{\circ} 0'$ | $50^{\circ} 30'$ | $51^{\circ} 0'$ | $52^{\circ} 0'$ | $53^{\circ} 0'$ | $54^{\circ} 0'$ |
| Wellenlängen: | 666 | 598 | 552 | 485 | 439 | 406. |

Der ganze Apparat war so auf einem Tische aufgestellt, dass das Collimatorrohr des Photometers in der Richtung des Radius des Kreises gegen den Mittelpunkt bei 0° hinsah, und der Spalt vertical stand. Letzterer befand sich hierbei in einer Entfernung von 396 mm von der Mitte des Kreises. Bei dieser Aufstellung wurde der Collimator, da keine eigene Vorrichtung zur Controlirung der Parallelität vorhanden war, mittelst Lothung möglichst in die Richtung des Radius gestellt und die Horizontalität durch eine auf das Collimatorrohr gesetzte Wasserwaage geprüft. Diese Prüfung wurde von Zeit zu Zeit wiederholt. Da das Collimatorrohr 30 cm lang war, dürfte ein durch die Aufstellung entstandener Fehler 1° nicht erreichen. Ein etwaiger Einfluss ungenauer Aufstellung wurde noch durch die Anordnung der Beobachtungen zu eliminiren gesucht, indem auf beiden Seiten der Normalen zur Substanz beobachtet wurde.

Zwei noch nicht besprochene, vom Photometer abhängige Fehlerquellen mögen hier noch Platz finden:

1) K. Vierordt, Die Anwendung des Spectralapparates zur Photometrie der Absorptionsspectren. Tübingen 1873. — Die Anwendung des Spectralapparates zur quantitativen Analyse. Tübingen 1876.

2) W. Dietrich, Die Anwendung des Vierordt'schen Doppelspaltes in der Spectralanalyse. Stuttgart 1881.

1) Durch die nicht ganz richtige Aufstellung der Lichtquelle kann ein Fehler eintreten, der durch eine unveränderliche Aufstellung derselben zu heben gesucht wurde. Ausserdem wurden nur Differenzbeobachtungen angestellt, sodass die etwa hierdurch entstehenden Fehler von selbst herausfielen.

2) Um über den Einfluss der Verschiebung der Farben beim Drehen des Nicols, das sog. Schleudern, einen Anhaltspunkt zu geben, mögen nachstehende Zahlen dienen.¹⁾ Wenn man die *D*-Linie im I. Quadranten des Nicols bei 0° Ablesung auf 50° 30' des Horizontalkreises des Photometers stellte, so ergaben sich:

Ablesungen am Horizontalkreis.

| Quadrant | I | II | III | IV |
|----------|---------|-------------------|---------|-----|
| Nicol 0° | 50° 30' | 50° 25' = 50° 25' | 50° 30' | |
| 30 | 30 | 25 | 23 | 29 |
| 60 | 30 | 27 | 24 | 27 |
| 90 | 30 = | 30 | 25 = | 25. |

Der Unterschied der Ablesungen von 7' entspricht im Roth bei *B* einer Grösse von 20 $\mu\mu$, bei *D* von 12, bei *F* von 7 und bei *G* von 3 $\mu\mu$. Da aber immer nur in zwei Quadranten beobachtet wurde, und zwar bei Porzellan im I. und IV., bei den anderen Substanzen im I. und II., und die Ablesungen am Nicol nur ausnahmsweise über 40° auseinander lagen, so ist der Einfluss des durch das Schleudern entstehenden Fehlers entsprechend kleiner. Derselbe kommt um so weniger in Betracht, als die Intensitätsbeobachtungen für aneinander liegende Farben nahezu dieselben Werthe ergaben.

Messmethode. — Nachdem der Apparat in der oben angegebenen Weise aufgestellt war, wurden bei jedem Einfallswinkel i und Emanationswinkel ε , welche man durch die Stellung von Lampe und untersuchter Substanz erhielt, durch photometrische Messungen auf gleiche Helligkeit des betreffenden Bildes je sechs Einstellungen gemacht, und zwar bei jeder Stellung mindestens zweimal für dieselbe Farbe beobachtet, woraus dann das Mittel genommen wurde. Die Unsicherheit von sechs solchen Ein-

1) E. Ketteler, Theoretische Optik. Braunschweig 1885. p. 600, gibt ähnliche Werthe für sein Spectralphotometer.

stellungen bestimmte ich im Mittel aus mehreren hundert Reihen zu 5 Proc. Lässt man aber die Beobachtungen, die wegen ihrer grossen Lichtschwäche sehr unsicher sind, also die Beobachtungen, für welche $i = 85^\circ$ ist, fort, so ist die Unsicherheit nur noch 4 Proc. Lässt man auch noch die Beobachtungen fort, bei denen $\epsilon = 85^\circ$ ist, so geht die Unsicherheit auf 3,6 Proc. zurück. Es ist dies ein Zeichen, dass die Schwäche des Lichtes von ziemlich starkem Einfluss auf die Sicherheit der Beobachtungen ist. Zugleich zeigen aber diese Zahlen, dass die Beobachtungen für den vorliegenden Zweck hinreichend genau sind. Um eine grössere Genauigkeit zu erzielen, müsste man stärkere Lichtquellen benutzen, wobei aber andere Schwierigkeiten auftreten. — Einen weiteren Beweis für die Güte der Beobachtungen werde ich weiter unten (p. 886) geben.

Ich habe nicht die Helligkeit des reflectirten Lichtes mit dem directen der Beleuchtungslampe verglichen, da man nie sicher ist, ob man dieselbe Stelle der Flamme im directen Lichte sieht, sondern eine gewisse Stellung der reflectirenden Platte (nämlich bei 10° Incidenz- und 10° Emanationswinkel) als Vergleichslage gewählt, mit welcher dann alle übrigen verglichen wurden.

Der Apparat war in einem vollkommen zu verfinsternden und dunkel angestrichenen Zimmer des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam aufgestellt. Bei den Beobachtungen wurde alles fremde Licht möglichst ausgeschlossen. Die Einstellungen selbst wurden ganz im Dunkeln gemacht, indem ich das Photometer und den Kopf mit einem Tuche bedeckte, damit das Auge möglichst empfindlich bliebe.

Vor jeder Beobachtungsreihe wurden die Lampen gereinigt, gefüllt (mit gereinigtem Petroleum, sog. Luxoröl) und nach dem Anzünden vor Beginn der Beobachtungen einige Zeit brennen gelassen. Da die Lampen nur beschränkte Zeit constant brannten, so habe ich von Zeit zu Zeit auf die Vergleichslage von neuem eingestellt. Der Beleuchtungslampe wurde für jede Reihe eine feste Stellung gegeben, dann die Substanz von 10 zu 10° gedreht, indem ich bei jeder Stellung je sechs Einstellungen machte. Hierbei war also die Ebene des eintretenden und austretenden Lichtstrahles stets dieselbe, und zwar stand sie

senkrecht zur Substanz. Da ich die Substanz vom Emanationswinkel 0° nach beiden Seiten drehte, bekam ich einen Ueber- schuss von Beobachtungen in der Art, dass bei einer gewissen Incidenz, z. B. 30° , die Emanation sowohl auf der einen Seite der Normalen zur Substanz $+10^\circ$ als auch auf der anderen -10° Beobachtungen stattfanden. Eine Zeichnung (Fig. 2) möge dies deutlicher machen. Stellt AB die reflectirende Fläche und CD die Normale zu ihr dar, und fällt das Licht von rechts ein (z. B. FC), so bezeichne ich die austretenden Strahlen rechts von CD , welche also auf derselben Seite der Normalen wie der einfallende Strahl liegen (z. B. CH) mit $-\varepsilon$, die auf der linken Seite zur Normalen (z. B. CG) mit $+\varepsilon$.

Um einen etwaigen Unterschied der diffusen Reflexion für Licht von verschiedener Wellenlänge zu constatiren, untersuchte ich Porzellan an drei Stellen des Spectrums, im Roth ($\lambda = 598$), Grün ($\lambda = 552$) und Blau ($\lambda = 485 \mu\mu$). Das Beobachten im Blau war etwas schwieriger als für die beiden anderen Farben und strengte die Augen mehr an. Bei den übrigen Substanzen beobachtete ich nur im Grün $\lambda = 552 \mu\mu$.

Beobachtungen. — Untersucht wurden Platten aus:

1) Biscuit (Porzellan), 2) carrarischem Marmor, 3) Sandstein. 4) Flächen hergestellt aus Gyps und 5) aus Schrotkörnern.

1. Biscuit. — Die untersuchte Fläche war 7 cm breit und 14 cm lang. Sie hatte ein sehr feines Korn und besass ein mattes gleichmässiges Aussehen. Sie ist ein sehr guter Repräsentant zerstreut reflectirender Flächen.

Ich lasse jetzt die Mittelwerthe aus den Beobachtungen für die einzelnen Farben folgen. Die erste Columnne enthält den Incidenzwinkel i , die zweite den Emanationswinkel ε mit seinem Vorzeichen, die dritte, vierte und fünfte die Mittelwerthe für Roth (m_r), Grün (m_g) und Blau (m_b). In der sechsten Columnne steht das Mittel aus den letzten drei Zahlen; die folgenden drei Columnnen enthalten die Abweichungen im Sinne Beobachtung minus Mittelwerth für bez. Roth, Grün und Blau.

| i | ε | m_r | m_g | m_b | M | $m - M$ | | |
|-----|---------------|-------|-------|-------|------|---------|-------|-------|
| 0 | + 20 | 1017 | 972 | 1082 | 1024 | - 7 | - 52 | + 58 |
| | + 30 | 1013 | 979 | 1028 | 1007 | + 6 | - 28 | + 21 |
| | + 40 | 1058 | 1019 | 947 | 1008 | + 50 | + 11 | - 61 |
| | + 50 | 1005 | 1069 | 1055 | 1043 | - 32 | + 26 | + 12 |
| | + 60 | 968 | 987 | 1018 | 984 | - 18 | - 17 | + 34 |
| | + 70 | 880 | 826 | 887 | 864 | + 16 | - 39 | + 28 |
| | + 80 | 487 | 466 | 449 | 467 | + 20 | - 1 | - 18 |
| 5 | - 85 | 210 | 186 | 164 | 187 | + 23 | - 1 | - 23 |
| | + 85 | 198 | 209 | 127 | 178 | + 20 | + 31 | - 51 |
| 10 | + 10 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 0 | 0 | 0 |
| | + 20 | 987 | 1012 | 1091 | 1030 | - 43 | - 18 | + 61 |
| | - 30 | 943 | 965 | 987 | 965 | - 23 | 0 | + 22 |
| | + 30 | 1043 | 1024 | 965 | 1011 | + 32 | + 13 | - 46 |
| | - 40 | 983 | 961 | 1007 | 984 | 0 | - 24 | + 23 |
| | + 40 | 1036 | 831 | 1041 | 969 | + 67 | - 139 | + 72 |
| | - 50 | 994 | 997 | 987 | 993 | + 1 | + 4 | - 6 |
| | + 50 | 1000 | 993 | 1031 | 1008 | - 8 | - 11 | + 23 |
| | - 60 | 1027 | 977 | 996 | 1000 | + 27 | - 23 | - 4 |
| | + 60 | 950 | 1002 | 963 | 972 | - 22 | + 30 | - 8 |
| | - 70 | 876 | 821 | 848 | 848 | + 28 | - 27 | 0 |
| | + 70 | 859 | 833 | 816 | 836 | + 23 | - 3 | - 20 |
| | - 80 | 517 | 451 | 459 | 476 | + 41 | - 25 | - 16 |
| | + 80 | 434 | 469 | 449 | 451 | - 17 | + 19 | - 2 |
| 15 | + 15 | 982 | 1002 | 1005 | 996 | - 14 | + 6 | + 9 |
| | - 85 | 203 | 231 | 203 | 212 | - 9 | + 19 | - 11 |
| | + 85 | 168 | 195 | 342 | 235 | - 67 | - 40 | + 108 |
| 20 | 0 | 942 | 985 | 947 | 958 | - 16 | + 27 | - 11 |
| | + 10 | 951 | 924 | 1014 | 963 | - 11 | - 39 | + 51 |
| | + 20 | 1028 | 1014 | 956 | 999 | + 29 | + 15 | - 43 |
| | + 30 | 997 | 968 | 919 | 961 | + 36 | + 7 | - 42 |
| | - 40 | 903 | 926 | 899 | 909 | - 6 | + 17 | - 10 |
| | + 40 | 985 | 943 | 927 | 952 | + 33 | - 9 | - 25 |
| | - 50 | 924 | 925 | 943 | 931 | - 7 | - 6 | + 12 |
| | + 50 | 911 | 984 | 935 | 943 | - 32 | + 41 | - 8 |
| | - 60 | 970 | 897 | 940 | 936 | + 34 | - 39 | + 4 |
| | + 60 | 898 | 920 | 932 | 917 | - 19 | + 3 | + 15 |
| | - 70 | 863 | 885 | 794 | 847 | + 16 | + 38 | - 53 |
| | + 70 | 715 | 744 | 694 | 718 | - 3 | + 26 | - 24 |
| | - 80 | 510 | 477 | 474 | 487 | + 23 | - 10 | - 13 |
| | + 80 | 444 | 469 | 460 | 458 | - 14 | + 11 | + 2 |
| 25 | + 25 | 956 | 1048 | 924 | 976 | - 20 | + 72 | - 52 |
| | - 85 | 208 | 229 | 208 | 215 | - 7 | + 14 | - 7 |
| | + 85 | 208 | 185 | 164 | 186 | + 22 | - 1 | - 22 |
| 30 | 0 | 852 | 882 | 921 | 885 | - 33 | - 3 | + 36 |
| | - 10 | 864 | 862 | 876 | 867 | - 3 | - 5 | + 9 |
| | + 10 | 952 | 869 | 925 | 915 | + 37 | - 46 | + 10 |
| | + 20 | 945 | 923 | 928 | 932 | + 13 | - 9 | - 4 |
| | + 30 | 879 | 899 | 900 | 893 | - 14 | + 6 | + 7 |
| | + 40 | 870 | 885 | 865 | 873 | - 3 | + 12 | - 8 |
| | - 50 | 900 | 861 | 811 | 857 | + 43 | + 4 | - 46 |
| | + 50 | 840 | 911 | 844 | 865 | - 25 | + 46 | - 21 |
| | - 60 | 776 | 842 | 852 | 823 | - 47 | + 19 | + 29 |

| i | E | m_r | m_g | m_b | M | $m - M$ | | |
|-----|------|-------|-------|-------|-----|---------|------|------|
| 30 | + 60 | 855 | 798 | 852 | 835 | + 20 | - 37 | + 17 |
| | - 70 | 928 | 747 | 703 | 793 | +135 | - 46 | - 90 |
| | + 70 | 789 | 786 | 852 | 809 | - 20 | - 23 | + 43 |
| | - 80 | 478 | 526 | 430 | 478 | 0 | + 48 | - 48 |
| | + 80 | 466 | 464 | 460 | 463 | + 3 | + 1 | - 3 |
| 35 | + 35 | 821 | 878 | 847 | 849 | - 28 | + 29 | - 2 |
| | - 85 | 219 | 210 | 176 | 202 | + 17 | + 8 | - 26 |
| | + 85 | 178 | 201 | 142 | 174 | + 4 | + 27 | - 32 |
| 40 | 0 | 885 | 776 | 870 | 844 | + 41 | - 68 | + 26 |
| | - 10 | 751 | 709 | 810 | 757 | - 6 | - 48 | + 53 |
| | + 10 | 825 | 830 | 873 | 843 | - 18 | - 13 | + 30 |
| | - 20 | 751 | 770 | 755 | 759 | - 8 | + 11 | - 4 |
| | + 20 | 778 | 796 | 768 | 781 | - 3 | + 15 | - 13 |
| | + 30 | 800 | 817 | 808 | 808 | - 8 | + 9 | 0 |
| | + 40 | 769 | 779 | 725 | 758 | + 11 | + 21 | - 33 |
| | + 50 | 835 | 823 | 783 | 814 | + 21 | + 9 | - 31 |
| | - 60 | 783 | 688 | 724 | 732 | + 51 | - 44 | - 8 |
| | + 60 | 531 | 773 | 750 | 685 | -154 | + 88 | + 65 |
| | - 70 | 673 | 648 | 644 | 655 | + 18 | - 7 | - 11 |
| | + 70 | 452 | 763 | 771 | 662 | -210 | +101 | +109 |
| | - 80 | 449 | 436 | 425 | 437 | + 12 | - 1 | - 12 |
| | + 80 | 462 | 453 | 508 | 474 | - 12 | - 21 | + 34 |
| 45 | + 45 | 741 | 750 | 704 | 732 | + 9 | + 18 | - 28 |
| | - 85 | 216 | 205 | 193 | 205 | + 11 | 0 | - 12 |
| | + 85 | 209 | 186 | 182 | 192 | + 17 | - 6 | - 10 |
| 50 | 0 | 726 | 699 | 730 | 718 | + 8 | - 19 | + 12 |
| | - 10 | 673 | 676 | 701 | 683 | - 10 | - 7 | + 18 |
| | + 10 | 668 | 603 | 706 | 659 | + 9 | - 56 | + 47 |
| | - 20 | 630 | 636 | 694 | 653 | - 23 | - 17 | + 41 |
| | + 20 | 606 | 646 | 680 | 644 | - 38 | + 2 | + 36 |
| | - 30 | 640 | 656 | 663 | 653 | - 13 | + 3 | + 10 |
| | + 30 | 650 | 680 | 630 | 653 | - 3 | + 27 | - 23 |
| | + 40 | 708 | 720 | 637 | 688 | + 20 | + 32 | - 51 |
| | + 50 | 695 | 658 | 676 | 676 | + 19 | - 18 | 0 |
| | + 60 | 771 | 758 | 720 | 750 | + 21 | + 8 | - 30 |
| | - 70 | 637 | 560 | 537 | 578 | + 59 | - 18 | - 41 |
| | + 70 | 728 | 682 | 865 | 758 | - 30 | - 76 | +107 |
| | - 80 | 354 | 391 | 412 | 386 | - 32 | + 5 | + 26 |
| | + 80 | 523 | 410 | 452 | 462 | + 61 | - 51 | - 10 |
| 55 | + 55 | 690 | 666 | 716 | 691 | - 1 | - 25 | + 25 |
| | - 85 | 208 | 191 | 226 | 208 | 0 | - 17 | + 18 |
| | + 85 | 208 | 205 | 200 | 203 | + 5 | - 2 | - 3 |
| 60 | 0 | 514 | 486 | 685 | 562 | - 48 | - 76 | +123 |
| | - 10 | 531 | 506 | 571 | 536 | - 5 | - 30 | + 35 |
| | + 10 | 479 | 493 | 596 | 523 | - 44 | - 30 | + 73 |
| | - 20 | 571 | 485 | 592 | 549 | + 22 | - 64 | + 43 |
| | + 20 | 500 | 558 | 481 | 513 | - 13 | + 45 | - 32 |
| | - 30 | 462 | 494 | 549 | 502 | - 40 | - 8 | + 47 |
| | + 30 | 582 | 542 | 451 | 525 | + 57 | + 17 | - 74 |
| | - 40 | 511 | 479 | 458 | 483 | + 28 | - 4 | - 25 |
| | + 40 | 561 | 476 | 564 | 534 | + 27 | - 58 | + 30 |
| | + 50 | 586 | 633 | 637 | 619 | - 33 | + 14 | + 18 |

| i | θ | m_p | m_g | m_b | M | $m - M$ | | |
|-----|----------|-------|-------|-------|-----|---------|------|------|
| 60 | + 60 | 641 | 603 | 628 | 624 | + 17 | - 21 | + 4 |
| | + 70 | 728 | 577 | 667 | 657 | + 71 | - 80 | + 10 |
| | - 80 | 405 | 392 | 378 | 372 | + 33 | - 40 | + 6 |
| | + 80 | 283 | 458 | 445 | 395 | - 112 | + 63 | + 50 |
| 65 | + 65 | 549 | 594 | 614 | 586 | - 37 | + 8 | + 28 |
| | - 85 | 194 | 173 | 161 | 176 | + 18 | - 3 | - 15 |
| | + 85 | 238 | 295 | 289 | 274 | - 36 | + 21 | + 15 |
| | | | | | | | | |
| 70 | 0 | 349 | 397 | 354 | 367 | - 18 | + 30 | - 13 |
| | - 10 | 352 | 329 | 391 | 357 | - 5 | - 28 | + 34 |
| | + 10 | 332 | 370 | 310 | 337 | - 5 | + 33 | - 27 |
| | - 20 | 373 | 853 | 364 | 363 | + 10 | - 10 | + 1 |
| | + 20 | 364 | 381 | 373 | 373 | - 9 | + 8 | 0 |
| | - 30 | 362 | 390 | 357 | 350 | + 12 | - 20 | + 7 |
| | + 30 | 366 | 318 | 322 | 335 | + 31 | - 17 | - 13 |
| | - 40 | 358 | 382 | 355 | 365 | - 7 | + 17 | - 10 |
| | + 40 | 452 | 416 | 382 | 417 | + 35 | - 1 | - 35 |
| | - 50 | 347 | 336 | 342 | 342 | + 5 | - 6 | 0 |
| | + 50 | 428 | 401 | 426 | 418 | + 10 | - 17 | + 8 |
| | + 60 | 551 | 443 | 497 | 497 | + 54 | - 54 | 0 |
| | + 70 | 518 | 529 | 512 | 520 | - 2 | + 9 | - 8 |
| | + 80 | 582 | 549 | 552 | 561 | + 21 | - 12 | - 9 |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| 75 | + 75 | 663 | 562 | 586 | 604 | + 59 | - 42 | - 18 |
| | + 85 | 540 | 632 | 572 | 581 | - 41 | + 51 | - 9 |
| 80 | 0 | 158 | 219 | 167 | 181 | - 23 | + 38 | - 14 |
| | - 10 | 169 | 170 | 173 | 171 | - 2 | - 1 | + 2 |
| | + 10 | 193 | 224 | 182 | 200 | - 7 | + 24 | - 18 |
| | - 20 | 184 | 163 | 208 | 185 | - 1 | - 22 | + 23 |
| | + 20 | 172 | 172 | 161 | 168 | + 4 | + 4 | - 7 |
| | - 30 | 199 | 201 | 196 | 199 | 0 | + 2 | - 3 |
| | + 30 | 203 | 229 | 167 | 200 | + 3 | + 29 | - 33 |
| | - 40 | 203 | 172 | 209 | 195 | + 8 | - 23 | + 14 |
| | + 40 | 211 | 213 | 201 | 208 | + 3 | + 5 | - 7 |
| | - 50 | 174 | 167 | 185 | 175 | - 1 | - 8 | + 10 |
| | + 50 | 248 | 220 | 244 | 237 | + 11 | - 17 | + 7 |
| | - 60 | 160 | 158 | 166 | 161 | - 1 | - 3 | + 5 |
| | + 60 | 283 | 276 | 270 | 276 | + 7 | 0 | - 6 |
| | + 70 | 496 | 431 | 424 | 450 | + 46 | - 19 | - 26 |
| | + 80 | 918 | 892 | 776 | 862 | + 56 | + 30 | - 86 |
| | | | | | | | | |
| 85 | - 5 | 111 | 83 | 89 | 94 | + 17 | - 11 | - 5 |
| | + 5 | 104 | 99 | 98 | 100 | + 4 | - 1 | - 2 |
| | - 15 | 89 | 86 | 95 | 90 | - 1 | - 4 | + 5 |
| | + 15 | 92 | 89 | 79 | 87 | + 5 | + 2 | - 8 |
| | - 25 | 107 | 81 | 84 | 91 | + 16 | - 10 | - 7 |
| | + 25 | 101 | 130 | 79 | 103 | - 2 | + 27 | - 24 |
| | - 35 | 105 | 105 | 101 | 104 | + 1 | + 1 | - 3 |
| | + 35 | 143 | 119 | 92 | 118 | + 25 | + 1 | - 26 |
| | - 45 | 70 | 104 | 94 | 89 | - 19 | + 15 | + 5 |
| | + 45 | 155 | 115 | 129 | 133 | + 22 | - 18 | - 4 |
| | - 55 | 100 | 89 | 87 | 92 | + 8 | - 3 | - 5 |
| | + 55 | 189 | 137 | 123 | 133 | + 6 | + 4 | - 10 |
| | - 65 | 90 | 94 | 78 | 87 | + 3 | + 7 | - 9 |
| | + 65 | 266 | 197 | 217 | 227 | + 39 | - 30 | - 10 |
| | + 75 | 499 | 435 | 441 | 458 | + 41 | - 23 | - 17 |

Zur besseren Uebersicht seien noch die beobachteten Lichtquantitäten für die positiven und negativen Emanationen zusammengestellt; zugleich seien in der letzten Zeile die Cosinuszahlen, welchen die darüber stehenden beobachteten Zahlenwerthe bei der Richtigkeit des Lambert'schen Gesetzes gleich sein müssten, zum Vergleiche angegeben.

 ε positiv.

| $\pm i=0^\circ$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 |
|-----------------|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 0° | 1000 | — | — | 948 | — | 876 | — | 836 | — | 711 | — | 556 | — | 364 | — | 179 | — |
| 5 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 96 |
| 10 | — | — | 990 | — | 953 | — | 906 | — | 835 | — | 652 | — | 518 | — | 334 | — | 198 |
| 15 | — | — | — | 986 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 87 |
| 20 | 1014 | — | 1020 | — | 989 | — | 923 | — | 773 | — | 638 | — | 508 | — | 369 | — | 166 |
| 25 | — | — | — | — | — | 966 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 96 |
| 30 | 997 | — | 1001 | — | 951 | — | 884 | — | 800 | — | 646 | — | 520 | — | 332 | — | 198 |
| 35 | — | — | — | — | — | — | 841 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 110 |
| 40 | 998 | — | 959 | — | 942 | — | 864 | — | 750 | — | 681 | — | 529 | — | 413 | — | 206 |
| 45 | — | — | — | — | — | — | — | — | 725 | — | — | — | — | — | — | — | 110 |
| 50 | 1033 | — | 998 | — | 934 | — | 856 | — | 806 | — | 669 | — | 613 | — | 414 | — | 235 |
| 55 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 684 | — | — | — | — | — | 111 |
| 60 | 999 | — | 962 | — | 908 | — | 827 | — | 678 | — | 742 | — | 618 | — | 492 | — | 273 |
| 65 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 580 | — | — | — | 155 |
| 70 | 955 | — | 828 | — | 711 | — | 801 | — | 655 | — | 750 | — | 650 | — | 515 | — | 445 |
| 75 | 688 | — | 582 | — | 627 | — | 586 | — | 554 | — | 615 | — | 542 | — | 630 | 598 | 551 |
| 80 | 462 | — | 447 | — | 453 | — | 458 | — | 469 | — | 457 | — | 391 | — | 555 | — | 858 |
| 85 | 143 | — | 145 | — | 120 | 198 | 161 | 186 | 175 | 196 | 182 | 203 | 197 | 223 | 393 | 375 | 1313 |
| cos | 1000 | 996 | 985 | 966 | 940 | 906 | 866 | 819 | 766 | 707 | 643 | 574 | 500 | 423 | 342 | 259 | 174 |

 ε negativ.

| $-\varepsilon$ | $i = 0^\circ$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|----------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | 948 | 876 | 836 | 711 | 556 | 364 | 179 |
| 10 | — | — | — | 858 | 749 | 676 | 581 | 353 | 169 |
| 20 | 1014 | — | — | — | 751 | 646 | 544 | 359 | 183 |
| 30 | 997 | 955 | — | — | — | 647 | 497 | 346 | 197 |
| 40 | 998 | 974 | 900 | — | — | — | 478 | 361 | 193 |
| 50 | 1033 | 983 | 922 | 848 | — | — | — | 339 | 173 |
| 60 | 975 | 990 | 927 | 815 | 725 | — | — | — | 159 |
| 70 | 955 | 840 | 839 | 785 | 648 | 572 | — | — | — |
| 80 | 462 | 471 | 482 | 473 | 433 | 382 | 363 | — | — |
| cos | 1000 | 985 | 940 | 866 | 766 | 643 | 500 | 342 | 174 |

Da bei der Stellung $i=0$, $\varepsilon=0$ nicht beobachtet werden kann, und ich zur Berechnung der Beobachtungen $i=10$, $\varepsilon=10$ als

Vergleichsstellung annahm, so wurde durch Extrapolation der Werth für $i = 0$, $\varepsilon = 0$ gesucht und dann = 1000 gesetzt, und dementsprechend wurden die übrigen Zahlen verringert.

Eine graphische Darstellung, wie sie auch Zöllner, Bouguer folgend, gibt, möge die Verhältnisse bei der diffusen Reflexion anschaulicher machen. Sei AB (Fig. 3—7) die zerstreut reflectirende Fläche, und CD die Normale darauf und zugleich die Länge des bei senkrechter Incidenz und Emanation reflectirten Lichtes. Der in C und D berührende Kreis entspricht dem Lambert'schen Cosinusetze. Ich gebe die Curven für $i = 0$ (— — — —), $\varepsilon = 0$ (.....) und $i = \varepsilon$ (— . — . — .).

2. Marmor. — Ein Stück von 4 cm Breite und 8 cm Höhe wurde bei verschiedener Oberflächenbeschaffenheit benutzt, und zwar:

1) unpolirt, wie die Fläche beim Schneiden des Steines entsteht; dabei hat die Fläche ziemlich grosse Unregelmässigkeiten und ist ohne jeden Glanz; 2) matt polirt, 3) blank polirt. Bei den beiden letzten Oberflächen tritt regelmässige Reflexion auf. Es sei gleich hier darauf hingewiesen, dass die regelmässige Reflexion von 0° an abnimmt und am schwächsten bei ca. 60° Incidenzwinkel ist, dann aber sehr rasch zunimmt und mit streifendem Einfall ihren grössten Werth erreicht.

Unpolirter Marmor.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 45 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 928 | 853 | 739 | — | 584 | 479 | 341 | 180 |
| 10 | — | 980 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | — | — | 885 | — | — | — | 513 | — | — |
| 20 | 914 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | 923 | — | 934 | — | 823 | — | 754 | — | 510 | 401 | 213 |
| 40 | 910 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 45 | — | — | — | — | 883 | — | — | — | 583 | — | — |
| 50 | 939 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 60 | 949 | — | 923 | — | 847 | — | 781 | — | 621 | 502 | 370 |
| 70 | 883 | — | — | — | 881 | — | — | — | 762 | — | — |
| 80 | 478 | — | — | — | 577 | — | — | — | 575 | — | — |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 766 | 707 | 643 | 500 | 342 | 174 |

Matt polirter Marmor.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 75 | 80 | 85 |
|---------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|----|
| 0° | 1000 | — | — | 569 | — | 491 | 327 | 223 | — | 107 | — |
| 10 | — | 992 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 992 | — | — | 470 | — | — | — | — | — |
| 20 | 580 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | — | — | — | — | 991 | 547 | — | — | — | — | — |
| 45 | 594 | — | 634 | — | 594 | 626 | 372 | 228 | 207 | 133 | 85 |
| 60 | 626 | — | — | — | — | 546 | 478 | — | — | — | — |
| 70 | 633 | — | — | — | — | 491 | — | — | — | — | — |
| 75 | 526 | — | 427 | — | 439 | 407 | 414 | 1312 | 3810 | 9365 | — |
| 80 | 275 | — | — | — | — | 254 | — | — | — | 6806 | — |
| 85 | 86 | — | — | — | — | 84 | — | — | — | — | — |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 259 | 174 | 87 |

Blank polirter Marmor.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 45 | 50 | 60 | 70 | 75 | 80 |
|---------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| 0° | 1000 | — | — | 149 | 127 | 116 | — | 89 | 69 | 45 | 30 | 17 |
| 10 | — | 990 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 995 | — | 135 | — | — | — | 64 | — | — | — |
| 20 | 148 | — | — | 905 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | 139 | — | 137 | — | 950 | — | 102 | — | 71 | 44 | 29 | 17 |
| 40 | 139 | — | — | — | — | 508 | — | — | — | — | — | — |
| 45 | — | — | — | — | 115 | — | 392 | — | 67 | — | — | — |
| 50 | 139 | — | — | — | — | — | — | 196 | — | — | — | — |
| 60 | 135 | — | 131 | — | 115 | — | 103 | — | 166 | 117 | 56 | 38 |
| 70 | 107 | — | — | — | 110 | — | — | — | 77 | 924 | — | — |
| 75 | 68 | — | 39 | — | 39 | — | 44 | — | 61 | 310 | 1994 | 1864 |
| 80 | 37 | — | — | — | 36 | — | — | — | 36 | — | — | — |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 766 | 707 | 643 | 500 | 342 | 259 | 174 |

3. Sandstein. — Es war dies gelblichweisser Sandstein mit sehr feinem Korn, ca. 17 cm lang und 11 cm breit. Die Fläche war nicht ganz eben.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 75 | 80 |
|---------------|---------------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 980 | — | 801 | 562 | 417 | — | 198 |
| 10 | — | 980 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 1002 | — | — | 729 | — | — | — | — |
| 20 | 888 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | — | — | — | — | 817 | 724 | — | — | — | — |
| 45 | 940 | — | 936 | — | 979 | 741 | 633 | 425 | — | 271 |
| 60 | 969 | — | — | — | — | 780 | 600 | — | — | — |
| 70 | 951 | — | — | — | — | 726 | — | 528 | — | — |
| 75 | 851 | — | — | — | — | 782 | — | — | 527 | — |
| 80 | 574 | — | — | — | — | 642 | — | — | — | 544 |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 259 | 174 |

4. Gyps. — Um zu sehen, welchen Einfluss Unregelmäßigkeiten der Oberfläche der zu reflectirenden Substanzen auf die diffuse Reflexion haben, stellte ich zwei Flächen aus Gyps wie folgt dar. Auf ein ebenes Brettchen von 7,5 cm Breite und 15 cm Höhe strich ich feuchten Gyps, welchem ich beliebige Erhöhungen gab, bis zu 1 cm Höhe circa. Es sah hierbei eine solche Fläche einem Modelle einer Mondlandschaft in Gyps nicht unähnlich. Auf die eine Fläche streute ich, bevor die Masse getrocknet war, trockenen Gyps, wodurch dieselbe ein mehr dunkles Aussehen mit rauherer Oberfläche bekam. Die andere liess ich für sich trocknen; sie war mehr glatt und hell. Die erstere Fläche werde ich mit „Gyps A“, letztere mit „Gyps B“ bezeichnen.

Gyps A.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 80 |
|---------------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 902 | — | 654 | 517 | 377 | 177 |
| 10 | — | 991 | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 982 | — | — | 630 | — | — | — |
| 20 | 929 | — | — | 974 | — | — | — | — | — |
| 30 | — | — | — | — | 881 | 618 | — | — | — |
| 45 | 980 | — | 908 | — | 818 | 593 | 446 | 271 | 117 |
| 60 | 879 | — | — | — | — | 582 | 364 | — | — |
| 70 | 974 | — | — | — | — | 566 | — | 218 | — |
| 80 | 677 | — | — | — | — | 396 | — | — | 87 |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 174 |

Gyps B.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 80 |
|---------------|---------------|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 1045 | — | 851 | 614 | 317 | 167 |
| 10 | — | 990 | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 956 | — | — | 841 | — | — | — |
| 20 | 1082 | — | — | 992 | — | — | — | — | — |
| 30 | — | — | — | — | 952 | 571 | — | — | — |
| 45 | 1215 | — | 920 | — | 846 | 694 | 454 | 377 | 223 |
| 60 | 736 | — | — | — | — | 512 | 324 | — | — |
| 70 | 512 | — | — | — | — | 292 | — | 123 | — |
| 80 | 248 | — | — | — | — | 130 | — | — | 18 |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 174 |

5. Schrot. — Um den Einfluss regelmässig vertheilter Erhöhungen auf der Oberfläche eines diffus zerstreuenden Körpers

zu studiren, stellte ich zwei Flächen aus Schrotkörnern her, indem ich dieselben sehr gleichmässig vertheilt auf einem Brettchen von 7 cm Länge und Breite befestigte. Ich benutzte dazu Schrot vom Durchmesser von 3,4 mm und von 3,9 mm. Um die Lichtstärke des reflectirten Lichtes zu erhöhen, bemalte ich die so entstandenen Flächen mit Cremserweiss, jedoch so, dass die dazwischen liegenden leeren Stellen nicht ausgefüllt, d. h. die Unebenheiten möglichst wenig verändert wurden. Es ist noch zu bemerken, dass diese Flächen infolge der Bemalung mit Oelfarbe etwas glänzten. Ich werde dieselben mit „Schrot klein“ und „Schrot gross“ bezeichnen.

Schrot klein.

| θ | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 75 | 80 |
|-----------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 926 | — | 679 | 507 | 346 | — | 147 |
| 10 | — | 920 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 845 | — | — | 665 | — | — | — | — |
| 20 | 1006 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | 955 | — | — | — | 977 | 593 | — | — | — | — |
| 45 | 986 | — | 863 | — | 593 | 506 | 248 | 116 | — | 90 |
| 60 | 1034 | — | — | — | — | 420 | 221 | — | — | — |
| 70 | 1057 | — | — | — | — | 392 | — | 181 | — | — |
| 75 | 762 | — | — | — | — | 265 | — | — | 227 | — |
| 80 | 651 | — | — | — | — | 241 | — | — | — | 391 |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 259 | 174 |

Schrot gross.

| θ | $i = 0^\circ$ | 10 | 15 | 20 | 30 | 45 | 60 | 70 | 75 | 80 |
|-----------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 1000 | — | — | 897 | — | 569 | 467 | 317 | — | 174 |
| 10 | — | 920 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 15 | — | — | 759 | — | — | 616 | — | — | — | — |
| 20 | 961 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 30 | 925 | — | — | — | 628 | 544 | — | — | — | — |
| 45 | 945 | — | 774 | — | 610 | 444 | 253 | 164 | — | 99 |
| 60 | 876 | — | — | — | — | 403 | 197 | — | — | — |
| 70 | 833 | — | — | — | — | 361 | — | 201 | — | — |
| 75 | — | — | — | — | — | 268 | — | — | 331 | — |
| 80 | 475 | — | — | — | — | 254 | — | — | — | 586 |
| cos | 1000 | 985 | 966 | 940 | 866 | 707 | 500 | 342 | 259 | 174 |

**Einfluss des Azimuths der Einfallsebene und Emanations-
ebene auf die Lichtintensität.** — Im allgemeinen kann es
nicht gleichgültig sein, ob die Einfallsebene und Emanations-
ebene eines Lichtstrahles bei einem diffus reflectirenden Körper

dieselbe ist oder nicht, d. h. ob beide unter einem gewissen Azimuth gegeneinander geneigt sind.

Bei den Beobachtungen an Biscuit hatten die beiden Ebenen ein Azimuth von 0 und 180°, und es zeigten sich hierbei nur geringe Unterschiede für die Helligkeit in den beiden Azimuthen, und zwar in der Weise, dass für die kleineren Winkel i und ϵ bei 0° Azimuth die gemessene Helligkeit etwas grösser ist als für die Beobachtungen bei 180° Azimuth. Bei den grossen Winkeln i und ϵ jedoch übertrifft die Helligkeit bei Azimuth 180° die bei 0° Azimuth, da hier die Erscheinungen des streifenden Einfalls in Betracht zu ziehen sind. Um zu untersuchen, wie sich die Verhältnisse in anderen Ebenen gestalten, habe ich noch einige Versuche angestellt. Hierzu wurde folgender Apparat benutzt.

Auf die Alhidade eines Theodoliten wurde nach Wegnahme des Fernrohrs nebst Höhenkreis ein Brettchen befestigt und auf dasselbe die Substanz so gestellt, dass sie noch um eine Horizontalaxe gedreht werden konnte. Hierbei wurden die Winkel für die Einstellung des Horizontal- und Höhenkreises vorher mittelst sphärischer Trigonometrie berechnet. Diese Substanz, als welche ich ein Stück weissen Cartons benutzte, wurde vermittelt einer Gaslampe erleuchtet, nachdem das Licht vorher durch eine Linse parallel gemacht worden war. Als Photometer wurde ein Glan'sches Spectralphotometer benutzt, das durch Wegnahme des Prismas in ein gewöhnliches verwandelt wurde. Sowohl bei der Aufstellung als bei den Versuchen selbst wurde die nöthige Vorsicht getroffen, um Fehler zu vermeiden.

Es zeigte sich hierbei, dass das Azimuth der Einfallsebene zur Emanationsebene nicht vernachlässigt werden darf. Nachfolgende Zahlen, Mittelwerthe aus mehrfachen Einstellungen, welche auf 6 Proc. ca. genau sind, mögen die dabei vorkommenden Abweichungen zeigen:

| Azimuth | Einfallswinkel | Austrittswinkel | beob. Intensität |
|---------|----------------|-----------------|------------------|
| 0° | 45° | 45° | 100 — |
| 90 | | | 68 — |
| 135 | | | 100 — |
| 0 | 60 | 60 | 83 100 |
| 90 | | | 57 68 |
| 135 | | | 66 79 |

Einige Beobachtungen an einem mit Sandstein matt polirten Marmor liessen schon durch den blossen Anblick die Abhängigkeit der Intensität vom Azimuth erkennen.

Einfluss der Farbe. — Betrachtet man die oben angegebenen Beobachtungen an Biscuit, bei welchen in den letzten drei Columnen gleich die Differenzen zwischen Beobachtung und Mittelwerth gegeben sind, und bildet man die Summe der + Differenzen, d. h. diejenigen, bei welchen die beobachtete Zahl grösser ist als das Mittel, und die Summe der — Differenzen, bei welchen sie kleiner ist, so ergibt sich:

| | Roth | Grün | Blau | Gesamtsumme |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------------|
| Summe der + Abweichungen | +2006 | +1528 | +2011 | +5545 |
| Summe der — Abweichungen | —1744 | —2026 | —1777 | —5547 |
| Summe | + 262 | — 498 | + 234 | — 2. |

Die Summe der + und — Abweichungen sind einander gleich. — Bildet man aber die Summe der Abweichungen in Procenten, so ergibt sich:

| | Roth | Grün | Blau | Gesamtsumme |
|--------------------------|------|------|------|-------------|
| Summe der + Abweichungen | +436 | +334 | +338 | +1108 |
| Summe der — Abweichungen | —420 | —444 | —532 | —1396 |
| Summe | + 16 | —110 | —194 | — 288. |

Da für die Beobachtungen im Roth die + Abweichungen grösser sind, als im Grün und Blau, ebenso für die Beobachtungen im Blau die — Abweichungen am meisten vorherrschen und die Differenzen im Sinne Beobachtung minus Mittel gebildet wurden, so folgt, dass die Gesamtsumme der beobachteten Helligkeit für Roth grösser ist, als für Grün, und letztere wieder grösser als für Blau.

Fresnel¹⁾ fand nun, dass der Grenzwinkel, für den zu der unregelmässigen Zurückwerfung deutliche regelmässige hinzutritt, für die verschiedenen Wellenlängen verschieden ist, und zwar tritt die regelmässige Zurückwerfung für Roth früher ein, als für Gelb, Grün u. s. w. Seine eigenen Experimente und die von Hrn. Hankel²⁾ bestätigten auch dies Resultat.

Aus diesem Grunde muss auch in unserem Falle die Summe der Helligkeiten des von einem unregelmässig reflectirenden

1) Fresnel, Oeuvres complètes 1. p. 226. Paris 1866.

2) W. Hankel, Pogg. Ann. 100. p. 302. 1857.

Körper zurückgeworfenen Lichtes für Roth grösser sein, als für Grün und Blau u. s. w., wie sich das auch in den Beobachtungen ausspricht. Bei den grossen Incidenz- und Emanationswinkeln ist dies deutlicher, so z. B. für $i = 80^\circ$ und $\varepsilon = +60^\circ$, $+70^\circ$, $+80^\circ$. — Bildet man noch die Summe der Abweichungen für die + Emanationen allein, so kommt:

| | Roth | Grün | Blau | Gesamtsumme |
|-----------------------------------|------|------|------|-------------|
| Summe der + Abweichungen in Proc. | +275 | +257 | +213 | +745 |
| Summe der - Abweichungen in Proc. | -320 | -268 | -377 | -965 |
| Summe | -45 | -11 | -164 | -220. |

Es bleibt auch hier der Unterschied bestehen. Der starke Ueberschuss der negativen Abweichungen bei allen Farben rührt offenbar von dem starken Anwachsen der Helligkeit beim Eintritt der regelmässigen Reflexion her. Da gerade bei diesen grossen Winkeln die Aufstellungsfehler des Apparates von sehr grossem Einfluss sind, weil hier die Helligkeit des reflectirten Lichtes sich rasch ändert, so zeigen die Beobachtungen ausserdem noch, dass sie als gut bezeichnet werden dürfen, und dass die Instrumentalfehler keine grossen gewesen sind.

Es mögen hier noch einige Beobachtungen Platz finden, welche mit dem Spectralphotometer über die Intensität des reflectirten Lichtes für verschiedene Farben von verschiedenen Substanzen angestellt wurden. Die Herren H. C. Vogel und Müller¹⁾ haben seiner Zeit, als sie den Mond spectralphotometrisch beobachteten, zum Vergleich das reflectirte Licht einiger irdischer Substanzen benutzt. Ich habe die Beobachtungen wiederholt und noch einige an anderen Substanzen hinzugefügt. Da beide Herren²⁾ auch verschiedene Färbungen auf dem Monde constatiren konnten, und es wünschenswerth ist, eine grössere Anzahl irdischer Vergleiche zu haben, so können diese Beobachtungen als Anhaltspunkte dienen.

Es mögen zunächst die Beobachtungen folgen. Die Ueberschriften geben die benutzten Substanzen; in der ersten Columne steht die Wellenlänge. Eine Stellung, nämlich für die Wellenlänge $552 \mu\mu$, wurde als Vergleichsstellung verwendet und deren Intensität gleich 100 gesetzt.

1) H. C. Vogel, Berl. Monatsber. März 1877. p. 104 u. Oct. 1880. p. 801.

2) H. C. Vogel u. Müller, Vierteljahrsschrift d. astron. Gesellschaft. 1882. p. 230.

| Wellen- länge | Himmelslicht | | Wellen- länge | Himmelslicht | | Wellen- länge | Himmelslicht | |
|------------------|--------------|------|------------------|--------------|------|------------------|--------------|------|
| | bedeckt | klar | | bedeckt | klar | | bedeckt | klar |
| 666 | 457 | 457 | 552 | 100 | 100 | 485 | 28 | 24 |
| 629 | 321 | 312 | 533 | 70 | — | 460 | 22 | 11 |
| 598 | 215 | 251 | 517 | 55 | 51 | 439 | 11 | 6 |
| 574 | 152 | — | 500 | 38 | — | | | |

| Wellen- länge | Conceptpapier | | | Blauer Carton | Weisses Papier | Ziegelstein | Kieselstein | Lehm | Sandstein weisslich | Schwarzer Dolerit | Sand | Ackererde | Gemisch aus Sand, Erde und Lehm | Biscuit |
|------------------|---------------|--------|--------|------------------|-------------------|-------------|-------------|------|------------------------|----------------------|------|-----------|---------------------------------------|---------|
| | gelbes | rothes | blaues | | | | | | | | | | | |
| 666 | 378 | 327 | 258 | 533 | 343 | 141 | 378 | 225 | 339 | 381 | 235 | 217 | 275 | 198 |
| 629 | 262 | 274 | 227 | 396 | 237 | 109 | 239 | 210 | 253 | 264 | 218 | 181 | 229 | — |
| 598 | 214 | 220 | 176 | 255 | 198 | 90 | 189 | 140 | 157 | 190 | 157 | 143 | 146 | 120 |
| 552 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 517 | 51 | 57 | 44 | 41 | 48 | 68 | 54 | 65 | 49 | 50 | 54 | 60 | 67 | 94 |
| 485 | 30 | 31 | 23 | 19 | 26 | 44 | 32 | 48 | 28 | 31 | 40 | 38 | 42 | 92 |
| 460 | 19 | 19 | 14 | 12 | 14 | 30 | 22 | 37 | 19 | 22 | 27 | 27 | 36 | — |
| 439 | 13 | 14 | 12 | 10 | 13 | 26 | 20 | 33 | 18 | 17 | 21 | 26 | 31 | — |

Mit Ausnahme der Beleuchtung von Biscuit wurde als Lichtquelle die Sonne benutzt und die Substanzen so gestellt, dass die Strahlen nahezu senkrecht einfielen und unter ca. 30° austraten. Bei Biscuit wurde Lampenbeleuchtung verwendet und hierbei Incidenz- und Emanationswinkel = 10° gesetzt.

Die Beobachtungen stimmen mit denen der oben genannten Herren gut überein. Für das Himmelslicht wäre es wünschenswerth, einmal Beobachtungen mit dem Spectralphotometer unter verschiedenen Azimuthen und Höhen anzustellen unter Berücksichtigung des Sonnenstandes, wie dies für gewöhnliches Licht zum Theil durchgeführt worden ist.¹⁾

Polarisation des diffus reflectirten Lichtes. — Einige hierüber angestellte Versuche an einem mit Sandstein matt geschliffenen Marmor und mattem Cartonpapier unter Anwendung einer dichroskopischen Loupe und eines Savart'schen Polarisators ergaben sowohl für Lampenlicht als für directes Sonnenlicht folgende Resultate.

Für nahe senkrechte Beleuchtung ist selbst für Emanationswinkel $> 80^\circ$ kaum eine Polarisation nachweisbar. Wachsen

1) Wild, Bull. de l'acad. d. St. Pétersbourg. 21. p. 312. 1876. L. Weber, Wied. Ann. 26. p. 374. 1885; Astron. Nachr. 118. Nr. 2810. 1887.

dagegen die Incidenzwinkel, so hängt die Polarisation von dem Winkel ab, den die Ebene des austretenden Strahles mit dem des einfallenden bildet. Sind beide Ebenen auf derselben Seite, haben sie also ein Azimuth 0° , so ist fast keine Polarisation vorhanden, selbst für sehr grosse Incidenz- und Emanationswinkel. Stehen jedoch beide Ebenen unter einem Azimuth von 180° zu einander, so tritt zunächst bei kleinen Incidenzwinkeln und grossen Emanationswinkeln schwache Polarisation auf. Für Incidenzen von $i = 60^\circ$ an ist bei $\varepsilon = +80^\circ$ die Polarisation schon sehr stark, nimmt aber mit ε ab und ist für $\varepsilon = 0^\circ$ verschwunden. Wächst i noch mehr bis über 80° , so nimmt auch die Polarisation des reflectirten Lichtes zu, selbst bis $\varepsilon = 0^\circ$.

Stehen die beiden Ebenen der einfallenden und austretenden Strahlen unter verschiedenen Azimuthen zu einander, so treten alle Zwischenstufen zwischen den Resultaten bei Azimuth 0 und 180° auf. Bei allen diesen Beobachtungen schwingt der Strahl senkrecht zur Ebene, welche durch den eintretenden Strahl und durch den beobachteten gelegt werden kann.¹⁾

Aus diesen Beobachtungen erklärt sich auch, warum Arago²⁾ und später Secchi³⁾ für den Mond nachwiesen, dass besonders im ersten Viertel (und in den grauen Mondflecken) polarisirtes Licht vorhanden sei, für den Vollmond dagegen keines.

Kugel und Cylinder. — Zur Erkenntniss der physischen Beschaffenheit der Himmelskörper, besonders auch der Planeten unseres Sonnensystems, bietet die Photometrie ein unschätzbares Hülfsmittel, wie die Beobachtungen von Seidel⁴⁾, Bond⁵⁾, Zöllner⁶⁾, Engelmann⁷⁾, H. C. Vogel⁸⁾, Müller und anderen

1) A. Ångström, Pogg. Ann. 90. p. 582. 1853. De la Provostaye und Desains, Compt. rend. 33. p. 444. 1851.

2) Arago, Compt. rend. 18. p. 1119. 1844 u. Astronomie 1. (2.) p. 18.

3) Secchi, Monthly Notices Astr. Soc. 20. p. 70. 1860.

4) L. Seidel, Monumenta saecularia d. Münch. Acad. 1859.

5) G. P. Bond, Mem. of the Amer. Acad. New Ser. 8. 1861.

6) F. Zöllner, Photometr. Unters. Leipzig 1865; Pogg. Ann. Jubelb. p. 624. 1874.

7) R. Engelmann, Ueber die Helligkeitsverhältnisse der Jupitertrabanten. Leipzig 1871.

8) H. C. Vogel, Berl. Monatsber. Oct. 1880. p. 801.

zur Genüge dargethan haben. Allein es haben sich aus den Beobachtungen auch Eigenthümlichkeiten in den Helligkeitsänderungen, hervorgerufen durch die Phasen, gezeigt, die sich nicht immer recht erklären lassen. Abgesehen von den Beobachtungen am Monde seien nur die Beobachtung Bremiker's¹⁾ über die Helligkeit der Venus bei Gelegenheit der Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860 und die Beobachtungen Müller's²⁾ an kleinen Planeten (besonders an Ceres u. a.) angeführt.

Zöllner hat für den Mond durch Rechnung gefunden, dass die Helligkeit desselben die eines Kreiscylinders von demselben Durchmesser wie der Mond, und dessen Höhe zwei Drittel dieses Durchmessers ist. Die Herren Searle³⁾ und Seeliger⁴⁾ haben allerdings nachgewiesen, dass dieses Resultat Zöllner's infolge eines Irrthums nicht richtig ist und nur zufällig die von Zöllner gefundene Formel mit den Beobachtungen harmonirt.

Lambert findet für die Helligkeit eines Planeten bei verschiedenen Phasen den Werth: $(\sin v - v \cos v)/\pi$, wo v , die Phase, der äussere Winkel am Planeten im Dreieck Erde, Planet, Sonne ist.

Die Herren Searle und Seeliger finden an Stelle der Zöllner'schen Formel für einen Cylinder mit der Phase v für die beobachtete Lichtquantität:

$$L = \frac{2}{\pi} [\sin(v - \beta) - (v - \beta) \cos(v - \beta)], \quad \text{wo } v < 2\beta,$$

$$\text{und: } L = \frac{1}{\pi} [\sec \beta] \cdot [\sin v - v \cdot \cos v - 2\beta \sin \beta \sin(v - \beta)],$$

wo $v > 2\beta$ und β der Winkel ist, den die Erhebungen mit der Mondoberfläche bilden. Searle gibt auch eine Tafel für verschiedene Werthe von β .

Da man meines Wissens bis jetzt noch nicht den Versuch angestellt hat, einmal experimentell den Einfluss der Phase — d. i. der Aussenwinkel am Dreieck Beobachter, Körper, Lichtquelle — auf die Helligkeit zu untersuchen, liess ich eine Kugel

1) C. Bremiker, Berl. Monatsber. 1860. p. 693.

2) G. Müller, Astron. Nachr. 110. Nr. 2631; 114. Nr. 2724.

3) A. Searle, Proc. of the Amer. Acad. 1884. p. 310.

4) H. Seeliger, Vierteljahrsschr. d. astron. Gesellsch. 21. p. 228. 1886.

und einen Cylinder herstellen. Der Durchmesser beider betrug 1,2 cm, die Höhe des Cylinders mass 10 cm. Zur Beobachtung benutzte ich den oben (p. 869) beschriebenen Apparat und drehte hierbei den Spalt des Photometers so weit auf, dass der Öffnungswinkel, welchen der Spalt mit den Rändern der Kugel bildete, von der Grösse war, dass alles von der Kugel auf den Spalt fallende Licht ausgenutzt wurde. Beim Cylinder wurde ungefähr 1,5—1,6 cm der Höhe verwendet. Da das Spectrum dieses reflectirten Lichtes sehr schwach war, habe ich das Prisma des Photometers weggenommen und direct beobachtet, indem die beiden Spaltbilder zur Berührung gebracht wurden, nachdem deren Farbe künstlich durch farbige Gläser gleich gemacht worden war. Durch diese Anordnung erhielt man hellere und leichter zu beobachtende Bilder. — Die Kugel, bez. der Cylinder wurde in der Mitte des Tischchens aufgestellt und durch die verschiedenen Stellungen der Beleuchtungslampe die Phasen erzeugt.

Allein es stellte sich jetzt ein anderer Uebelstand ein, der die Sicherheit eines Theiles der Beobachtungen verminderte. Wurde die Phase kleiner als 80° , so zeigte deren Spaltbild auch eine Phase, welche Eigenthümlichkeit ich trotz verschiedener Versuche nicht wegbringen konnte, und ich stellte deshalb immer auf den helleren Theil ein. Die beobachtete Curve verläuft sehr regelmässig.

| Phase | Kugel | | Cylinder | | Phase | Kugel | | Cylinder | |
|-------|-------|------|----------|------|-------|-------|-----|----------|-----|
| | A | B | A | B | | A | B | A | B |
| 160 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 80 | 202 | 256 | 365 | 415 |
| 150 | 944 | 898 | 1127 | 982 | 70 | 142 | 211 | 257 | 309 |
| 140 | 793 | 909 | 1024 | 1020 | 60 | 87 | 126 | 185 | 166 |
| 130 | 680 | 803 | 1052 | 987 | 50 | 69 | 104 | 97 | 92 |
| 120 | 571 | 695 | 916 | 899 | 40 | 51 | 67 | 68 | 56 |
| 110 | 483 | 600 | 866 | 801 | 30 | 40 | 43 | 44 | 53 |
| 100 | 377 | 458 | 663 | 655 | 20 | 52 | 16 | 26 | 34 |
| 90 | 288 | 378 | 492 | 507 | | | | | |

Unter A sind die Helligkeiten gegeben, die beide Körper reflectirten, nachdem deren Oberflächen mit Kreide weiss gemacht waren; in den Columnen B sind die Helligkeiten gegeben, die beide Körper reflectirten, nachdem deren Oberflächen

mit einer dünnen Gypsschicht bedeckt und dadurch mit starken Unregelmässigkeiten versehen waren. Die Erhöhungen betragen mehrere Millimeter und vergrösserten den mittleren Durchmesser beider Körper um ca. 3 mm.

Auf der beigegebenen Fig. 8 sind die erhaltenen Werthe graphisch dargestellt und dazu die Curven gezeichnet, wie sie sich nach Lambert und Zöllner, bez. Searle-Seeliger ergeben. Man erkennt daraus, dass die von mir gefundenen Werthe für die Kugel B am nächsten noch durch die Lambert'sche Formel dargestellt wird. Die Beobachtungen Zöllner's am Monde dagegen geben viel kleinere Werthe.

Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtungen. — Treffen Lichtstrahlen auf einen Körper, so können unter der Voraussetzung, dass der Körper weder fluorescirt, noch phosphorescirt oder sonst selbständig Licht aussendet, zwei Vorgänge unterschieden werden. Der eine Theil der Strahlen wird gleich an der Oberfläche reflectirt, der andere dringt in den Körper ein. Die in den Körper eindringenden Strahlen können zerfallen in solche, welche den Körper durchsetzen, solche, welche vollständig absorbirt, und solche, welche von innen heraus reflectirt werden. Wir betrachten nur die letzteren, die mit dem von der Oberfläche reflectirten Lichte uns das gesammte reflectirte Licht liefern.

Die Helligkeit eines beleuchteten gegebenen Körpers hängt von den geometrischen und physikalischen Beziehungen desselben zu dem einfallenden Lichte ab. Die dabei in Frage kommenden Momente und die Grössen, welche in die die Helligkeit bestimmenden Gleichungen in der einen oder anderen Weise eintreten, sind die folgenden:

- 1) der Incidenzwinkel i ; 2) der Emanationswinkel ϵ ;
- 3) der Winkel, den die Ebenen der einfallenden und austretenden Strahlen miteinander bilden, d. i. ihr Azimuth w ;
- 4) das von der Oberfläche reflectirte Licht, sei es regelmässig oder diffus zurückgeworfen. Diese beiden Theile können aber getrennt behandelt werden, da das regelmässig zurückgeworfene Licht nur in ganz gewissen Richtungen auftritt, was von der mehr oder weniger körnigen Structur der Oberfläche abhängt. Wir haben es hier nur mit dem diffus reflectirten

Lichte zu thun; 5) das aus dem Innern des Körpers heraus reflectirte Licht, komme es direct oder nach mehrfachen Reflexionen oder von der Rückfläche des Körpers. Hierbei ist für die verschiedenen Substanzen der Brechungsexponent zu berücksichtigen. 6) Ferner kommt das Diffusionsvermögen der Grenzfläche des Körpers und das der im Innern desselben liegenden Theile in Betracht. Man versteht darunter die Fähigkeit, Licht zu verbreiten, die von der Feinheit des Kornes der Oberfläche der Substanzen und der inneren Structur abhängt. Die beiden Diffusionsvermögen brauchen nicht einander gleich zu sein.¹⁾ 7) Das jeder Substanz eigenthümliche Absorptionsvermögen, welches im allgemeinen eine Function der Wellenlänge sein wird. 8) Die Tiefe, aus der noch Licht reflectirt wird, welche von dem Absorptionsvermögen abhängt. 9) Die Polarisation des reflectirten Lichtes.²⁾

Zöllner³⁾ suchte die Lambert'sche Formel:

$$Q = J \cdot \mu \frac{\cos i \cdot \cos e}{r^2} dp dq$$

zu stützen, indem er die Erscheinungen der strahlenden Wärme, wie sie durch Fourier⁴⁾, Poisson⁵⁾ und Melloni⁶⁾ erforscht wurden, auf das Licht anwandte. Allein die Beobachtungen über die diffuse Reflexion konnte er so nicht erklären, sondern kommt nur zu dem Schlusse, dass die Helligkeitsänderungen, welche eine zerstreut reflectirende Oberfläche bei verschiedenen Incidenz- und Emanationswinkeln des ein- und ausstrahlenden Lichtes zeigt, ganz charakteristisch für die Natur und physikalische Beschaffenheit jener Oberfläche sein müssen.

Eine eingehende theoretische Untersuchung über die diffuse Reflexion hat neuerdings Hr. Lommel⁷⁾ gegeben. Er stellt statt des Emanationsgesetzes von Lambert den Satz

1) Vgl. O. Chwolson, Bull. de l'acad. d. St. Pétersbourg. 31. p. 213. 1886 u. A. Lallemand, Journ. de Phys. 5. p. 329. 1876.

2) J. Violle, Compt. rend. 105. p. 111. 1887 u. oben p. 887.

3) F. Zöllner, Phot. Untera. p. 15.

4) M. Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. §. 48.

5) Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Paris 1855.

6) Melloni, La thermochrose. Naples 1850.

7) E. Lommel, Sitzber. d. Münch. Acad. math.-phys. Cl. p. 95. 1887.

auf, dass das von einem Volumenelement ausstrahlende Licht auf dem Wege innerhalb des strahlenden Körpers nach Maassgabe des Absorptionsgesetzes geschwächt wird. Unter dieser Voraussetzung entwickelt er für diffus reflectirende Körper von solcher Schichtdicke oder Undurchsichtigkeit, dass bis zur Rückseite desselben kein merkliches Licht vordringt, die Formel:

$$L = \frac{d\omega}{4\pi} \cdot a \cdot \frac{l}{2m} \cdot \frac{2 \cos i \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon} \left(1 + \frac{\frac{l}{2m}}{1 - \frac{l}{2m} \varphi} \left[\cos i \log \frac{1 + \cos i}{\cos i} + \cos \varepsilon \log \frac{1 + \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon} \right] \right)^{1)}.$$

Unter Berücksichtigung der Schichtdicke E findet Hr. Lommel einen viel complicirteren Ausdruck²⁾, der eine Anwendung nur sehr schwer gestattet. Uebrigens gibt ein Vergleich dieser Theorie mit Beobachtungen, wie Hr. Lommel selbst zeigt, ebenso wie das Lambert'sche Gesetz, nur eine Annäherung und nicht eine vollkommene Uebereinstimmung beider.

Hr. Seeliger³⁾ gelangt, von ähnlichen Ueberlegungen ausgehend wie Hr. Lommel, zu der Formel:

$$Q = \gamma \cdot d\sigma \cdot df \cdot \frac{\cos i \cos \varepsilon}{\mu \cos i + \cos \varepsilon},$$

wo γ eine beliebige Constante, $d\sigma$ das leuchtende, df das bestrahlte Flächenelement, μ der Absorptionscoefficient für die ausgesandten, bez. einfallenden Lichtstrahlen, i und ε der Incidenz- und Emanationswinkel, und zwar abhängig von dem Brechungsvermögen des Körpers sind.

Hr. Seeliger will diese Formel nur für die Planeten mit dichten Atmosphären angewendet wissen und hat dieselbe mit Erfolg auf den Planeten Saturn angewendet.⁴⁾

Eine Vergleichung aller dieser Theorien mit den Beobachtungen zeigt, dass sie dieselben nicht gut darzustellen vermögen. Auch zeigen sie, dass die Formel in Bezug auf i und ε nicht symmetrisch sein könne. Wollte man alle bei diesem Problem in Frage kommenden Momente berücksichtigen, so

1) Ueber die Bedeutung der einzelnen Buchstaben siehe l. c. p. 97.

2) E. Lommel, l. c. p. 115.

3) H. Seeliger, Vierteljahrsschrift d. astr. Gesellsch. 21. p. 220. 1886.

4) H. Seeliger, Abhandl. d. Münch. Acad. II. Cl. 16. II. Abth. p. 405. 1887.

käme man zu weitläufigen Formeln mit sehr vielen Constanten, die bis jetzt noch nicht getrennt bestimmt werden können, wie die Untersuchungen von Hrn. Lommel darthun.

Es soll nun noch in Kürze gezeigt werden, inwieweit die vorhandenen Theorien das vorliegende Beobachtungsmaterial darzustellen vermögen. Einige Tabellen der Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtungen, in Procenten ausgedrückt, werden darthun, dass dies nur mangelhaft der Fall ist.

Das Lambert'sche Gesetz.

Biscuit.

| ε | $i = 0^\circ$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---------------|---------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0° | 0 | — | + 1 | + 1 | + 8 | +10 | +10 | + 6 | + 3 |
| 10 | — | + 1 | + 1 | + 2 | + 3 | + 3 | + 5 | + 1 | + 5 |
| 20 | + 1 | + 3 | + 5 | + 6 | 0 | 0 | + 5 | + 6 | 0 |
| 30 | 0 | — 1 | + 1 | + 2 | + 4 | + 1 | + 2 | — 1 | +12 |
| 40 | 0 | — 2 | — 2 | 0 | — 2 | + 6 | + 1 | +11 | +12 |
| 50 | + 3 | + 1 | — 1 | — 2 | + 5 | + 4 | +19 | + 8 | +13 |
| 60 | — 3 | — 1 | — 2 | — 5 | —10 | +14 | +19 | +30 | +16 |
| 70 | — 9 | —18 | — 9 | — 9 | —18 | + 2 | +23 | +34 | +61 |
| 80 | —116 | —118 | —105 | —88 | —69 | —49 | —31 | +38 | +79 |

Die Annahme der Proportionalität der Lichtquantitäten mit dem Cosinus gibt also ziemlich gute Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung bei Biscuit bis ca. 70° ; schlechter wird dies bei den anderen Substanzen:

| ε | Marmor unpolirt | | | | Sandstein | | Gyps A | | Gyps B | | Schrot klein | | Schrot gross | |
|---------------|-----------------|-----|-----|-----|--------------------------|-----|--------------------------|-----|--------------------------|------|--------------------------|-----|--------------------------|------|
| | $i=0^\circ$ | 30 | 60 | 70 | $i=0^\circ$ | 45 | $i=0^\circ$ | 45 | $i=0^\circ$ | 45 | $i=0^\circ$ | 45 | $i=0^\circ$ | 45 |
| 0° | 0 | — 1 | — 5 | 0 | 0 | +12 | 0 | — 8 | 0 | + 17 | 0 | — 4 | 0 | — 24 |
| 20 | — | — | — | — | —13 | — | — 8 | — | + 8 | — | + 1 | — | — 4 | — |
| 30 | — 8 | — 5 | +12 | +15 | — | + 2 | — | —14 | — | — 24 | — 5 | —19 | — 8 | — 30 |
| 45 | —10 | — | — | — | — 7 | + 5 | — 2 | —20 | +18 | — 2 | — 2 | —40 | — 6 | — 60 |
| 60 | — 6 | — 2 | +20 | +32 | — 3 | +10 | —14 | —21 | —36 | —38 | + 3 | —68 | —14 | — 73 |
| 70 | —13 | + 2 | +34 | — | — 5 | + 3 | — 3 | —25 | —95 | —142 | + 5 | —80 | —20 | — 96 |
| i | | | | | $\varepsilon=0^\circ$ 45 | | $\varepsilon=0^\circ$ 45 | | $\varepsilon=0^\circ$ 45 | | $\varepsilon=0^\circ$ 45 | | $\varepsilon=0^\circ$ 45 | |
| 0° | — | — | — | — | 0 | — 7 | 0 | — 2 | 0 | + 18 | 0 | — 4 | 0 | — 46 |
| 20 | — | — | — | — | + 4 | — | — 4 | — | +10 | — | — 2 | — | — 5 | — |
| 30 | — | — | — | — | — | +12 | — | — 6 | — | — 2 | — | —19 | — | — 42 |
| 45 | — | — | — | — | +12 | + 5 | — 8 | —19 | +17 | — 2 | — 4 | —40 | —24 | — 60 |
| 60 | — | — | — | — | +11 | +21 | + 3 | —12 | +19 | —10 | + 1 | —68 | — 7 | — 95 |
| 70 | — | — | — | — | +18 | +20 | + 9 | —26 | — 8 | + 9 | + 1 | —80 | — 8 | —109 |
| 80 | — | — | — | — | +12 | +36 | + 2 | —50 | — 4 | + 22 | — | — | 0 | — 76 |

Man sieht daraus, dass die Abweichungen schon bei kleinen Winkeln ziemlich bedeutend sind.

Das Lommel'sche Gesetz.

| i | Biscuit $\varepsilon = 0^\circ$ | Marmor unpolirt $\varepsilon = 0^\circ$ | Sandstein $\varepsilon = 0^\circ$ | Gyps A $\varepsilon = 0^\circ$ | Gyps B $\varepsilon = 0^\circ$ | Schrot klein $\varepsilon = 0^\circ$ | Schrot gross $\varepsilon = 0^\circ$ |
|-----|------------------------------------|---|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--|--|
| 20° | - 2 | - 4 | + 2 | - 7 | + 8 | - 4 | - 8 |
| 30 | - 4 | - 5 | — | — | — | — | — |
| 40 | - 1 | -14 | — | — | — | — | — |
| 45 | — | — | +12 | - 7 | +17 | - 3 | -23 |
| 50 | - 5 | -28 | — | — | — | — | — |
| 60 | -10 | -29 | -10 | -22 | - 1 | -22 | -32 |
| 70 | -20 | -32 | - 9 | -20 | -43 | -30 | -43 |
| 80 | -22 | -33 | -22 | -36 | -46 | -64 | -40 |

Dabei ist die Albedo nach Lambert 0,4 angenommen worden, da wir es hier nur mit weissen Körpern zu thun haben und die wirklichen Albedo der benutzten Substanzen nicht kennen. Hierbei zeigt selbst Biscuit, das der Annahme für die Albedo 0,4 am besten entsprechen muss, keine wesentlich bessere Uebereinstimmung als das Lambert'sche Gesetz, bei den anderen Körpern weichen die Beobachtungen in noch viel höherem Grade ab.

Das Gesetz von Seeliger, der dasselbe allerdings nur auf Planeten mit dichten Atmosphären anwendet, zeigt ähnliche Abweichungen. Man erkennt dies schon aus der Bestimmung der Constanten k aus den Beobachtungen. Bildet man z. B. für Biscuit:

$$\frac{\cos i}{k \cos i + 1} : \frac{1}{1 + k} = b,$$

wo b die beobachtete Lichtquantität bedeutet, so erhält man für k :

$$\begin{array}{ccccccc} i = & 20^\circ & 30^\circ & 40^\circ & 50^\circ & 60^\circ & 70^\circ & 80^\circ \\ k = & 0,16 & 0,09 & 0,56 & 0,37 & 0,25 & 0,10 & 0,03. \end{array}$$

Endlich die Annahme einer einfachen Absorption:

$$e^{-\frac{k}{\cos s}} = q \cdot e^{-k}$$

gibt auch nur eine Annäherung, indem zwar die Beobachtungen an Biscuit einigermaßen gut dargestellt werden, ebenso die von Marmor, aber nicht die der anderen Flächen. Versuche ähnlicher Art mit anderen Formeln, wie:

$$Q = e^{-f \frac{1 - \cos i \cdot \cos s}{\cos i \cdot \cos s}}$$

gaben ebenfalls keine günstigeren Resultate, ausser wenn man für f ziemlich complicirte Functionen annahm, so z. B. bei Biscuit:

$$f = 0,33 \sin^4(40 + i) + 0,47 \sin^2(40 + i) \cdot \cos^2(45 + \epsilon) \\ + 0,1 \cos(45 + \epsilon) \cdot \sin i,$$

bei Gyps A: $f = 0,9 \cdot \sin^4(50 + i)$ u. s. w.

Allein solchen willkürlichen Werthsystemen kann höchstens nur eine praktische Bedeutung beikommen.

Wie man sieht, sind alle vorhandenen Formeln so beschaffen, dass Einfalls- und Austrittswinkel miteinander vertauschbar sind, ferner ist auf das Azimuth der beiden in Betracht kommenden Ebenen zu einander keine Rücksicht genommen und zeigen auch die Vergleichenungen zwischen Theorie und Beobachtungen, dass keine der aufgestellten Formeln das Phänomen der diffusen Reflexion darstellt. Nur für die Beobachtungen von Biscuit findet innerhalb gewisser Grenzen ziemlich gute Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtungen statt, weshalb auch in einzelnen Fällen die Formeln zur praktischen Berechnung der Helligkeit des diffus reflectirten Lichtes angewandt werden können.

Ehe indess eine Theorie dieser Erscheinungen vollständig entwickelbar und prüfbar ist, müssen über die oben angedeuteten Punkte noch Untersuchungen angestellt werden, durch welche die miteinander verbundenen sehr verwickelten Phänomene getrennt werden.

Zum Schlusse erfülle ich noch eine angenehme Pflicht, indem ich Hrn. Director Prof. H. C. Vogel in Potsdam und Hrn. Prof. E. Wiedemann in Erlangen meinen besten Dank ausspreche. Ersterem für die ausserordentliche Bereitwilligkeit, mit der er mir nicht nur die vorhandenen Instrumente des astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam zur Verfügung stellte, sondern auch einen kostspieligen Apparat für diese Untersuchungen bauen liess, letzterem für die reichliche Unterstützung und Anregung, die er mir bei der Anstellung weiterer Versuche und bei der Bearbeitung vorliegender Arbeit angedeihen liess.

Erlangen, physikal. Institut, im Februar 1888.

X. Ueber das Leukoskop; von Eugen Brodhun.

(Hierzu Taf. VIII Fig. 1–3.)

Die Ergebnisse der mit dem von Hrn. Geheimrath v. Helmholtz construirten Leukoskop angestellten Untersuchungen sind rein empirisch gewonnen; ein Zusammenhang zwischen ihnen und dem Wesen unserer Farbenempfindung ist bisher nicht angegeben worden. In dem Folgenden will ich deshalb versuchen, die gefundenen Resultate aus der Natur unserer Farbenempfindung zu erklären und auf diese Weise einen tieferen Einblick in die Wirkungsweise des Instrumentes zu gewähren. Anknüpfen werde ich diesen Versuch an eine eingehende experimentelle Untersuchung der Leukoskopeinstellungen der Farbenblinden.

Ich schicke zunächst eine kurze Beschreibung des Apparates voraus, indem ich in Bezug auf Einzelheiten auf frühere ausführlichere Darstellungen¹⁾ verweise.

Durch das astronomische Fernrohr $L_3 L_4$ (Fig. 1) erblickt man den verticalen Spalt R mit Hülfe der Linse L_2 , in deren Brennpunkt derselbe steht. Zwischen L_2 und R liegt ein Kalkspathrhomboëder S_2 mit horizontaler optischer Axe, sodass man zwei Spaltbilder aus senkrecht zu einander polarisirtem Licht sieht. Durch Verengern oder Erweitern des Spaltes kann man bewirken, dass die Bilder unmittelbar nebeneinander fallen. Zwischen L_3 und L_2 ist das um die Axe des Instrumentes drehbare Nicol'sche Prisma N mit Theilkreis angebracht; zwischen N und L_2 kann man eine rechtsdrehende Quarzplatte von beliebiger Dicke (etwa bis 25 mm) einschalten. Symmetrisch zu S_2 mit Bezug auf die Spaltebene liegt ein zweiter S_2 gleicher Kalkspath S_1 ²⁾, hinter

1) A. König, Verhandl. der physik. Ges. in Berlin 1882. Nr. 2. — Wied. Ann. 17. p. 990. 1882. — Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1883. p. 20. — Diro Kitao, Zur Farbenlehre. Inauguraldiss. Göttingen 1878. — Abhandl. des Tōkiō Daigaku (Universität zu Tōkiō) 1885. N. 12.

2) Ueber den Zweck des Kalkspaths S_1 siehe die citirten Abhandlungen von A. König.

diesem ein Foucault'sches Prisma F mit Theilkreis, und weiter die Linse L_1 , deren Brennpunkt in R liegt, sodass sie hier das Bild eines fernen Gegenstandes (Lichtquelle), auf den das Instrument gerichtet ist, entwirft.

Das durch den Apparat blickende Auge sieht somit zwei complementär gefärbte Spaltbilder, die Farbe hängt von der Quarzdicke und der Stellung des Nicols N , die relative Intensität von der Stellung des Prismas F ab.

Wir wollen die Erregung, die die Netzhaut erfährt, zunächst für das linke Feld in mathematischer Form ¹⁾ ausdrücken.

Als Nullpunkt sowohl von F wie von N nehmen wir die Stellung, in der bei ausgeschaltetem Quarz jedes Prisma für sich das linke Spaltbild auslöscht. Nun stehe Prisma F auf 90° , N auf 0° . Ein Lichtstrahl von der Wellenlänge λ , der mit der Intensität Eins F verlassen hat, geht dann ungeschwächt durch die Kalkspathe hindurch; seine Polarisationssebene wird durch den Quarz von D mm Dicke um $D \varrho(\lambda)^\circ$ gedreht, wenn $\varrho(\lambda)^\circ$ den Winkel bezeichnet, um den ein Quarz von 1 mm Stärke dreht, und verlässt daher das Nicol'sche Prisma N mit der Intensität:

$$\sin^2 D \varrho(\lambda).$$

Wird dieses Prisma um β° nach rechts (in der Richtung des Uhrzeigers) gedreht, so ist die Intensität des Strahls:

$$\sin^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\},$$

und wenn das zweite Nicol'sche Prisma (F) anstatt auf 90° auf α° gestellt wird, infolge der Zerlegung durch die Kalkspathe:

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\}.$$

Bezeichnen nun $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $V(\lambda)$ die Erregungen, welche die drei Grundempfindungen eines trichromatischen Farbensystems (nach der Young-Helmholtz'schen Theorie) durch unseren Lichtstrahl, bevor er durch die Kalkspathe, den Quarz und das Nicol N hindurchgegangen ist, erfahren haben würden, so sind diese Erregungen, nachdem er das Leukoskop passiert hat:

1) Ich benutze dieselben Bezeichnungen, die A. König in den citirten Abhandlungen gewählt hat.

$$\begin{aligned} R(\lambda) \sin^2 \alpha \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} \\ G(\lambda) \sin^2 \alpha \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} \\ V(\lambda) \sin^2 \alpha \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \}. \end{aligned}$$

Nehmen wir anstatt eines homogenen einen unzerlegten Lichtstrahl, so wird diese Erregung ausgedrückt sein durch:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha \int R(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda \\ \sin^2 \alpha \int G(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda \\ \sin^2 \alpha \int V(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda, \end{cases}$$

wo $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $V(\lambda)$ natürlich auch von der Art der Lichtquelle abhängen. Derselbe Lichtstrahl übt, scheinbar vom rechten Felde ausgehend, auf eine andere Stelle der Netzhaut desselben Auges eine Erregung aus, die ausgedrückt ist durch:

$$(2) \quad \begin{cases} \cos^2 \alpha \int R(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda \\ \cos^2 \alpha \int G(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda \\ \cos^2 \alpha \int V(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda. \end{cases}$$

In den letzten sechs Ausdrücken sind drei variable Grössen: α , β , D . Bei der Construction des Apparates wurde die Erwartung gehegt¹⁾, man könne diese drei Grössen so bestimmen, dass die Gleichungen:

$$(3) \quad \begin{cases} \sin^2 \alpha \int R(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda = \cos^2 \alpha \int R(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda, \\ \sin^2 \alpha \int G(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda = \cos^2 \alpha \int G(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda, \\ \sin^2 \alpha \int V(\lambda) \sin^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda = \cos^2 \alpha \int V(\lambda) \cos^2 \{ D \varrho(\lambda) - \beta \} d\lambda \end{cases}$$

erfüllt sind. Es müssen dann beide Theile des Lichtstrahles gleich an Farbe und Intensität erscheinen. Die Farbe muss, da beide Felder immer complementär gefärbt sind, gleich der der Lichtquelle sein. Ist diese eine gleichförmige weisse Fläche, so müssen beide Felder weiss erscheinen. Der Name „Leukoskop“ ist nach dieser Eigenschaft des Instrumentes gewählt.

Für das dichromatische Auge sind, da es nur zwei Grundempfindungen (sie seien $W(\lambda)$ und $K(\lambda)$) besitzt, auch nur zwei Gleichungen zur Herstellung der Gleichheit zu befriedigen:

1) s. H. v. Helmholtz, Verhandl. d. physik. Ges. in Berlin. 1882. Nr. 2.

$$(4) \begin{cases} \sin^2 \alpha f W(\lambda) \sin^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha f W(\lambda) \cos^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda, \\ \sin^2 \alpha f K(\lambda) \sin^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha f K(\lambda) \cos^2 \{D \varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda. \end{cases}$$

Wir können also hier über die eine der drei Variablen, etwa D , beliebig verfügen, und es folgt dann, dass der Dichromat im Stande sein muss, bei jeder Quarzdicke α und β so zu bestimmen, dass er vollständige Gleichheit der Felder erhält.

Die Resultate der von A. König¹⁾ und von Dirotta²⁾ mit dem Leukoskop angestellten Untersuchungen sind im wesentlichen folgende:

1. Vollständige Farbengleichheit erhält der Trichromat in keinem Falle, dagegen

2. angenäherte Gleichheit durch passende Stellung der beiden Nicol'schen Prismen bei jeder Quarzdicke von 9 mm an. Bei diesen Einstellungen, die sich mit grosser Genauigkeit ausführen lassen, ist das eine Feld etwas gelblich, das andere etwas bläulich gefärbt.

3. Die Stellung des Nicols N ist abhängig von der Farbe der benutzten Lichtquelle, und zwar wird der Winkel α um so grösser, je mehr kurzwellige Strahlen das Licht relativ enthält. Das Leukoskop ist somit sehr brauchbar zu photometrischen Untersuchungen, die sich auf die Vergleichung von Lichtquellen in Bezug auf ihre innere Zusammensetzung beziehen.

4. Der Dichromat erhält bei jeder Quarzdicke vollkommene Gleichheit beider Felder, zwar stellt (bei gleicher Quarzstärke)

5. der sogenannte Grünblinde stellt anders als der sogenannte Rothblinde ein. Der Apparat eignet sich also vorzüglich zur Diagnose der Farbenblindheit.²⁾

I. Experimentelles.

Es schien von praktischem, wie theoretischem Interesse, genauer zu untersuchen, in welcher Weise die Einstel-

1) Siehe die citirten Abhandlungen.

2) Dies veranlasste A. König zur Construction des Ophthalmoleukoskops; s. A. König, Centralbl. f. prakt. Augenheilk. (red. J. Hirschberg.) Dec. 1884. Verhandl. d. physik. Ges. 1884. Nr. 11.

lungen von α und β für dieselbe Lichtquelle beim Rothblinden, wie beim Grünblinden Functionen der Quarzdicke D sind. Ich habe solche Untersuchungen auf Vorschlag von Hrn. Dr. A. König zunächst an meinem eigenen (grünblinden) Farbensystemdurchgeführt, indem ich als Lichtquelle einmal Gaslicht (Argandbrenner) und zweitens Sonnenlicht (den dicht grau bewölkten Himmel) benutzte.

Für die ersteren Einstellungen zog ich es vor, nicht das Bild der Gasflamme zu beobachten, sondern unter Herausnahme der letzten Linse L_1 den Spalt direct zu beleuchten. Auf diese Weise erhielt ich zwei gleichmässig gefärbt erscheinende Felder; fremdes Licht wurde sorgfältig ausgeschlossen. Die Quarzdicke wurde von Millimeter zu Millimeter verändert, und zwar von 1 bis 20 mm. Hier war das Einstellen schon recht schwierig und weiter fortzuschreiten kaum möglich, da bei so bedeutender Stärke des Quarzes die Felder bei keiner Stellung von β wesentliche Färbung zeigen.

Bei jeder Quarzdicke wurden zwölf Einstellungen von β und α gemacht, von β in jedem Quadranten drei. Man erkennt nämlich bei Betrachtung der Gleichungen (3) und (4) leicht, dass in jedem Quadranten von β eine Einstellung möglich ist. Denn zunächst ändern sich die Werthe nicht, wenn man α ungeändert und β um 180° wachsen lässt. Ferner gehen, wenn man β durch $\beta + 90^\circ$ und α durch $90^\circ - \alpha$ ersetzt, die sinus in die cosinus und die cosinus in die sinus über, also die rechten Seiten in die linken und die linken in die rechten. Die Gleichheit bleibt mithin ungestört, aber die Lichtstrahlen, welche in dem einen Quadranten das rechte Feld aussandte, sendet in dem folgenden das linke aus, und umgekehrt. Bei den Einstellungen der Trichromaten zeigt sich dies daran, dass dasjenige Feld bläulich wird, welches vorher gelblich war, und umgekehrt.

Die folgende Tabelle gibt die Werthe α und β , die also das Mittel aus je zwölf Ablesungen sind; Fig. 2 enthält diese Resultate in Curvenform (b und B_1), indem die \bar{D} als Abscissen, die α und β als Ordinaten eingetragen sind. Bei geringen Quarzdicken sind bei den Einstellungen auf Gleichheit beide Felder sehr dunkel, und zwar um so dunkler, je geringer

die Quarzdicke ist; die Werthe von β werden immer kleiner, die von α immer grösser. Als Grenze für $D = 0$ wird also vollständige Dunkelheit, ausgedrückt durch $\beta = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, anzunehmen sein. Diese Werthe geben also die Ausgangspunkte unserer Curven.

Beobachter: E. Br. (grbl.) Lichtquelle: Gaslicht (Argand).

| D | α | β | D | α | β |
|------|----------|---------|-------|----------|---------|
| 0 mm | 90,0° | 0° | 11 mm | 41,9° | 285,9° |
| 1 " | 79,9 | 29,9° | 12 " | 46,5 | 295,9 |
| 2 " | 73,0 | 59,9 | 13 " | 47,7 | 312,4 |
| 3 " | 65,2 | 88,6 | 14 " | 47,1 | 332,3 |
| 4 " | 57,3 | 118,8 | 15 " | 46,9 | 352,9 |
| 5 " | 51,1 | 146,6 | 16 " | 45,9 | 373,5 |
| 6 " | 45,6 | 174,4 | 17 " | 45,4 | 394,2 |
| 7 " | 40,2 | 203,0 | 18 " | 45,2 | 413,3 |
| 8 " | 37,4 | 228,4 | 19 " | 45,4 | 432,4 |
| 9 " | 36,3 | 253,2 | 20 " | 45,2 | 452,6 |
| 10 " | 37,3 | 273,5 | | | |

Die Curven der β steigt, wie man sieht, beständig. Auf fallend ist bei ihr die zweimalige Umbiegung zwischen $D = 10$ mm und $D = 12$ mm. Von $D = 0$ mm bis $D = 4$ mm verläuft sie annähernd linear, von hier bis $D = 10$ mm wird sie ein wenig concav nach der Abscissenaxe zu, von $D = 13$ mm an ist der Verlauf wieder wesentlich geradlinig. Sehr entsprechend verhält sich die Curve der α . Sie hat ebenfalls eine doppelte Einknickung zwischen $D = 10$ mm und $D = 12$ mm; von $D = 0$ mm bis $D = 9$ mm fällt sie beständig, ein wenig convex gegen die Abscissenaxe, von hier bis $D = 13$ mm steigt sie und verläuft dann annähernd parallel der Abscissenaxe bei $\alpha = 45^\circ$.

Die Einstellungen bei Wolkenlicht wurden an Tagen ausgeführt, an denen der Himmel sich möglichst gleichmässig grau gefärbt zeigte; sie geschahen theilweise mit Hülfe der Linse L_1 , theilweise ohne dieselbe. Ein Unterschied war nicht zu constatiren. Die folgende Tabelle enthält die Zahlen für α und β , die sich bei den Quarzdicken 1 mm bis 18 mm ergaben; jede Zahl ist das Mittel aus acht Beobachtungen; es wurden in jedem Quadranten zwei Ablesungen ausgeführt. Fig. 2 (B_2) enthält die Curve für die β , diejenige

für die α wurde nicht gezeichnet, weil sie, wie auch eine Vergleichung der Tabellen ergibt, fast vollständig mit der Curve der α für Gaslicht zusammenfällt. Man darf daraus aber keineswegs den Schluss ziehen, dass die Einstellung der α überhaupt von der Lichtquelle unabhängig ist. Ich habe dies direct durch Benutzung farbiger Gläser untersucht. Ausserdem wird es auch aus der weiter unten folgenden Discussion der Curven hervorgehen.

Beobachter: E. Br. (grbl.)

Lichtquelle: Wolkenlicht.

| D | α | β | D | α | β |
|-------|----------|---------|---------|----------|---------|
| 0 mm | 90,0° | 0° | 10,5 mm | 38,3° | 306,8° |
| 1 " | 78,9 | 32,5° | 11 " | 42,6 | 306,6 |
| 2 " | 72,4 | 64,1 | 11,5 " | 47,9 | 305,0 |
| 3 " | 65,0 | 93,9 | 12 " | 48,5 | 306,9 |
| 4 " | 56,9 | 127,2 | 12,5 " | 49,3 | 313,5 |
| 5 " | 50,3 | 156,9 | 13 " | 49,1 | 323,8 |
| 6 " | 45,3 | 187,8 | 14 " | 47,9 | 348,2 |
| 7 " | 40,0 | 218,95 | 15 " | 46,5 | 370,2 |
| 8 " | 38,2 | 246,0 | 16 " | 45,5 | 392,8 |
| 9 " | 35,6 | 277,9 | 17 " | 44,6 | 414,7 |
| 9,5 " | 35,6 | 289,5 | 18 " | 44,8 | 488,4 |
| 10 " | 36,6 | 301,0 | | | |

Der Charakter der Curve der β ist hier, wie man erkennt, derselbe wie beim Gaslicht. Die Einknickungen bei $D = 10$ mm und $D = 12$ mm sind hier viel stärker ausgebildet, derartig dass die Curve sogar eine kurze Strecke fällt, während sie im übrigen immer ziemlich steil ansteigt. Ich habe wegen dieser besonderen Unregelmässigkeit auch die Werthe von α und β für 9,5 mm, 10,5 mm, 11,5 mm, 12,5 mm Quarzdicke bestimmt.

Zu beachten ist noch, dass die Curve der β für Sonnenlicht viel steiler als die für Gaslicht ansteigt, dass bei jeder Quarzdicke β für Wolkenlicht grösser als für Lampenlicht gefunden wird. Es stimmt dies überein mit den Einstellungen des normalen Auges.

Es war offenbar wünschenswerth, dass derartige Einstellungen, wie ich sie für das grünblinde Auge ausgeführt hatte, auch von einem Rothblinden durchgeführt wurden. Sehr erfreut war ich daher, dass ein College, der dieser

zweiten Gruppe der Dichromaten angehört, Hr. Dr. Ritter, so gütig war, sich mir für diesen Zweck zur Verfügung zu stellen.

Als Lichtquelle wurde wieder der Argandbrenner benutzt und in genau derselben Weise wie bei meinen Beobachtungen verfahren; nur die Anzahl der Gleichstellungen bei einer Quarzstärke reducirte ich wesentlich. Bei den geringeren Quarzdicken, wo die Einstellungen sehr sicher sind, wurden meist nur zwei, bei den höheren (von 10 mm an) dagegen vier Einstellungen ausgeführt.

Die folgende Tabelle und die Curven R (für β) und r (für α) in Fig. 2 geben die Resultate.

Beobachter Hr. Dr. R. (rbl.) Lichtquelle: Gaslicht (Argand).

| D | α | β | D | α | β |
|------|----------|---------|------|----------|---------|
| 0 mm | 90° | 0° | 9 mm | 39,4° | 269,0° |
| 1 " | 80,7 | 30,4° | 10 " | 37,6 | 295,4 |
| 2 " | 75,2 | 62,3 | 11 " | 38,8 | 315,9 |
| 3 " | 67,8 | 91,3 | 12 " | 40,6 | 336,2 |
| 4 " | 60,4 | 123,6 | 13 " | 43,0 | 355,3 |
| 5 " | 54,6 | 151,1 | 14 " | 45,2 | 372,3 |
| 6 " | 50,0 | 182,4 | 15 " | 45,4 | 391,2 |
| 7 " | 47,0 | 213,1 | 17 " | 45,4 | 434,7 |
| 8 " | 41,5 | 240,2 | 20 " | 45,0 | 497,5 |

Man erkennt sofort, dass die Gestalt der Curven R und r nicht wesentlich von den mit B_1 und b bezeichneten abweicht. r zeigt genau den gleichen Typus wie b , nur ist die Einknickung schwächer und ein wenig nach den hohen Quarzstärken verschoben. Die Curve fällt, etwas convex nach der Abscissenaxe hin, bis $D = 10$ mm, steigt dann wieder und verläuft schliesslich von $D = 14$ mm ab genau wie b parallel der Abscissenaxe bei 45°. Bei der Curve R ist eine Einknickung nur sehr schwach zu constatiren (bei 13 mm); sie ist entsprechend wie bei der Curve r ein wenig nach oben verschoben.

Zu bemerken ist, dass die Curven B_1 und R vom Anfangspunkt aus divergiren, und zwar R steiler verläuft, dass also überall der Rothblinde bei gleicher Quarzdicke für β anders als der Grünblinde, und zwar einen grösseren Winkel einstellt.

Für Sonnenlicht hat Hr. Dr. Ritter keine Einstellungen auf Gleichheit gemacht.

II. Discussion.

Ich will versuchen, die experimentell gefundenen Curven zu discutiren.

Man kann einen Einblick in die Wirkungsweise des Leukoskops gewinnen durch spectrale Zerlegung des Lichts der beiden Felder. Man sieht dann bekanntlich das Spectrum durchzogen von dunklen Banden, die durch Vergrößerung des Winkels β nach dem violetten Ende hin verschoben werden, die um so zahlreicher werden, je stärker die Quarzplatte ist, und deren Abstand nach dem blauen Ende hin abnimmt. Wo die Zerlegung des linken Feldes Auslöschung zeigt, zeigt die des rechten volle Intensität, und umgekehrt. Auf diesem Wege wird aber schwerlich der Trichromat weder die Bedingungen auffassen können, die bei den Leukoskopeinstellungen für ein farbenblindes Auge zu erfüllen sind, noch die Art und Weise, wie sie erfüllt werden. Deshalb will ich einen anderen Weg einschlagen und die Discussion ausführen auf Grund der Gleichungen (3) und (4) unter Benutzung einer der für $\varrho(\lambda)$ aufgestellten Formeln und der von A. König und C. Dieterici¹⁾ bestimmten Intensitätsvertheilung der Elementarfarbenempfindungen im Spectrum.

In Bezug auf die Benutzung der letzteren muss ich einiges voraufschieken. Die Werthe $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $V(\lambda)$, $W(\lambda)$, $K(\lambda)$ in den Formeln (3) und (4) bezeichnen natürlich die theoretischen Grundempfindungen und nicht die Elementarempfindungen. Die letzteren können unter der Annahme, dass die Gesetze von der Farbenmischung Giltigkeit haben (und unter dieser Annahme sind die Elementarfarbencurven überhaupt bestimmt), noch nicht näher bekannte lineare homogene Functionen der ersteren seien. Die Gleichungen (3) und (4) lassen indessen sofort erkennen, dass sie ebenso wie für die Grundempfindungen für lineare homogene Functionen derselben, also auch für die Elementarempfindungen erfüllt sein müssen. Wir können also hier auch die letzteren unter den Zeichen $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $V(\lambda)$, $W(\lambda)$, $K(\lambda)$ verstehen. Um-

1) Sitzungsber. d. Berl. Akad. vom 29. Jnli 1886.

gekehrt folgt daraus, dass man auch mit dem Leukoskop keine Schlüsse auf die Grundempfindungen machen kann.

Ferner: Die Regeln der Farbenmischung sind mindestens für das farbenblinde Auge (wie ich später ausführlich nachweisen werde)¹⁾ nur bei höheren Intensitäten einigermassen richtig. Bevor wir also die Farbencurven anwenden, müssen wir uns überzeugen, dass sie einen für unseren Zweck ausreichenden Grad von Genauigkeit besitzen. Ich habe deshalb für das grünblinde Auge und Gaslicht (indem ich $\int W(\lambda) d\lambda = \int K(\lambda) d\lambda = 1000$ setzte) die vier einzelnen Ausdrücke der Gleichungen (4), die ja sämmtlich gleichen Werth haben müssen, für verschiedene Quarzdicken berechnet. Die folgende Tabelle gibt die Resultate; hinter jeder Zahl steht die Abweichung vom Mittel aus den vier für eine Quarzdicke gefundenen Werthen. In der Ueberschrift der Colonnen ist abgekürzt: $D\varrho(\lambda) - \beta = P$.

| D | $\sin^2 \alpha \int W(\lambda) \sin^2 P d\lambda$ | Abweichung vom Mittel | $\cos^2 \alpha \int W(\lambda) \cos^2 P d\lambda$ | Abweichung vom Mittel |
|------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| 3 mm | 147 | 5% | 144 | 2% |
| 5 " | 247 | 5 " | 233 | 1 " |
| 10 " | 237 | 3 " | 222 | 3 " |
| 15 " | 258 | 4 " | 239 | 3 " |

| D | $\sin^2 \alpha \int K(\lambda) \sin^2 P d\lambda$ | Abweichung vom Mittel | $\cos^2 \alpha \int K(\lambda) \cos^2 P d\lambda$ | Abweichung vom Mittel |
|------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| 3 mm | 118 | 16% | 150 | 7% |
| 5 " | 203 | 14 " | 259 | 12 " |
| 10 " | 230 | 0 " | 232 | 1 " |
| 15 " | 238 | 4 " | 255 | 3 " |

Die Mittelwerthe sind für:

$$D = \begin{matrix} 3 & 5 & 10 & 15 \text{ mm} \\ 140 & 235 & 230 & 248. \end{matrix}$$

Mit der Uebereinstimmung der aus der W -Curve sich ergebenden Zahlen wird man zufrieden sein können, wenn man die bedeutende Anzahl der möglichen Fehlerquellen in Betracht zieht. Sieht man ganz ab von den Fehlern, die im Apparat selbst stecken können (Fehler der Theilungen, des Quarzcompensators), so sind die Beobachtungen von α , von β , die Nullpunktbestimmungen der Nicols, ferner

1) Vgl. A. König, Sitzungsber. d. Berl. Acad. vom 31. März 1887.

die Bestimmungen der Quarzstärke mit einem gewissen Fehler behaftet. Schiebt man alle diese Fehler auf die Beobachtungen von α , so ergibt sich für:

$D = 3$ mm ein Fehler von $0^{\circ} 15'$

$D = 5$ " " " " $0 \ 48$

$D = 10$ " " " " $0 \ 54$

$D = 15$ " " " " $0 \ 57$;

die Abweichung erreicht also in keinem Falle einen Grad. Die W -Curve wird man mithin für hinreichend sicher erachten müssen.

Weniger erfreulich sind die aus der K -Curve gewonnenen Werthe. Rechnet man auch hier alle möglichen Fehler der Beobachtung von α zu, so findet man aus der Rechnung für:

$D = 3$ mm einen Fehler von $2^{\circ} 32'$

$D = 5$ " " " " $3 \ 22$

$D = 10$ " " " " $0 \ 6$

$D = 15$ " " " " $1 \ 0$.

Die Abweichungen, die sich für die beiden ersten Quarzstärken ergeben, sind nun offenbar zu gross, als dass sie ganz den Leukoskopbeobachtungen zugeschoben werden könnten, indessen kann auch hier die Uebereinstimmung für unseren Zweck als ausreichend bezeichnet werden, da wir hier ja nicht eigentlich mit den Farbencurven rechnen, sondern sie nur benutzen wollen, um uns die Wirkungsweise des Leukoskops zu veranschaulichen.

Die Werthe der Intensitätsvertheilung der Elementarfarbenempfindungen für das Interferenzgaslichtspectrum sind für das grünblinde Auge:

| λ | W | K | λ | W | K |
|--------------|-------|-------|--------------|-------|--------|
| 720 $\mu\mu$ | 0,140 | — | 545 $\mu\mu$ | 4,833 | 0,884 |
| 700 " | 0,423 | — | 535 " | 3,610 | — |
| 685 " | 0,789 | — | 530 " | — | 1,732 |
| 670 " | 1,477 | — | 515 " | 1,630 | 3,552 |
| 660 " | 2,381 | — | 500 " | 0,659 | 5,903 |
| 640 " | 5,176 | — | 487 " | 0,264 | 9,780 |
| 620 " | 8,586 | 0,071 | 475 " | 0,103 | 14,023 |
| 605 " | 9,814 | 0,348 | 465 " | 0,032 | 14,410 |
| 590 " | 9,553 | 0,532 | 450 " | — | 11,879 |
| 575 " | 8,207 | 0,520 | 438 " | — | 7,358 |
| 560 " | 6,527 | 0,647 | | | |

wo wieder die Einheiten von K und W so bestimmt sind, dass $\int W(\lambda) d\lambda = \int K(\lambda) d\lambda = 1000$ ist. In Fig. 3 ist dasselbe in Curvenform eingetragen (die Maxima sind mit W und K bezeichnet).

Für die Berechnung von $\varrho(\lambda)$ benutzte ich die von Soret und Sarasin¹⁾ angegebene Formel:

$\varrho(\lambda) = \frac{B}{\lambda^2 10^6} + \frac{C}{\lambda^4 10^{12}}$, worin $B = 7,111\,540$, $C = 0,148\,061$ ist, wenn man λ in $\mu\mu = 10^{-6}$ mm ausdrückt.

Die folgende Seite enthält eine Tabelle, in der die Werthe für $\varrho(\lambda)$ für jede dritte Wellenlänge innerhalb des sichtbaren Theiles des Spectrums angegeben sind.

Wir wollen die Discussion anknüpfen an die für das grünblinde Auge bei Gaslicht gefundenen Curven B_1 und b .

Die Formeln (4) können wir schreiben, indem wir für $\sin^2 \alpha$ einführen $1 - \cos^2 \alpha$:

$$\int W(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha \int W(\lambda) d\lambda$$

$$\int K(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha \int K(\lambda) d\lambda,$$

oder dafür:

$$(5) \quad \frac{\int W(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda}{\int W(\lambda) d\lambda} = \frac{\int K(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda}{\int K(\lambda) d\lambda} = \cos^2 \alpha.$$

Da:

$$(6) \quad \int W(\lambda) d\lambda = \int K(\lambda) d\lambda (= 1000)$$

gesetzt ist, so haben wir:

$$(7) \quad \int W(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \int K(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda.$$

Hierdurch wird ausgedrückt, dass im linken Felde die Erregung W gleich der Erregung K , d. h. dass das linke Feld weiss (und zwar hier in dem Weiss des Lampenlichtes) gefärbt ist. Da wir wissen (oder indem wir (6) minus (7) bilden, aus der Gleichung ersehen), dass dann stets auch das rechte Feld weisse Farbe zeigt, so genügt es für die Discussion der Curve β , die letzte Gleichung zu betrachten. Dem Verschwinden des sinus entspricht bei der spectralen Zerlegung die vollständige Auslöschung durch das Nicol'sche Prisma N , dem Werth 1 des sinus entsprechen die Stellen, wo das Licht sich ungeschwächt zeigt.

1) J. L. Soret u. E. Sarasin, *Compt. rend.* 83, p. 318. 1876.

Tabelle für $\varrho(\lambda)$.

| λ | $\varrho(\lambda)$ | λ | $\varrho(\lambda)$ | λ | $\varrho(\lambda)$ | λ | $\varrho(\lambda)$ |
|--------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------------|
| 740 $\mu\mu$ | 13,48° | 650 $\mu\mu$ | 17,66° | 560 $\mu\mu$ | 24,19° | 470 $\mu\mu$ | 35,22° |
| 737 " | 13,59 | 647 " | 17,83 | 557 " | 24,46 | 467 " | 35,72 |
| 734 " | 13,71 | 644 " | 18,01 | 554 " | 24,74 | 464 " | 36,22 |
| 731 " | 13,83 | 641 " | 18,19 | 551 " | 25,03 | 461 " | 36,74 |
| 728 " | 13,95 | 638 " | 18,36 | 548 " | 25,32 | 458 " | 37,26 |
| 725 " | 14,07 | 635 " | 18,55 | 545 " | 25,62 | 455 " | 37,80 |
| 722 " | 14,18 | 632 " | 18,73 | 542 " | 25,92 | 452 " | 38,38 |
| 719 " | 14,31 | 629 " | 18,92 | 539 " | 26,23 | 449 " | 38,91 |
| 716 " | 14,43 | 626 " | 19,11 | 536 " | 26,54 | 446 " | 39,49 |
| 713 " | 14,56 | 623 " | 19,30 | 533 " | 26,86 | 443 " | 40,08 |
| 710 " | 14,69 | 620 " | 19,50 | 530 " | 27,20 | 440 " | 40,68 |
| 707 " | 14,82 | 617 " | 19,70 | 527 " | 27,53 | 437 " | 41,30 |
| 704 " | 14,95 | 614 " | 19,90 | 524 " | 27,86 | 434 " | 41,93 |
| 701 " | 15,08 | 611 " | 20,11 | 521 " | 28,21 | 431 " | 42,57 |
| 698 " | 15,22 | 608 " | 20,32 | 518 " | 28,56 | 428 " | 43,23 |
| 695 " | 15,35 | 605 " | 20,53 | 515 " | 28,91 | 425 " | 43,91 |
| 692 " | 15,50 | 602 " | 20,75 | 512 " | 29,28 | 422 " | 44,60 |
| 689 " | 15,64 | 599 " | 20,97 | 509 " | 29,66 | 419 " | 45,31 |
| 686 " | 15,78 | 596 " | 21,19 | 506 " | 30,03 | 416 " | 46,03 |
| 683 " | 15,92 | 593 " | 21,42 | 503 " | 30,42 | 413 " | 46,78 |
| 680 " | 16,07 | 590 " | 21,65 | 500 " | 30,82 | 410 " | 47,55 |
| 677 " | 16,22 | 587 " | 21,89 | 497 " | 31,22 | 407 " | 48,33 |
| 674 " | 16,38 | 584 " | 22,12 | 494 " | 31,63 | 404 " | 49,13 |
| 671 " | 16,53 | 581 " | 22,37 | 491 " | 32,05 | 401 " | 49,96 |
| 668 " | 16,68 | 578 " | 22,62 | 488 " | 32,47 | 398 " | 50,80 |
| 665 " | 16,84 | 575 " | 22,87 | 485 " | 32,91 | 395 " | 51,66 |
| 662 " | 17,00 | 572 " | 23,12 | 482 " | 33,35 | 392 " | 52,55 |
| 659 " | 17,15 | 569 " | 23,38 | 479 " | 33,80 | 389 " | 53,47 |
| 656 " | 17,33 | 566 " | 23,64 | 476 " | 34,27 | 386 " | 54,40 |
| 653 " | 17,49 | 563 " | 23,91 | 473 " | 34,74 | 383 " | 55,36 |
| | | | | | | 380 " | 56,35 |

In Fig. 3 sind auf der Abscissenaxe die λ (in $\mu\mu$), als Ordinaten erstens die Werthe von W und K und zweitens (im zehnfachen Maassstabe, so dass 1 = 50 mm ist), die von $\sin^2\{D\varrho(\lambda) - \beta\}$ für verschiedene Quarzdicken eingetragen (für $D = 3, 5, 10, 15$ mm).

Für $D = 1$ mm liegt $D\varrho(\lambda)$ zwischen 13,5 und 50°; es kann also der sinus nur einmal 0 werden für einen Werth von β , der zwischen 13,5 und 50° liegt. Wenn nun durch Multiplication mit $\sin^2(D\varrho(\lambda) - \beta)$ die Ordinaten der Curven W und K so verkleinert werden sollen, dass gleiche Flächenstärken übrig bleiben, so ist es klar, dass das Minimum der \sin^2 -Curve in der Nähe des Schnittpunktes beider Curven (des neutralen Punktes) liegen muss. In der

That findet es sich nach der Einstellung bei der Wellenlänge $507 \mu\mu$. Der neutrale Punkt für Gaslicht liegt etwa bei $\lambda = 520 \mu\mu$. Dass das Minimum der \sin^2 -Curve weiter nach dem blauen Ende des Spectrums hin liegt, rührt von dem sehr schnellen Anwachsen der Werthe von $\varrho(\lambda)$ an diesem Ende her.

Anfangs verläuft die Curve B_1 annähernd linear, also β/D behält annähernd denselben Werth. Das heisst nichts anderes als: mit veränderter Quarzdicke muss β so verschoben werden, dass das Minimum der \sin^2 -Curve an der alten Stelle bleibt. Es ist dies ja auch leicht ersichtlich, da zunächst durch Verstärkung der Quarzplatte nichts weiter geschieht, als dass alle Ordinaten der \sin^2 -Curve wachsen. Die Flächen:

$$\int W(\lambda) \sin^2(D\varrho(\lambda) - \beta) d\lambda \text{ und } \int K(\lambda) \sin^2(D\varrho(\lambda) - \beta) d\lambda$$

werden mithin grösser, bleiben aber gleich.

Eine geringe Aenderung im Verlauf der Curve tritt dadurch ein, dass zwischen 4 und 5 mm Quarzdicke rechts ein Maximum der \sin^2 -Curve in den sichtbaren Theil des Spectrums tritt. (Für $D = 5$ mm liegt ein Maximum bei $\lambda = 411 \mu\mu$, während am linken Ende bei $\lambda = 740 \mu\mu$ der Winkel $D\varrho(\lambda) - \beta$ erst 79° ist.) Nehmen wir nun an, wir verstärken den Quarz und verschieben dabei β immer so, dass das Minimum an der alten Stelle bleibt, so wachsen zwar auf der linken Seite die Werthe von $\sin^2(D\varrho(\lambda) - \beta)$ überall weiter, auf der rechten aber nur bis zum Maximum und werden jenseits desselben kleiner. Es ist klar, dass sich hierdurch die Fläche der $W(\lambda)$ mehr als die der $K(\lambda)$ vergrössert, und dass, um die Gleichheit wieder herzustellen, die \sin^2 -Curve nach links verschoben werden muss. Diese allmähliche Verschiebung des Minimums nach links, die naturgemäss mit der Quarzdicke, d. h. je näher das Maximum dem Minimum kommt, zunimmt, charakterisirt den Verlauf der Curve der β bis zu $D = 10$ mm. Es wird dann β/D , welcher Werth den Ort des Minimums angibt, mit wachsender Quarzdicke kleiner; die Curve weicht von den Geraden nach der Abscissenaxe hin ab. Für:

$D = 4$ mm ist $\frac{\beta}{D} = 29,7^\circ$, das Minimum ist also bei $\lambda = 509 \mu\mu$,

$D = 7$ " " $\frac{\beta}{D} = 29,0^\circ$, " " " " " $\lambda = 514 \mu\mu$,

$D = 9$ " " $\frac{\beta}{D} = 28,1^\circ$, " " " " " $\lambda = 522 \mu\mu$,

$D = 10$ " " $\frac{\beta}{D} = 27,4^\circ$, " " " " " $\lambda = 529 \mu\mu$.

Betrachten wir bei dieser letzten Einstellung die \sin^2 -Curve genauer: Wir finden dann ausser dem schon erwähnten Minimum bei $\lambda = 529 \mu\mu$ noch ein zweites bei $\lambda = 419 \mu\mu$. Zwischen beiden liegt ein Maximum bei $\lambda = 463 \mu\mu$, ferner ein anderes am rothen Ende bei $\lambda = 638 \mu\mu$; das erstere liegt also dicht hinter dem Maximum der K -Curve.

Denken wir uns wieder den Quarz allmählich verstärkt und dabei das bisher betrachtete (erste) Minimum an der alten Stelle gehalten oder entsprechend dem bisherigen Verlauf der Curve ein wenig nach links verschoben, so wird das rechte Maximum den Gipfel der K -Curve überschreiten. Es tritt nun offenbar bei der Verschiebung der \sin^2 -Curve nach links nicht nur eine Verkleinerung der W -Erregung, sondern auch eine solche der K -Erregung ein, und es folgt, dass nun diese Verschiebung eine sehr viel stärkere sein muss, bis dadurch, dass die erstere Erregung schneller als die zweite abnimmt, wieder Flächengleichheit erreicht ist. Auf diese Weise entsteht die Einknickung der β -Curve zwischen 10 und 12 mm Quarzdicke. Das erste Minimum liegt:

für $D = 10$ mm, da $\frac{\beta}{D} = 27,4^\circ$, bei $\lambda = 529 \mu\mu$,

" $D = 11$ " , " $\frac{\beta}{D} = 26,0^\circ$, " $\lambda = 541 \mu\mu$,

" $D = 12$ " , " $\frac{\beta}{D} = 24,7^\circ$, " $\lambda = 555 \mu\mu$.

Sehen wir nun schliesslich zu, auf welche Weise das letzte geradlinige Stück der β -Curve charakterisirt ist (von $D = 13$ mm bis $D = 20$ mm). Bei $D = 13$ mm haben wir in der \sin^2 -Curve:

| | | | |
|------------------------|-----|-----|--------|
| Maxima bei $\lambda =$ | 658 | 500 | 422 |
| Minima bei $\lambda =$ | 562 | 455 | (395); |

bei $D = 20$ mm:

| | | | | |
|------------------------|-----|-----|-----|----------|
| Maxima bei $\lambda =$ | 642 | 540 | 470 | 424 |
| Minima bei $\lambda =$ | | 578 | 494 | 440 402. |

Im Bereiche der K -Curve sehen wir bei der ersteren Quarzstärke zwei, bei der letzteren drei Maxima. Wir sind offenbar mit 13 mm zu einer Grenze gelangt, wo die Grösse der K -Erregung nach dem Durchgang durch Quarz und Nicol durch eine Verschiebung der Streifen nicht mehr wesentlich beeinflusst wird. Je näher ein Maximum dem Gipfel der K -Curve kommt, um so mehr rückt das vorhergehende aus dem Bereiche der Curve heraus, und wenn jenes Maximum den Gipfel überschritten hat, so ist ein anderes nachgerückt. Annähernd wird also in allen Fällen durch Quarz und Nicol die Hälfte der K -Erregung ausgelöscht werden.

Im Bereiche der W -Curve liegen die Streifen noch nicht so dicht. Dass der ausgelöschte Theil der W -Erregung gleich dem der K -Erregung werde, wird wesentlich bewirkt durch passende Lage des ersten Maximums und des ersten Minimums. Wir sehen, dass diese bei 13 wie bei 20 mm Quarzstärke zu beiden Seiten des Gipfels der W -Curve liegen. Da bei wachsender Quarzdicke, wenn das erste Minimum an seiner Stelle bleibe, das erste Maximum dem Gipfel der W -Curve zu nahe kommen, der nicht vernichtete Theil der W -Erregung also zu gross werden würde (grösser als $\frac{1}{2} \int K(\lambda) d\lambda$), so muss das erste Minimum langsam dem Gipfel näher, also nach links rücken. Dass diese Verschiebung eine gleichmässige, der Veränderung der Quarzdicke proportionale ist, drückt die Geradlinigkeit des letzten Theiles der β -Curve aus, dass sie überhaupt vorhanden ist, zeigt sich daran, dass jenes Curvenstück weniger steil ist als die Gerade, welche den Coordinatenanfang mit dem Curvenpunkt für $D = 13$ mm verbindet.

Man erkennt, dass man bei weiterer Verstärkung des Quarzes schliesslich dahin kommen muss, dass auch die W -Erregung bei jeder Lage der \sin^2 -Curven, also bei jeder Stellung des ersten Nicols halbirt wird. Dann ist für jedes β die Gleichung (7) erfüllt, es findet immer Gleichheit statt, eine Einstellung ist also unmöglich.

Die Discussion der Curve der α ist nach dem Gesagten mit Hülfe der Gl. (5) sehr leicht. Nach dieser muss das Verhältniss der nach dem Durchgang durch Quarz und Nicol N übrig bleibenden Erregung zur ganzen Erregung gleich sein $\cos^2 \alpha$. Für $D = 0$ wird alles ausgelöscht; also ist $\alpha = 90^\circ$. Mit wachsendem D wird der nicht ausgelöschte Theil grösser; also wird α kleiner. Dies Fallen der α -Curve wird nur dauern bis $D = 10$ mm, denn hier werden, wie wir sahen, dadurch dass ein Maximum der \sin^2 -Curve das der K -Curve überschreitet, die Elementarerregungen wieder kleiner; die Curve der α steigt also wieder. Schliesslich muss im letzten Theile, wo nach dem früheren beide Erregungen zur Hälfte ausgelöscht werden, überall $\alpha = 45^\circ$ sein.

III. Folgerungen.

Es würde zu weit führen und kaum hinreichend von Interesse sein, die Discussion auch für die vier übrigen Leukoskopcurven durchzuführen, da ja die β -Curven und die α -Curven unter sich sämmtlich den gleichen Charakter haben; ich ziehe deshalb vor, jetzt einige allgemeinere Folgerungen an die experimentell gefundenen Curven und die Discussion zu knüpfen.

1) Dass für dasselbe Auge die β -Curve für Wolkenlicht steiler als die für Lampenlicht verläuft, ist leicht erklärt.

Das Spectrum des Sonnenlichtes unterscheidet sich von dem des Lampenlichtes namentlich durch das bedeutend stärkere Auftreten der kurzwelligen Lichtstrahlen. Die Maxima der Elementarfarbencurven rücken mithin nach dem blauen Ende des Spectrums fort, ebenso ihr Schnittpunkt. Denkt man sich nun die vorstehend gegebene Discussion der β -Curve auf so verschobene Farbencurven angewandt, so folgt, dass bei jeder Quarzdicke auch die \sin^2 -Curve nach dem blauen Ende des Spectrums hin verschoben werden muss. Wir wissen aber, dass β die Lage dieser Curve angibt und dass es um so grösser ist, je weiter die \sin^2 -Curve nach rechts verschoben wird. Man wird also allgemein sagen können, dass bei derselben Quarzdicke der Winkel β um so grösser

eingestellt werden muss, je mehr kurzwellige Strahlen die Lichtquelle verhältnissmässig enthält.

Wenn die Elementarempfindungscurven für verschiedene Lichtquellen sich wesentlich nur durch ihre Lage, nicht durch ihre Gestalt unterscheiden, so kann die Grösse der Quotienten:

$$\frac{\int W(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int W(\lambda) d\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\int K(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int K(\lambda) d\lambda}$$

(das Verhältniss des nicht ausgelöschten Theiles der Erregung zur Gesamterregung) bei jeder einzelnen Quarzdicke für alle Lichtquellen recht wohl die gleiche sein. Hieraus erklärt sich die Uebereinstimmung der Curven der α für Wolken- und Lampenlicht. Wenn die Elementarfarbencurven ihre Form vollständig verändern (wie es bei Anwendung farbiger Gläser geschehen kann), so wird dies im allgemeinen nicht der Fall sein können.

2) Die Farbencurven des Rothblinden unterscheiden sich von denen des Grünblinden dadurch, dass die Masse der W -Erregung des ersteren weiter nach dem blauen Ende liegt, als bei dem letzteren; die K -Curven zeigen dagegen keinen Unterschied. Vergewenwärtigen wir uns wieder das bei der Discussion der Curve B_1 Auseinandergesetzte, so erkennen wir ohne weiteres, dass bei jeder Einstellung des Grünblinden für den Rothblinden die K -Erregung denselben, die W -Erregung aber einen kleineren Werth hat. Um Gleichheit beider Erregungen herzustellen, wird also der Rothblinde jedesmal die \sin^2 -Curve ein wenig nach dem blauen Ende hin verschieben, d. h. β vergrössern müssen. Es wird sich also in der That durch Leukoskopeinstellungen die Frage einfachst entscheiden lassen, ob zwei streng getrennte Classen von Farbenblinden, die sich in der angegebenen Art unterscheiden, bestehen. Uebergänge von einer Classe zur anderen würden sich durch mittlere Einstellungen von β zu erkennen geben.

3) Werfen wir nun einen Blick auf die Leukoskopeinstellungen von Trichromaten.

Von A. König und C. Dieterici¹⁾ ist nachgewiesen worden, dass sich durch Superposition der Elementarempfindungs-

1) a. a. O.

curven der beiden Classen der Dichromaten die drei Curven des Trichromaten bilden lassen. Wir können mithin die bei Einstellung auf Farbengleichheit durch Trichromaten geforderten Gleichungen (3) durch die folgenden:

$$\begin{aligned} & \sin^2 \alpha f W_1(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha f W_1(\lambda) \cos^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda, \\ (8) \quad & \sin^2 \alpha f W_2(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha f W_2(\lambda) \cos^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda, \\ & \sin^2 \alpha f K(\lambda) \sin^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda = \cos^2 \alpha f K(\lambda) \cos^2 \{D\varrho(\lambda) - \beta\} d\lambda \end{aligned}$$

ersetzen, wo sich W_1 auf das grünblinde, W_2 auf das rothblinde Auge bezieht. Die Curve B_1 gibt nun an, wann (speciell bei Lampenlicht) die erste und dritte, die Curve R, wann die zweite und dritte Gleichung erfüllt sind. Alle drei Gleichungen können nur für Schnittpunkte beider Curven befriedigt sein. Da solche (ausser dem Coordinatenanfang) nicht existiren, so folgt, dass für den Trichromaten bei keiner Quarzdicke, solange überhaupt noch Färbung stattfindet, Farbengleichheit vorhanden sein kann. Man kann dasselbe auch so ausdrücken: Die Erfahrung hat gelehrt, dass zwei Farben, die der Normalsichtige gleich sieht, auch sowohl dem Rothblinden wie dem Grünblinden gleich erscheinen (abgesehen von geringen Unterschieden infolge von individuellen Verschiedenheiten, wie sie sogar für die beiden Augen desselben Beobachters vorkommen können); wo also der erstere Farbengleichheit sehen soll, müssen auch die letzteren gemeinsam Farbengleichheit sehen. Nun stellt aber, wie wir erwiesen haben, der Rothblinde immer anders als der Grünblinde Farbengleichheit ein, also kann auch der Normalsichtige nie eine solche erhalten.

4) Auf welche Weise werden die Einstellungen der Trichromaten auf möglichste Gleichheit charakterisirt sein? A. König gibt als Kriterium an, „dass man bei einem bestimmten Werthe von β nicht mehr zu entscheiden vermag, welches der beiden Felder einen röthlicheren Ton besitzt“¹⁾ (wie bei den Farbenblinden nicht ein Feld „gelblicher“ als das andere sein darf). Hieraus folgt, dass bei der von Trichromaten für das linke Feld zu erfüllenden, der Gleichung (5) für Farbenblinde entsprechenden Doppelgleichung:

1) A. König, Wied. Ann. 17. p. 999. 1882.

$$\begin{aligned} \frac{\int R(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int R(\lambda) d\lambda} &= \frac{\int G(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int G(\lambda) d\lambda} \\ &= \frac{\int V(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int V(\lambda) d\lambda} \end{aligned}$$

bei der Einstellung nur der erste Theil berücksichtigt wird. Denn wenn für die linke Seite des Gesichtsfeldes:

$$\frac{\int R(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int R(\lambda) d\lambda} \cong \frac{\int G(\lambda) \sin^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int G(\lambda) d\lambda}$$

ist, so ist für die andere:

$$\frac{\int R(\lambda) \cos^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int R(\lambda) d\lambda} \cong \frac{\int G(\lambda) \cos^2 \{ D_Q(\lambda) - \beta \} d\lambda}{\int G(\lambda) d\lambda}$$

in einem von beiden Feldern überwiegt; also die Rothempfindung.

Ist Gleichheit der beiden Ausdrücke hergestellt, so ist die Nüance des einen Feldes (desjenigen, wo die V -Erregung kleiner ist als die R -Erregung und G -Erregung) gegeben durch die Wellenlänge des Schnittpunktes der R -Curve und G -Curve für diese Lichtquelle (bei Gleichheit der von den Curven und der Abscissenaxe eingeschlossenen Flächen). Ist die betrachtete Lichtquelle weisses (Sonnen-) Licht, so ist also die Nüance des einen Feldes rein gelblich; die des anderen, da sie complementär sein muss, bläulich.

Man wird nun auch leicht angeben können, welche Lage bei solcher Einstellung die dunklen Streifen bei der spectralen Zerlegung, die Minima der \sin^2 -Curve haben müssen.

Wir haben hier — wir wollen Sonnenlicht als Lichtquelle annehmen — zwei Empfindungscurven, deren Maxima sehr nahe bei einander liegen, und die sich ungefähr bei $\lambda = 570 \mu\mu$ schneiden, und es ist daher nach dem Früheren klar, dass in dieser Gegend das erste Minimum liegen muss, denn in dem vorderen Theile des Spectrums, wo die Hauptmassen der beiden in Betracht kommenden Erregungen liegen, hängt die Grösse der Auslöschung auch bei grossen Quarzdicken fast nur von der Lage des ersten, bei der früheren Discussion stets betrachteten Minimums der \sin^2 -Curve ab. Diese Ueberlegung stimmt in der That mit den von

A. König angegebenen Zahlen.¹⁾ Nach ihm ist für Sonnenlicht bei:

$$D = 10 \text{ mm } \beta = 230,5^\circ$$

$$D = 15 \text{ mm } \beta = 342,9$$

$$D = 20 \text{ mm } \beta = 450,5$$

Dem entspricht als Lage des ersten Minimums bei:

$$D = 10 \text{ mm } \lambda = 573 \mu\mu$$

$$D = 15 \text{ mm } \lambda = 575 \text{ „}$$

$$D = 20 \text{ mm } \lambda = 579 \text{ „}$$

Der Normalsichtige stellt also den ersten dunklen Streifen viel weiter links, d. h. er gibt β einen sehr viel kleineren Werth als der Farbenblinde. In Fig. 2 sind zur Vergleichung die β -Curven für Sonnen- und Gaslicht (K_2 und K_1) punktirt eingetragen.

Wenn nun der Trichromat nur zwei der drei zu erfüllenden Gleichungen befriedigt, muss er seine Einstellung ebenfalls bei jeder Quarzdicke ausführen können. Dies ist in der That der Fall, aber bei den niedrigen Quarzstärken ist im linken Felde die Grösse der V -Erregung so viel grösser als die R -Erregung und G -Erregung, dass hier absolut gelbe, im rechten Felde blaue Färbung eintritt; hier ist also auch von einer annähernden Farbengleichheit keine Rede. Mit (von 0 mm an) wachsender Quarzdicke nehmen im linken Felde alle drei Erregungen so lange zu, bis das dem betrachteten Minimum folgende Maximum der \sin^2 -Curve den Gipfel der V -Erregung überschritten hat. Dies tritt ungefähr bei $D = 6 \text{ mm}$ ein. Von hier an wachsen die R -Erregung und G -Erregung weiter, während die V -Erregung fällt; jetzt zeigt sich also eine allmähliche Entfärbung. Bei 10 mm Quarzdicke, wo die Entfärbung so gross geworden ist, dass das normale Auge eine annähernde Farbengleichheit constatiren kann, liegt ein Maximum bei $\lambda = 491 \mu\mu$ das folgende Minimum bei $\lambda = 438 \mu\mu$.

Dass auch der Trichromat für β einen um so grösseren Winkel einstellt, je mehr kurzwellige Strahlen die Lichtquelle relativ enthält, erklärt sich genau wie beim Dichromaten

1) A. König, Wied. Ann. 17. n. 1003. 1882.

dadurch, dass dem Ueberwiegen der kurzwelligen Strahlen ein Verschieben der Maxima der Empfindungscurven nach rechts entspricht. Das erste Minimum der \sin^2 -Curve muss also ebenfalls nach rechts verschoben, d. h. β vergrössert werden.

5) Schliesslich sei hervorgehoben, dass nach dem Gesagten das Leukoskop auch für die Erkennung etwa vorhandener Violettblindheit ausserordentlich dienlich ist. Nach der Young-Helmholtz'schen Theorie müssten sich die Farbcuren des Violettblinden durch Superposition der *R*- und *G*-Curve des Normalen darstellen lassen. Da diese beiden Curven bei den Leukoskopeinstellungen des Normalen allein in Betracht kommen, so müsste der Violettblinde ebenso wie der Normale einstellen mit dem Unterschied, dass der letztere bei seinen Einstellungen vollständige Gleichheit erhält. Ausserdem müsste er aber auch bei geringeren Quarzdicken vollkommene Gleichheit herstellen können, die dann für den Normalen ein rein gelbes und ein rein blaues Feld liefern würde. Für die Diagnose der Farbenblindheit ist mithin das Leukoskop ein ganz vorzüglicher Apparat.

Es bleibt mir übrig, für die bei dieser Arbeit gewährte Anregung und Unterstützung Hrn. Geheimrath v. Helmholtz, sowie Hrn. Dr. A. König meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

XI. *Luminescenz der Pyrogallussäure; von Philipp Lenard und Max Wolf.*

Legt man eine photographische Platte nach dem Entwickeln im Eder'schen Pottaschenentwickler (s. w. u.) oder im Sodaentwickler nach oberflächlichem Waschen in das Alaunbad, so sieht man im Dunkeln erst die Platte, dann bald das ganze Bad überraschend hell aufleuchten. Nach zwei Minuten ist die Erscheinung verschwunden. Eder und andere¹⁾ bemerkten dies Leuchten ebenfalls; wir fanden es,

1) Vgl. Photogr. Mitt. 1887. No. 344.

ohne Kenntniss davon zu haben, bei dem Hervorrufen einer Sternphotographie, und es erschien uns interessant genug, nach seiner Ursache zu suchen.

Man hielt nach Chandler¹⁾ die lichtempfindliche Schicht selbst für die Ursache der Erscheinung, dass dies jedoch nicht der Fall ist, davon überzeugten wir uns bald. Wir gossen frisch bereiteten Pottaschenentwickler (100 g Wasser, 1,35 g Pottasche, 0,86 g Natriumsulfit und 0,20 g Pyrogallol), eine Mischung, die sich an der Luft durch Oxydation der Pyrogallussäure sehr rasch bräunt, in ungefähr ebensoviel gesättigte Alaunlösung und fanden im Moment des Zusammengiessens und kurz nachher das Aufleuchten der Mischung.

Offenbar war also das Leuchten auch in der Gelatineschicht nur durch Mischung des zurückgebliebenen Entwicklers mit dem Alaun zu Stande gekommen.

Betrachtet man nach dem Leuchten die Mischung am Licht, so findet man die Thonerde des Alauns durch das kohlen saure Kali gefällt. Die kohlen saure Thonerde zersetzt sich alsbald in basisch kohlen saure Thonerde, während Kohlen säure entweicht.

Naturgemäss kamen wir auf den Gedanken, zu untersuchen, welche von den im Entwickler enthaltenen Substanzen mit Alaun zusammen das Leuchten bewirkt. Dieser Untersuchung stellten sich sehr grosse Schwierigkeiten entgegen. Vor allem ging uns zeitweise das Leuchten ganz verloren, da es, wie man sehen wird, von Umständen abhängt, die wir von vornherein unmöglich beachten konnten. Dazu kam noch, dass wir, weil die geringsten Spuren von Pyrogallol schon Leuchten hervorrufen können, durch einen Versuch zeitweilig auf die falsche Fährte geleitet wurden, als ob Pyrogallol überhaupt unnöthig sei.

Als eine Phosphorescenz im eigentlichen Sinne (wie man es bei Thonerde vermuthen konnte) erwies sich die Erscheinung nicht, wir bezeichneten sie daher auch als Luminescenz.²⁾ Mehrere andere Vermuthungen erwiesen sich auch als un-

1) Chandler, Antony's Phot. Bull. 18. p. 97. 1887.

2) Vgl. Ueber diese Bezeichnung: E. Wiedemann, Phys.-med. Societät zu Erlangen 1887.

richtig, aber wir machten die immerfort bestätigte Beobachtung, dass die Thonerdefällung für das Leuchten nothwendig ist. Diese Fällung kann nämlich sowohl bei Ueberschuss von Alaun als auch von Pottasche in Lösung gehalten werden; und mit dem Fehlen der Fällung blieb jedesmal auch das Leuchten aus. Fällung andererseits war aber nicht jedesmal mit Leuchten verbunden. Wir brauchten nur Pyrogallol oder schwefligsaures Natron aus dem Entwickler wegzulassen, so erhielten wir wohl die schönste Fällung, aber kein Leuchten beim Zusammengiessen mit Alaun.

Wir begannen nun, die Zusammensetzung des Entwicklers zu variiren, während die Alaunlösung immer bei gewöhnlicher Temperatur gesättigt blieb und gleiche Volumina der beiden Flüssigkeiten verwendet wurden. Es zeigte sich, dass, sobald nur Fällung entsteht, die Quantität der Pottasche ziemlich gleichgültig ist. Von schwefligsaurem Natron dagegen durfte weder zu viel, über 1,25 Proc., noch zu wenig, unter 0,13 Proc., vorhanden sein, sonst leuchtete die Mischung nicht. Auch von Pyrogallol verhinderte ein Ueberschreiten über 0,3 Proc. die Erscheinung; aber schon die kleinste Spur dieser Substanz genügt. Schon 0,005 Proc. Pyrogallol im Entwickler geben helles Leuchten. Als passendsten Entwickler nahmen wir schliesslich 100 g Wasser, 4 g Pottasche, 0,75 g schwefligsaures Natron und 0,1 g Pyrogallol.

Die Pottasche liess sich mit gutem Erfolge durch eine äquivalente Menge Soda oder doppeltkohlensaures Natron ersetzen; ebenso der Alaun durch reines schwefelsaures Aluminium. Erwärmen einer der beiden Flüssigkeiten oder beider vor dem Zusammengiessen begünstigte das Leuchten.

Aber auch mit diesem Entwickler hatten wir das Leuchten noch nicht vollkommen in der Gewalt. Offenbar war ausser den vier Substanzen Alaun, Pottasche, Pyrogallol und schwefligsaures Natron noch etwas Fünftes nothwendig, das wir nicht kannten, und dessen Hinzuthun daher bislang dem Zufall überlassen war.

Wir beobachteten, dass, wenn sich der Thonerdenniederschlag nach einem Leuchtversuch abgesetzt hatte, der geklärte

Theil farblos blieb, und bloß die Fällung selbst gelb war. Die Thonerde enthielt alles Pyrogallol, während in der Flüssigkeit keines mehr nachzuweisen war. Dass Thonerde gefärbte Substanzen an ihrer Oberfläche mit grosser Kraft verdichtet, ist bekannt; in dieser Eigenschaft dient sie ja in der Färberei als Beizmittel.

Wir stellten daher die Vermuthung auf, dass die Thonerde als höchst fein zertheilte Substanz auf ihrer grossen, frischen Oberfläche nicht nur die Pyrogallussäure, sondern zugleich auch Sauerstoff verdichte, und dass das Leuchten die Folge einer plötzlichen energischen Verbrennung des mit Sauerstoff verdichteten Pyrogallols sei. Sauerstoff wäre also der gesuchte nothwendige fünfte Körper. Dass dies in der That so ist, haben wir durch folgende Versuche bewiesen.

Wir füllten erwärmten Entwickler in einen hohen engen Standcylinder. Beinahe bis auf dessen Boden reichte ein langes Trichterrohr mit Hahn, ganz bis zur unteren Mündung mit Alaun gefüllt. Durch Oeffnen des Hahns floss der Alaun in den Entwickler. Durch ein anderes Glasrohr konnte beliebig Luft durch den Entwickler geblasen werden. Liessen wir den Alaun sich 1 Secunde nach dem Luftdurchblasen mit dem Entwickler mischen, so erhielten wir das Leuchten. Bei einem zweiten Versuche 18 Secunden nach dem Luft-eintritt gab es kein Leuchten mehr. Der Entwickler hatte während dieser Zeit allen absorbirten Sauerstoff verbraucht.

Wir verfertigten uns ferner einen Glasapparat, der aus zwei getrennten Gefässen bestand, deren Hälse oben in eine einzige Röhre zusammenliefen. In das eine Gefäss füllten wir Entwickler, in das andere Alaun, sodass in beiden noch Luft genug übrig blieb; kehrten wir das Ganze um, so mischten sich beide Theile und leuchteten. Wir hätten ebenso gut ausgekochte Lösungen nehmen können, wie wir uns durch Versuche überzeugten. Nun beschickten wir den Apparat aufs neue, fügten aber zu beiden Flüssigkeiten noch Wasser hinzu, kochten dann beide so lange aus, bis das zugefüllte Wasser verdampft und zugleich alle Luft ausgetrieben war, und schmolzen in diesem Augenblick den Apparat zu. Wurde er nun, sauerstofffrei, umgekehrt und die Lösungen gemischt,

so entstand wohl Niederschlag, aber kein Leuchten. Ohne Sauerstoff also kein Leuchten des Pyrogallols.

Nun leiteten wir umgekehrt aus einem Gasometer Sauerstoff durch den Entwickler und gossen 5 Secunden später den Alaun hinzu. Das Leuchten war heller als je.

Sauerstoff in den Alaun eingeleitet, gab ein weniger gutes Resultat. Der in heftigem Oxydationsprocess begriffene, im Entwickler absorbirte Sauerstoff hat also eine stärkere oxydirende Wirkung als der im Alaun absorbirte, obwohl, wie wir uns durch besondere Versuche überzeugten, der Sauerstoff durch den Entwickler nicht ozonisirt wird.

Der Entwickler muss also freien Sauerstoff absorbirt enthalten — Schütteln kurz vor dem Zusammengiessen genügt — damit er Leuchten hervorbringen könne; und wenn wir bisher das Licht nicht hervorbringen konnten, so oft wir wollten, so war der Mangel an Sauerstoff die Ursache. Daher kommt es auch, dass Versuche, das kohlen saure Kali oder Natron des Entwicklers durch Aetzkali zu ersetzen, erfolglos blieben, indem diese Substanz zu raschen Sauerstoffverbrauch im Entwickler bedingt, was man an dem raschen Braunwerden erkennt. Ebendasselbe ist bei Ueberschuss von Pyrogallol oder Natriumsulfit der Fall. Ein solcher Entwickler leuchtet aus Sauerstoffmangel nicht.

Warum nun aber eine Substanz wie schwefligsaures Natron, die bekanntlich so energisch Sauerstoff verbraucht, für die Lichterscheinung nöthig ist, blieb uns ein Räthsel.

Für photographische Zwecke wendet man schwefligsaures Natron an, um die wässrige Pyrogallollösung, die zur Bereitung des Entwicklers dient, haltbarer zu machen. Wie man sich diese Wirkung des Natriumsulfits aber erklärt, darüber konnten wir nirgends einen Anhaltspunkt finden, stellten uns aber vor, dass das schwefligsaure Natron allen Sauerstoff, der durch die Oberfläche des Entwicklers eindringt, sofort verbraucht und also die Pyrogallussäure gleichsam vor Berührung mit dem Sauerstoff schützt. In diesem Falle aber müsste der Entwickler, durch das Natriumsulfit von Sauerstoff befreit, gerade zum Leuchten untauglich werden.

Das Conserviren des Pyrogallols ist für das Leuchten

unwesentlich, wie folgender Versuch zeigt: Entwickler, aus dem das Natriumsulfit weggelassen war, wurde für den Leuchtversuch in einem Becherglas vorgewärmt, während dessen er stark braun — oxydirt — wurde; dann erst wurde die entsprechende Quantität Natriumsulfit zugesetzt, geschüttelt und sofort der Alaun zugegossen: schönes Leuchten. Dies Resultat war auch, weil die kleinsten Spuren Pyrogallol genügen, vor auszusehen.

Das Natriumsulfit muss also in den wenigen Sekunden vom Zusetzen bis zum Fällen eine eigenthümliche Wirkung im Entwickler gehabt haben. Auf den Fällungsprocess nicht, denn Natriumsulfit, statt im Entwickler im Alaun enthalten, kam erst dann zur Wirkung, wenn durch Zugießen eines Theiles der Alaunlösung der Entwickler schon sulfit-haltig geworden war.

Eine Verbindung mit Pyrogallol ist die Folge dieser Einwirkung des schwefligsauren Natrons auch nicht; denn einerseits ist bei den genauen Studien, denen man das Pyrogallol unterworfen hat, eine solche Verbindung bisher nicht beobachtet, und andererseits sind auch Pyrogallol und schwefligsaures Natron im Entwickler beide wie in einem Gemisch nachweisbar.

Es blieb so nur mehr die einfachste, aber merkwürdige Annahme übrig, dass das Gemisch aus Wasser, Pyrogallol, Natriumsulfit sammt Pottasche — sagen wir kurz Pyro-Natriumsulfit-Pottasche — weniger rasch Sauerstoff verbrauchte, als Pyro-Pottasche allein, und also der Entwickler mit schwefligsaurem Natron sauerstoffreicher bleibt, als ohne solches.

In der That konnten wir dieses auf verschiedene Arten beweisen. Unter anderem durch folgenden Versuch: Wir verfertigten uns zwei genau gleiche Apparate. Jeder bestand aus einer 1,5 m langen, 12 mm weiten Glasröhre, die an einem Ende mit einem Glashahn, am anderen in einer kurzen Capillarröhre endete. Die Hähne der Röhren wurden mit einer Wasserluftpumpe verbunden und so die Luft ausgepumpt. Alsdann wurden aus einem anderen luftleeren Gefäss durch die Capillarröhren bis zu einer angebrachten Marke genau je 10 ccm Entwickler eingelassen, und zwar in die eine

Röhre solcher ohne Natriumsulfit, in die andere mit Zusatz desselben, und die an den Capillarröhren befindlichen Schlauchstücke durch Quetschhähne geschlossen. Oeffnete man jetzt die Glashähne beider Apparate gleichzeitig, so füllten diese sich mit Luft. Die Glashähne wurden wieder geschlossen und beide Apparate von nun an einer ganz gleichmässigen Behandlung unterworfen, welche darin bestand, dass durch fortwährendes Umkehren der Apparate der Entwickler auf der ganzen Röhrenwand vertheilt erhalten wurde. Zu bestimmten Zeiten unterbrachen wir die Bewegung, verbanden die Glashähne mit nach abwärts führenden Röhren, die unter Wasser endeten, und konnten so beim Oeffnen der Hähne die verbrauchten Sauerstoffvolumina vergleichen.

Da ergab sich nun das oben erwartete Resultat. Ob wir auch die Röhren vertauschten, es blieb dasselbe. Jedemal verbrauchte Pyro-Pottasche-Natriumsulfit weniger rasch Sauerstoff, als Pyro-Pottasche. Diese Conservirung des Sauerstoffes durch das schwefligsaure Natron macht also das Leuchten möglich.

Daraus würde aber folgen, dass man auch bei Entwickler ohne Natriumsulfit die Sauerstoffzufuhr nur dem Verbrauch entsprechend vergrössern müsste, um auch hier Leuchten zu bekommen. Es zeigte sich in der That ein deutliches, wenn auch schwächeres Leuchten, wenn wir Pyro-Pottasche mit reinem Sauerstoff sättigten und zugleich Alaun zugossen.

Die Ursache dieser Luminescenzerscheinung ist daher ein Verbrennungsprocess: Die Thonerde wird gefällt; auf ihrer sich bildenden Oberfläche wird Pyrogallussäure — gleichzeitig wohl auch der Sauerstoff — verdichtet, und durch diese Verdichtung die Oxydation bis zum Leuchten beschleunigt. — Aehnliche Wirkungen auf andere Körper sind längst bekannt. Wasserstoff und Sauerstoff auf frischgeglühtem Platinschwamm verdichtet, vereinigen sich unter Erglügen. Knallgas, hohem Druck ausgesetzt, explodirt bei gewöhnlicher Temperatur u. s. f.

Bei der unerwarteten Art der Conservirung des Pyrogallols durch schwefligsaures Natron kommen die stark reducirenden Wirkungen dieses Salzes gar nicht in Betracht.

Dieses verglichen damit, dass es auch sonst lauter antiseptische Mittel sind, welche — wenn sie überhaupt in der Pyrogallollösung angewandt werden können, ohne dieselbe zu zerstören — die Pyrogallussäure ebenfalls conserviren (Glycerin, absoluter Alkohol, Säuren, Salicyl, Thymol etc. etc.)¹⁾, leitet zu dem Schlusse, dass auch das schweflige saure Natron hier nur als Desinfectionsmittel wirkt. Die rasche Oxydation der Pyrogallussäure könnte z. B. der Lebensprocess eines Mikroorganismus sein, der die Oxydation in neutraler Lösung bedingt, in alkalischer verstärkt. Aehnlich wie *Bacterium aceti* im Alkohol.

Oder besteht überhaupt die Wirkung der Desinfectionsmittel in einer Verzögerung von Oxydationsprocessen organischer Materie, die auf eine unbekannte Weise vor sich geht?

Heidelberg, April 1888.

XII. Beiträge zur Theorie der Luftphelectricität; von L. Sohncke.

(Aus dem ersten Theil einer gleichnamigen Abh. in den Sitzungsber. der k. bayr. Acad. d. Wiss.; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

1. In der vorliegenden Abhandlung suche ich auf experimentellem Wege die Frage zu beantworten, ob die von einer electricisirten Flüssigkeit aufsteigenden Dämpfe Electricität mit sich nehmen, was bekanntlich in neuerer Zeit von Hrn. F. Exner wieder behauptet und zur Grundlage einer Theorie der atmosphärischen Electricität gemacht worden ist. Ich komme auf Grund vieler Versuche zu dem Ergebniss, dass eine solche Mitnahme der Electricität durchaus nicht nachweisbar ist, dass also die Exner'sche Theorie vorläufig jeder experimentellen Unterlage entbehrt.

Ueber die genannte Frage liegen aus den letzten Jahren zwei Arbeiten vor, deren Ergebnisse einander direct wider-

¹⁾ Vgl. Eder, Handb. der Phot. 3. p. 96 ff.

sprechen. 1883 veröffentlichte Hr. L. J. Blake¹⁾ seine im physikalischen Laboratorium der Berliner Universität ausgeführte Untersuchung, bei der er destillirtes Wasser, Kochsalzlösung, absoluten Alkohol, concentrirte Schwefelsäure, Ostseewasser, sowohl bei Zimmertemperatur als bei $+100^{\circ}$, schliesslich noch Quecksilber bei Zimmertemperatur und bei 360° anwandte. Sein Schlussergebniss lautet: „Der aus ruhigen electricirten Flüssigkeitsoberflächen aufsteigende Dampf ist electricisch neutral.“

1886 veröffentlichte Hr. F. Exner²⁾ eine Abhandlung über die Ursache und die Gesetze der atmosphärischen Electricität, in welcher er durch Versuche mit Alkohol und Aether nachweist, „dass die Dämpfe Electricität mit sich führen, wenn sie aus einer electricirten Flüssigkeit sich entwickeln“³⁾.

Hr. Blake hat seine Versuche ausführlich mitgetheilt; sie scheinen mit grosser Sorgfalt und Umsicht angestellt zu sein und machen einen sehr zuverlässigen Eindruck. Uebrigens wurden bei denselben nicht, wie Hr. Exner sagt, nur Potentialdifferenzen von 400 Volt angewandt, sondern vermittelst einer Töpler'schen Maschine auch solche, die einer Schlagweite von 3 bis 8 mm entsprachen.⁴⁾

Hr. Exner berichtet über seine zu entgegengesetzten Ergebnissen führenden Versuche nur ganz kurz, sodass es schwer hält, ihre Zuverlässigkeit zu beurtheilen. Um die Ursache der Verschiedenheit der von beiden Beobachtern gewonnenen Resultate aufzufinden, schien mir unter diesen Umständen die Wiederholung der Blake'schen Versuche zunächst überflüssig, dagegen die Wiederholung der Exner'schen Versuche geboten. Was ich dabei fand, wird im Folgenden mitgetheilt.


2. Hrn. Exner's Angaben folgend, stellte ich ein grosses cylindrisches Messinggefäss von $\frac{1}{3}$ m Weite und fast $\frac{1}{2}$ m

1) L. J. Blake, Wied. Ann. 19. p. 518. 1883.

2) F. Exner, Wien. Ber. 93. II. Abth. Febr.-Heft. 1886.

3) l. c. p. 31.

4) l. c. p. 531 u. 532.

Tiefe auf drei Schellacksäulchen isolirt auf. Es war dazu bestimmt, die durch Aetherdämpfe übertragene Electricität aufzunehmen. Der Aether befand sich etwa 1 cm über der Mitte dieses Gefässes in einer flachen Messingschale von 11 cm Durchmesser und mit 6 mm hohem wulstigen Rande. Die Schale hing an drei 13 cm langen Drähten, die oben in einen Ring zusammenliefen, letzterer getragen von einem kleinen Messinghaken, der das Ende eines 30 cm langen, zweimal rechtwinklig gebogenen Ebonitstabes  bildete.

Die Versuche verliefen nun so: Das Messinggefäss wurde erst zur Erde abgeleitet, darauf isolirt und durch einen mit isolirter Handhabe versehenen Draht mit einem Pol eines Mascart'schen Electrometers in Verbindung gesetzt, das für objective Ablesungen mit Lichtzeiger eingerichtet war. Wenn das Gefäss ganz allein stand, — ohne geladene Messingschale über ihm, — so betrugen die jetzt erfolgenden Ausschläge des Lichtzeigers meist 10 bis 20, selten bis 40, Theilstriche, und erwiesen das Gefäss fast ausnahmslos als negativ. Die Empfindlichkeit war eine solche, dass ein Pol eines Daniellelementes, dessen anderer Pol an Erde lag, 15 bis 20 Scalentheile Ausschlag gab.

Solche Versuche mit dem Messinggefäss allein wurden zur Controle fortwährend zwischen die eigentlichen Versuche eingeschoben. Um letztere anzustellen, musste man die Schale, sei es mit, sei es ohne Aetherfüllung, electrificiren. Dazu wurde sie auf den (+) Conductor einer im Nebenzimmer stehenden Reibungselektisirmaschine gesetzt, und letztere ein mal gedreht. Dann wurde die Schale vermittelst des erwähnten Ebonitstabes, dessen anzufassendes Ende mit Stanniol bewickelt war, vom Conductor abgenommen und über dem nicht zur Erde abgeleiteten Messinggefäss aufgehängt. Nach 1 bis 1½ Minuten wurde sie wieder entfernt und jetzt die Electrification des Gefässes untersucht. War die Schale leer gewesen, so erfolgten nun bald negative, bald positive Ausschläge, ohne Regelmässigkeit. Die negativen Ausschläge waren dabei oft wesentlich grösser als bei freiem Gefäss (ohne Schale), was nur als Influenzwirkung gedeutet werden kann.

Die positiven Ausschläge sind Folge schwacher Zerstreuung der positiven Ladung der Schale, die darüber gegangen hatte.

Wenn nun die + electrisirte Schale Aether enthalten hatte, waren die nachträglichen Ausschläge stets sehr gross +; meist ging der Lichtzeiger über die Scala hinaus. Hr. Exner's Beobachtungen hierüber finden also volle Bestätigung. Nichtsdestoweniger ist der von ihm gezogene Schluss, dass hierdurch die Mitnahme der Electricität durch die Aetherdämpfe bewiesen sei, nicht haltbar. Denn ich erhielt nach Qualität und Quantität genau ebensolche Resultate, wenn die Füllung der Schale nicht Aether, sondern unter 0° C. abgekühltes Salzwasser einer Kältemischung war. In diesem Falle fand aber sicher keine Verdunstung statt, sondern im Gegentheil Condensation der Wasserdämpfe aus der umgebenden Luft auf der abgekühlten Schale. Wenn trotzdem auch in diesem Falle Electricität von der + electrisirten Schale auf das darunter stehende Gefäss übertragen war, so konnte die Ursache nur in Luftströmungen liegen, die durch die starke Temperaturdifferenz erzeugt waren. Die an der kalten Messingschale herabsinkende Luft, oder vielmehr die in ihr schwebenden Staubtheilchen, entführen der Schale Electricität und geben sie an das unten stehende Gefäss ab. Ganz ebenso muss der Vorgang sein, wenn die Schale mit Aether gefüllt ist; denn durch die Aetherverdampfung wird ja die Schale ebenfalls sehr stark abgekühlt.

Es ist überflüssig, die einzelnen Versuche aufzuzählen; nur soviel sei gesagt: Wenn überhaupt die Bedingungen der Versuchsanordnung richtig getroffen waren, sodass von der Aether enthaltenden + electrisirten Schale + Electricität auf das untergestellte Gefäss überging, so ging ausnahmslos auch von der mit Kältemischung gefüllten + electrisirten Schale + Electricität in mindestens demselben Betrag auf das untergestellte Gefäss über. Derartige Versuche können also sicher nicht als Beweis dafür dienen, dass die von einer electrisirten Flüssigkeit auf-

steigenden Dämpfe Electricität mit sich nehmen. Die ganze Versuchsanordnung ist übrigens wenig empfehlenswerth und namentlich zu quantitativen Bestimmungen ungeeignet, denn auch bei scheinbar ganz gleicher Anordnung sind die Resultate oft wenig übereinstimmend. Daher habe ich noch eine andere Methode angewendet, die quantitative Ergebnisse zu versprechen schien.

3. Der Grundgedanke dieser Methode ist folgender: Wenn die Dämpfe einer electrisirten Flüssigkeit wirklich Electricität mit sich nehmen, so muss sich von einer isolirt aufgestellten electrisirten flachen Schale voll verdunstender Flüssigkeit die Electricität schneller zerstreuen als von der leeren Schale. Man hat also nur die Geschwindigkeiten zu vergleichen, mit welchen bei voller und bei leerer Schale das Potential von demselben Anfangswerth aus abnimmt. Bei der Verwirklichung dieses Gedankens nahm ich Abstand von der Anwendung des Mascart'schen Electrometers, um die Schale nicht auf einen eigenen Isolator stellen zu müssen, dessen Einfluss die Erscheinung compliciren konnte. Die Electroden dieses Electrometers sind nämlich zu gebrechlich, um die Schale an ihnen selber aufzuhängen. Also befestigte ich die Schale direct auf einem sogenannten Goldblattelektroskop. Als solches diente ein Beetz'sches Electroskop mit Aluminiumblättchen, welche sich im Innern eines breiten liegenden Messingcylinders befinden, dessen Enden durch Glasplatten geschlossen sind. Die Blättchen hängen an einem Messingstab, der durch Ebonit und Schellack isolirt durch das Gehäuse hindurchgeht. Ausser dieser Isolirvorrichtung werden in den folgenden Versuchen keinerlei Isolatoren verwendet.

Die Schale mit der Flüssigkeit darf nun nicht unmittelbar an Stelle des Knopfes auf das Electroskop geschraubt werden; denn die herabsinkenden Dämpfe oder kalten Luftströmungen, oder auch nur die Kälte der abgekühlten Schale, die bis zum Isolator geleitet wird, verändern, wie ich mich überzeigte, das Isolationsvermögen desselben in viel zu hohem Grade. Daher wurde statt des Knopfes zunächst ein 20 cm langer, horizontaler, in einen Knopf endigender Messingarm

angesetzt und von seinem Knopfe aus die (schon zu den früheren Versuchen benutzte) Schale mittelst der drei Drähte herabhängen gelassen. So konnte der Isolator möglichst wenig durch Kälteleitung verändert werden. Ein grosser Metallschirm mit rundem Loch für den freien Durchtritt des horizontalen Armes hielt die Dämpfe möglichst von dem Isolator ab. Der Beobachter war immer durch mit Stanniol bekleidete Pappschirme vom Electroskop getrennt; das Electroskopgehäuse und die Schirme waren zur Erde abgeleitet.

Nach Mittheilung einer Ladung (durch einen geriebenen Ebonitstab) nimmt die Blättchendivergenz langsam ab. Dieses allmähliche Sinken des Potentials verfolgte ich durch ein fest aufgestelltes, bei allen Versuchen unverrückt stehen gelassenes Mikroskop von horizontaler Lage mit 100-theiligem Ocularmikrometer. Der Werth eines Theilstriches war $\frac{1}{20}$ mm. Weil nun Zehntel noch geschätzt werden konnten, so liessen sich Verrückungen des beobachteten Blättchens im Betrage von $\frac{1}{200}$ mm noch eben wahrnehmen. Im unelectrischen Zustande stand das eine Blättchen, welches stets allein beobachtet wurde, ganz am Rande des Gesichtsfeldes (beim Theilstrich — 13). Beim Electrisiren macht es einen Ausschlag durch das Gesichtsfeld hindurch, eventuell über den anderen Rand desselben hinaus. Man entzieht nun, durch Anlegen eines mittelmässig leitenden Stäbchens, soviel Electricität, dass das Blättchen wenig über + 82 steht; dann überlässt man das weitere Sinken der Zerstreuung. Wenn das Blättchen ungefähr bis auf 79 oder wenig tiefer gekommen ist, notirt man die Zeit, sowie die Stellung des Blättchens und beobachtet nun weiter an einer Secundenuhr mindestens 8 Minuten lang, bis zu welchem Strich das Blättchen nach je 2 Minuten gesunken ist. So kennt man die Strecken, welche das Blättchen in je 2 Minuten durchlaufen hat, und schliesst daraus auf die Geschwindigkeit der Zerstreuung der Electricität. Die Durchlaufung der Strecke 80 bis 60 entspricht einer Verminderung des Winkels, den das Blättchen mit der Verticalrichtung macht, um weniger als 2°, nämlich etwa von 8° 38' bis 6° 48'. Diese Ausschläge

entsprechen (nach freilich sehr roher Schätzung) Potentialwerthen von 200 bis 300 Daniell.

4. Vorversuche. Den Hauptversuchen mussten Vorversuche vorausgeschickt werden, um den Einfluss verschiedener Nebenumstände festzustellen. Zuerst suchte ich den Einfluss des Rückstandes im Isolator kennen zu lernen. Wenn das Electroskop sehr stark geladen und dann wieder soweit entladen wurde, dass das Blättchen auf 80 stand, so änderte es nun von selbst seine Stellung ziemlich schnell im Sinne wachsenden Ausschlages bis gegen Theilstrich 90; man hatte es also mit einer Rückstandserscheinung zu thun: Die disponible Ladung wuchs von selbst. Ich gebe nur ein Beispiel aus vielen.

Am 13. October 1887 wurde das Electroskop 1 Minute lang sehr stark geladen gehalten und dann bis Strich 80 entladen; der Ausschlag wuchs darauf von selbst bis 88. Jetzt wurde so viel Electricität entzogen, dass das Blättchen bis 81 sank. Von dem Moment, wo der Strich 80 passirt wurde, beobachtete ich dann das weitere in je 2 Minuten eintretende Sinken. Im Anschluss an diesen Versuch machte ich sofort einen zweiten mit schwacher Anfangsladung. Ich brachte das Blättchen auf 82 herab, es sank weiter, ohne von selbst gestiegen zu sein; und ich beobachtete wieder, vom Momente des Passirens von Strich 80 an, das weitere in je 2 Minuten eingetretene Sinken. Die Ergebnisse dieses Doppelversuches waren:

| Zeit | Sinken bei | | Differenz |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | starker | schwacher | |
| | Anfangsladung | | |
| 0—2 Minuten | 1,8 ^{sc} | 3,1 ^{sc} | 1,3 ^{sc} |
| 2—4 " | 2,3 | 3,1 | 0,8 |
| 4—6 " | 2,6 | 3,0 | 0,4 |

1 Scalenthail sc = $\frac{1}{20}$ mm.

Man bemerkt, dass die Blättchen nach voraufgegangener starker Ladung viel langsamer zusammenfallen, als nach schwacher Ladung. Hat man also, unter übrigens gleichen Umständen, bei zwei Versuchen Anfangsladungen von sehr verschiedener Stärke benutzt und sie etwa auch verschieden

lange andauern lassen, so erfolgt das Zusammenfallen der Blättchen von derselben Anfangsstellung aus doch nie auf identische Weise, zumal in den ersten paar Minuten, während deren sich der Einfluss des Rückstandes am meisten fühlbar macht. Der hier erkannte Einfluss des zum Messinstrument gehörigen Isolators mahnte zur äussersten Vorsicht. Daher wurde bei den endgültigen Versuchen immer eine möglichst gleiche Anfangsladung ertheilt (Ausschlag bis zum Strich 110 bis 120), dieselbe möglichst schnell bis etwa zum Ausschlag 82 vermindert, und der weitere Zusammenfall — wie erwähnt — erst etwa von Strich 79 an beobachtet, um den in den ersten Minuten zu befürchtenden unregelmässigen Einfluss des Rückstandes möglichst auszuschliessen.

Ferner glaube ich bemerkt zu haben, dass wenn nach mehrstündiger Unterbrechung mehrere Versuche dicht hintereinander unter möglichst gleichen Umständen angestellt wurden, die Blättchen beim ersten Versuch meist etwas schneller zusammenfielen als bei den folgenden, so als ob ein Theil der zugeführten Electricität zur Ladung des Isolators verbraucht würde. Als Beispiel diene der erste Versuch vom 14. October 1887 (I), verglichen mit dem unmittelbar danach angestellten (II) und mit einem 2 Stunden später angestellten (III), nachdem inzwischen dauernd mit dem Instrumente gearbeitet war.

| | I | II | III |
|-------------|------|------|-----|
| 0—2 Minuten | 3,1 | 2,65 | 2,7 |
| 2—4 " | 2,5 | 2,55 | 2,6 |
| 4—6 " | 2,7 | 2,3 | 2,3 |
| 6—8 " | 2,1 | 2,1 | 2,2 |
| 0—8 Minuten | 10,4 | 9,6 | 9,8 |

Der während 8 Minuten durchlaufene Weg des Blättchens ist im ersten Versuche (10,4 Scalentheile) merklich grösser als in den beiden anderen. Solche Bemerkung machte ich wiederholt, jedoch nicht ohne Ausnahme. Doch sind im Folgenden aus Vorsicht alle Versuche weggelassen, welche als erste nach mehrstündiger Unterbrechung angestellt wurden.

5. Weitere Vorversuche. Von weit störenderem Einflusse als der Rückstand zeigten sich die Aenderungen der Luftfeuchtigkeit und der Temperatur, wie das ja schon Coulomb erkannt hat. Infolge dieser Umstände waren Beobachtungen, die an verschiedenen Tagen oder nur zu wesentlich verschiedenen Stunden desselben Tages angestellt waren, überhaupt nicht miteinander vergleichbar. Um eine Vorstellung von der Verschiedenheit der Zerstreuung zu verschiedenen Tageszeiten und an verschiedenen Tagen zu geben, auch wenn die übrigen Bedingungen möglichst unverändert waren, kann folgende Zusammenstellung der Geschwindigkeiten des Blättchens in fünf verschiedenen Versuchen dienen, deren jeder als zweiter Versuch nach längerer Unterbrechung angestellt war.

| | 8. Oct. Nachm. | 12. Oct. Vorm. | 14. Oct. Vorm. | 14. Oct. Nachm. | 15. Oct. Vorm. |
|-------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 0—2 Minuten | 6,65 | 0,8 | 2,65 | 3,7 | 1,9 |
| 2—4 „ | 6,0 | 0,9 | 2,55 | 3,4 | 1,9 |
| 4—6 „ | 5,4 | 1,0 | 2,3 | 3,3 | 1,6 |
| 6—8 „ | 5,55 | 1,0 | 2,1 | 3,3 | 1,6 |
| 0—8 Minuten | 23,6 | 3,7 | 9,6 | 13,7 | 7,0 |

Wenn man hier auch die beiden ersten, höchst aussergewöhnlichen Versuche weglässt, so zeigen doch auch die übrigbleibenden, dass die Zerstreuung an einem Tage doppelt so gross sein kann als an einem anderen. Daraus entspringt die Nöthigung, immer nur solche Versuche miteinander zu vergleichen, die unmittelbar nacheinander, also unter möglichst gleichartigen Bedingungen des Luftzustandes, angestellt worden sind.

Ich glaubte anfangs den Isolator dadurch jedesmal in denselben Zustand versetzen zu können, dass ich ihn dicht vor jeder Beobachtungsreihe mit der Bunsenflamme stark erhitze. Dies Verfahren bewährte sich aber nicht, sodass ich es fallen liess.

6. Letzte Vorversuche. Um mich zu überzeugen, ob bei meiner Versuchsanordnung auch wirklich ein wesentlicher Theil der Electricität sich in die Luft zerstreut, und nicht etwa der Haupttheil durch den Isolator

entflieht, stellte ich am 14. October vormittags nahe nach-einander drei Versuche mit gleichem Anfangspotential an, bei deren mittelstem ich aber die am Horizontalarm hängende Schale entfernt hatte, sodass bei diesem Versuche eine wesentlich kleinere Oberfläche des geladenen Leiters mit der Luft in Berührung stand. Hier musste dann die Zerstreuung geringer sein. Die Zerstreuungsgeschwindigkeiten waren:

| Zeit | Mit Schale | Ohne Schale | Mit Schale |
|-------------|------------|-------------|------------|
| 0—2 Minuten | 2,7 | 2,2 | 2,7 |
| 2—4 „ | 2,25 | 2,1 | 2,6 |
| 4—6 „ | 2,5 | 1,8 | 2,3 |
| 6—8 „ | 2,2 | 1,75 | 2,2 |
| 0—8 Minuten | 9,65 | 7,85 | 9,8 |

Diese Versuchsreihe, sowie mehrere analog angestellte, lehren übereinstimmend, dass die Zerstreuung wesentlich langsamer erfolgt, wenn der Leiter durch Entfernung der Schale verkleinert ist, während die Zerstreuung bei dem ersten und letzten Versuche (mit Schale) recht befriedigend übereinstimmt. Hiermit ist nachgewiesen, dass sich ein wesentlicher Theil der Ladung wirklich in die umgebende Luft zerstreut.

7. Versuche mit Wasser. Um zu ermitteln, ob bei der Verdunstung des Wassers von Zimmertemperatur Electricität durch die Dämpfe fortgeführt wird, stellte ich am 8. October vormittags bei 18,0° C. dicht hintereinander drei Versuche an, die beiden ersten mit leerer Schale, während sich beim dritten reines Wasser von Zimmertemperatur in der Schale befand. Die Zerstreuungsgeschwindigkeiten waren:

| Zeit | Schale leer | Schale leer | Schale voll Wasser |
|-------------|-------------|-------------|--------------------|
| 0—2 Minuten | 4,4 | 4,45 | 4,8 |
| 2—4 „ | 4,3 | 4,4 | 4,3 |
| 4—6 „ | 4,05 | 4,0 | 4,2 |
| 6—8 „ | 3,85 | 4,05 | 4,0 |
| 0—8 Minuten | 16,6 | 16,9 | 16,8 |

In diesen, wie in anderen Versuchen von derselben Anordnung, zeigt sich keine Spur eines Einflusses der Wasserausfüllung auf die Zerstreung der Electricität.

Sodann benutzte ich kochendes Wasser, das in die stark erhitzte Schale gegossen und, nach Beruhigung des Aufwallens, electricisirt wurde. Am 17. October wurden unmittelbar nacheinander fünf Versuche angestellt: der erste mit leerer Schale von Zimmertemperatur (20° C.), der zweite mit stark erhitzter leerer Schale, die sodann electricisirt wurde, der dritte mit der Schale voll heissen Wassers, der vierte mit erhitzter leerer, der fünfte mit der Schale voll heissen Wassers.

| Zeit | Leere Schale von 20° | Leere Schale erhitzt | Schale voll heiss. Wasser | Leere Schale erhitzt | Schale voll heiss. Wasser |
|-------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|---------------------------|
| 0—2 Minuten | 2,6 | 3,2 | 3,0 | 2,9 | 2,9 |
| 2—4 „ | 2,6 | 2,8 | 2,5 | 2,5 | 2,9 |
| 4—6 „ | 2,0 | 3,1 | 2,8 | 2,75 | 2,6 |
| 6—8 „ | 2,0 | 2,6 | 2,6 | 2,65 | 2,7 |
| 0—8 Minuten | 9,2 | 11,7 | 10,9 | 10,5 | 11,1 |

Während der ersten 8 Minuten nach Passirung des Striches durchlief das Blättchen also bei leerer Schale von 20° 9,2 Scalentheile, bei leerer erhitzter Schale (im Mittel beider Versuche) 11,25 Scalentheile, bei erhitzter Schale voll heissen Wassers (im Mittel beider Versuche) 11,0 Scalentheile. Die Anwesenheit des heissen stark verdampfenden Wassers in der Schale hat hiernach keinen nachweisbaren Einfluss auf die Zerstreung der Electricität. Es nehmen also die Wasserdämpfe, mögen sie von einer mehr oder weniger heissen, electricischen Wasserfläche aufsteigen, keine nachweisbaren Electricitätsmengen mit.

Dass die Electricitätszerstreung von der erhitzten Schale schneller stattfindet als von der kalten, hat seinen Grund offenbar in den durch die Temperaturdifferenz erzeugten Luftströmungen, worüber unten (9.) mehr.

8. Versuche mit Aether und mit Kältemischung. Der in die flache Schale gegossene Aether verdunstete so schnell, dass die Schale schon nach 9 Minuten fast

trocken ist. Dabei ist der Wärmeverbrauch so bedeutend, dass man unterhalb der Schale mit der Hand den kalten herabsinkenden Strom von Luft und Aetherdampf fühlen kann. Diese Bemerkung führte dazu, jedesmal unter möglichst gleichen Umständen Parallelversuche mit Aether und mit unter 0° abgekühltem Salzwasser, einer Kältemischung von Kochsalz und Schnee entstammend, anzustellen. Die hauptsächlichsten meiner Versuchsreihen theile ich nun mit. Am 8. October nachmittags stellte ich unmittelbar nacheinander zwei Versuche mit leerer Schale und zwei Versuche mit Kältemischung an, darauf nach einviertelstündiger Pause, während deren aber das Electroskop schwach geladen blieb, einen Versuch mit leerer Schale, einen mit Aether und wieder einen mit leerer Schale.

| Zeit | Leere Schale | Leere Schale | Kältemisch. | Kältemisch. | Leere Schale | Aether | Leere Schale |
|----------|--------------|--------------|-------------|-------------|--------------|--------|--------------|
| 0—2 Min. | 6,4 | 6,65 | 7,1 | 7,8 | 7,7 | 9,0 | 8,0 |
| 2—4 " | 5,9 | 6,0 | 7,3 | 7,1 | 7,1 | 8,0 | 7,4 |
| 4—6 " | 5,5 | 5,4 | 6,6 | 6,8 | 6,7 | 7,2 | 7,1 |
| 6—8 " | 5,4 | 5,55 | 5,5 | 6,2 | 6,5 | 6,8 | 6,5 |
| 0—8 Min. | 23,2 | 23,6 | 26,5 | 27,9 | 28,0 | 31,0 | 29,0 |

Diese Versuche lehren, besonders bei Betrachtung der Zahlen der ersten Horizontalreihe, folgendes: Während die ersten beiden Versuchsreihen (mit leerer Schale) sehr gleichartigen Verlauf der Zerstreuung zeigen, ist letztere bei Füllung der Schale mit sehr kaltem Wasser wesentlich beschleunigt; beim ersten Kälteversuch durchläuft das Blättchen binnen acht Minuten 2,9 Scalentheile mehr als beim vorhergehenden Leerschalenversuch. Durch die Versuche mit dem kalten Wasser scheint das Isolationsvermögen so verschlechtert zu sein, dass bei dem 15 Minuten später angestellten Leerschalenversuch die Zerstreuung eben so gross ist wie bei dem zuletzt vorhergegangenen Versuch mit der Kältemischung. Aber bei dem nun folgenden Versuch mit Aether durchläuft das Blättchen doch binnen 8 Minuten noch 3,0 Scalentheile mehr. Die Beschleunigung der Zerstreuung gegenüber dem vorhergehenden Leerschalenversuch hat also merklich gleichviel betragen, wenn

man die Schale mit sehr kaltem Wasser, oder wenn man sie mit Aether gefüllt hat. Beiläufig sei bemerkt, dass alle an diesem Nachmittage beobachteten Zerstreuungsgrößen bei weitem grösser waren, als ich sie je sonst beobachtet habe.

Die Versuche vom 14. October Vormittags ergaben:

| Zeit | Leere Schale | Aether | Leere Schale |
|-------------|--------------|--------|--------------|
| 0—2 Minuten | 2,4 | 3,0 | 2,7 |
| 2—4 " | 2,6 | 2,5 | 2,3 |
| 4—6 " | 2,15 | 2,55 | 2,5 |
| 6—8 " | 2,0 | 2,1 | 2,2 |
| 0—8 Minuten | 9,15 | 10,15 | 9,7 |

Vergleicht man das Mittel der beiden Leerschalenversuche mit dem Aetherversuch, so zeigt sich, dass in letzterem das Blättchen binnen 8 Minuten 0,73 Scalentheile mehr durchlaufen. Also lehrt auch diese Versuchsreihe eine freilich nur geringe Beschleunigung der Zerstreuung durch die Aetherfüllung der Schale.

Aus der grösseren Zahl von Versuchen vom 14. October nachmittags theile ich drei unmittelbar nacheinander angestellte mit, der erste mit leerer Schale, die beiden folgenden mit Aether; sodann fünf weitere, nach viertelstündiger Unterbrechung angestellte, theils mit leerer Schale, theils mit Kältemischung.

| Zeit | Leere Schale | Aether | Aether | Leere Schale | Kältemisch. | Leere Schale | Kältemisch. | Leere Schale |
|----------|--------------|--------|--------|--------------|-------------|--------------|-------------|--------------|
| 0—2 Min. | 3,7 | 3,7 | 3,7 | 3,7 | 3,7 | 3,6 | 4,0 | 4,5 |
| 2—4 " | 3,4 | 3,6 | 3,3 | 3,2 | 3,2 | 3,2 | 3,8 | 3,4 |
| 4—6 " | 3,3 | 3,4 | 3,4 | 3,1 | 3,0 | 3,1 | 3,4 | 3,4 |
| 6—8 " | 3,3 | 3,2 | 3,1 | 3,3 | 3,0 | 3,1 | 3,1 | 3,3 |
| 0—8 Min. | 13,7 | 13,9 | 13,5 | 13,3 | 12,9 | 13,0 | 14,3 | 14,6 |

Bildet man aus den Zahlen der beiden Aetherversuche das Mittel, so findet man es übereinstimmend mit dem Leerschalenversuch (13,7).

In diesem Falle war also gar kein Einfluss des Aethers erkennbar.

Auch der erste Kältemischungsversuch unterscheidet

sich nicht merklich von dem dicht vorher und dem dicht nachher angestellten Leerschalenversuch. Bei den letzten Versuchen nahm aber die Isolirung allmählich ab, vielleicht weil die Zimmertemperatur von 17,5 auf 16,7° gesunken war. Ich bilde daher das Mittel der letzten drei Leerschalenversuche und vergleiche es mit dem Mittel der beiden Kältemischungsversuche und finde:

| Zeit | Leere Schale | Kältemischung | Differenz |
|-------------|--------------|---------------|-----------|
| 0—2 Minuten | 3,93 | 3,85 | +0,08 |
| 2—4 „ | 3,27 | 3,50 | —0,23 |
| 4—6 „ | 3,20 | 3,20 | ±0,00 |
| 6—8 „ | 3,23 | 3,05 | +0,18 |
| 0—8 Minuten | 13,63 | 13,60 | +0,03 |

Hier ist also nicht der mindeste Einfluss der Kältemischung nachweisbar, gerade so wie vorher kein Einfluss des Aethers.

Als letzte sei die Versuchsreihe vom 15. October vormittags mitgetheilt. Nach dem Versuch mit Kältemischung fand eine viertelstündige Unterbrechung statt, während deren aber — wie immer in solchen Fällen — das Electroskop schwach geladen gehalten war. Die folgenden fünf Versuche schlossen sich dann unmittelbar an.

| Zeit | Leere Schale | Kältemisch. | Leere Schale | Aether | Leere Schale | Aether | Leere Schale |
|----------|--------------|-------------|--------------|--------|--------------|--------|--------------|
| 0—2 Min. | 1,9 | 2,5 | 1,85 | 2,0 | 2,5 | 2,0 | 2,0 |
| 2—4 „ | 1,9 | 1,95 | 1,85 | 1,95 | 1,9 | 1,9 | 1,9 |
| 4—6 „ | 1,6 | 1,75 | 1,7 | 1,7 | 1,7 | 1,8 | 1,85 |
| 6—8 „ | 1,6 | 1,5 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,45 | 1,4 |
| 0—8 Min. | 7,0 | 7,7 | 6,3 | 7,15 | 7,7 | 7,15 | 7,15 |

Der Kältemischungsversuch lässt gegen den dicht Vorhergehenden Leerschalenversuch eine geringe Beschleunigung der Zerstreuung erkennen (0,7), besonders in den ersten Minuten; etwa ebenso gross ist die Beschleunigung beim ersten Aetherversuch gegenüber dem dicht vorhergegangenen Leerschalenversuch (0,85), wieder besonders in den ersten Minuten. Die folgenden Versuche freilich verrathen keinen nennenswerthen Einfluss des Aethers auf die Zerstreuung der Electricität; bildet man nämlich das Mittel der drei letz-

ten Leerschalenversuche und vergleicht es mit dem Mittel der beiden Aetherversuche, so findet man sie im wesentlichen übereinstimmend.

| Zeit | Leere Schale | Aether | Differenz |
|----------|--------------|--------|-----------|
| 0—2 Min. | 2,12 | 2,00 | + 0,12 |
| 2—4 " | 1,72 | 1,92 | — 0,20 |
| 4—6 " | 1,75 | 1,75 | ± 0,00 |
| 6—8 " | 1,47 | 1,48 | — 0,01 |
| 0—8 Min. | 7,06 | 7,15 | — 0,09 |

Ausser den mitgetheilten habe ich noch mehrere Versuche derselben Art gemacht, aber ohne wesentlich andere Ergebnisse.

Zusammenfassend kann ich sagen, dass sich die Aetherfüllung der Schale in manchen Fällen ohne nennenswerthen Einfluss auf die Electricitätszerstreuung gezeigt, in anderen Fällen aber eine Beschleunigung derselben bewirkt hat. Unter allen Umständen war aber das Verhalten der mit Kältemischung gefüllten Schale in den gleichzeitig angestellten Parallelversuchen mit dem Verhalten der Aetherschale übereinstimmend. Daraus geht hervor, dass jedenfalls nicht die Dämpfe als Träger der Electricität wirksam gewesen sind, sondern dass nur die infolge der Temperaturdifferenz eingetretenen Luftströmungen für die veränderte Electricitätszerstreuung verantwortlich gemacht werden können.

9. Einfluss der Luftbewegung auf die Electricitätszerstreuung. Schon in den nach Exner's Verfahren (§ 2, p. 928) ausgeführten Versuchen, und dann in den eben besprochenen mit Kältemischung (§ 8) und auch mit erhitzter Schale (§ 7, p. 935) hat sich sehr deutlich eine Beschleunigung der Electricitätszerstreuung durch stärkere Bewegung der Luft — wie sie durch Temperaturdifferenzen erzeugt wird — gezeigt. Dadurch ist dann auch die Zerstreuungsbeschleunigung von der mit Aether gefüllten Schale ohne weiteres verständlich geworden. Ich hielt es aber doch für nöthig, diese Beschleunigung durch Bewegung der Luft auch noch direct nachzuweisen. Dazu wurde zwischen je zwei Mikroskopablesungen Luft mit einem Handblasebalg ziemlich stark gegen die Schale oder an ihr vorbei geblasen, wobei

sie einigermassen ins Schwanken gerieth. Ein solcher Versuch wurde z. B. am 14. October vormittags zwischen dem in § 6, p. 934 mitgetheilten Versuche mit Schale und dem folgenden ohne Schale eingeschaltet. Also ist er mit dem Mittel der obigen beiden Schalenversuche, deren erster dicht vor ihm, deren zweiter $\frac{1}{4}$ Stunde nach ihm angestellt wurde, direct zu vergleichen.

| Zeit | Bewegte Luft | Stille Luft | Differenz |
|-------------|-----------------|----------------|-----------|
| 0—2 Minuten | 3,4 | 2,70 | 0,70 |
| 2—4 " | 2,8 | 2,42 | 0,38 |
| 4—6 " | 3,1 | 2,40 | 0,70 |
| 6—8 " | 2,8 | 2,20 | 0,60 |
| 0—8 Minuten | 12,1 | 9,72 | 2,38 |

Hier zeigt sich also eine sehr wesentliche Beschleunigung der Zerstreuung durch das Blasen. Dasselbe Ergebniss fand ich noch öfter.

Später habe ich auch noch eine etwas geänderte Versuchsanordnung angewandt. Ich electricisirte nämlich die Schale und beobachtete die Electricitätszerstreuung, indem ich die Schale erst einige Minuten ruhig hängen liess, sie dann während einiger Minuten zwischen je zwei Ablesungen mit dem Blasebalg anblies, sie dann wieder einige Minuten ruhig hängen liess u. s. f. So erhielt ich am 3. Januar 1888 folgende Beobachtungsreihe, in der die dritte Spalte die vom Blättchen in je 2 Minuten durchlaufenen Strecken enthält.

| Zeit | Strich | Strecke | Luftbewegung |
|--------------|--------|---------|---------------------|
| 11h 25m 0sec | 84,8 | 0,9 | } Schale ruhig |
| 27 | 83,9 | 0,8 | |
| 29 | 83,1 | 0,9 | |
| 31 | 82,2 | 1,2 | |
| 33 | 81,0 | 0,9 | } Schale angeblasen |
| 35 | 80,1 | 1,2 | |
| 37 | 78,9 | 1,1 | |
| 39 | 77,8 | 0,9 | |
| 41 | 76,9 | 0,9 | } Schale ruhig |
| 43 | 76,0 | 1,0 | |
| 45 | 75,0 | 0,9 | |
| 47 | 74,1 | 1,8 | |
| 49 | 72,8 | | } Schale angeblasen |

In der ersten und zweiten Periode des ruhigen Hängens der Schale betrug hiernach die minutlich durchlaufene Strecke 0,43 und 0,46 Scalentheile, während in den beiden Blaseperioden minutlich 0,55, resp. 0,65 Scalentheile durchlaufen wurden.

Ich stellte noch einige ganz analoge Versuche, jedoch mit Weglassung der Schale an, sodass nur der Knopf des Horizontalarmes angeblasen wurde. So fand ich z. B. am 3. Januar 1883:

| Zeit | Strich | Strecke | Luftbewegung |
|--|--------|---------|---------------|
| 11 ^h 59 ^m 0 ^{sec} | 89,4 | | |
| 12 1 0 | 88,3 | 1,1 | } Ohne Blasen |
| 3 | 87,4 | 0,9 | |
| 5 | 86,5 | 0,9 | |
| 7 | 85,0 | 1,5 | |
| 9 | 83,7 | 1,3 | } Mit Blasen |
| 11 | 83,0 | 0,7 | |
| 13 | 82,1 | 0,9 | |
| 15 | 81,4 | 0,7 | } Ohne Blasen |
| 17 | 80,7 | 0,7 | |
| 19 | 79,7 | 1,0 | |
| 21 | 78,8 | 0,9 | } Mit Blasen |
| 23 | 78,0 | 0,8 | |
| 25 | 77,1 | 0,9 | |
| 27 | 76,3 | 0,8 | } Ohne Blasen |
| 29 | 75,7 | 0,6 | |
| 31 | 74,9 | 0,8 | |
| 33 | 73,9 | 1,0 | |
| 35 | 73,0 | 0,9 | } Mit Blasen |

Also hat das Blättchen in den aufeinander folgenden Perioden ohne und mit Blasen minutlich folgende Strecken durchlaufen:

| | | | |
|-------------|------|------|-------|
| Ohne Blasen | 0,48 | 0,38 | 0,39 |
| Mit " | 0,58 | 0,45 | 0,47. |

Aus diesen Versuchen folgt, dass die Electricitätszerstreuung in bewegter Luft schneller geschieht, als in ruhiger, vermuthlich infolge der grösseren Anzahl der in gleichen Zeiten herangeführten Staubtheilchen, die sich an dem electrischen Körper laden. Jedenfalls ist nicht eine etwaige entgegengesetzte Electrisirung der durch den Blasebalg geschickten Luft als Ursache der schnelleren Zer-

streuung anzusehen; denn die Beschleunigung der Zerstreuung durch das Blasen liess sich ebensogut nachweisen, wenn die Schale (+), als wenn sie (-) geladen war.

Ich bin auf diesen Gegenstand etwas ausführlicher eingegangen, weil ältere Versuche von Matteucci¹⁾ das entgegengesetzte Resultat ergeben hatten, und weil letzteres — trotz seiner inneren Unwahrscheinlichkeit — Eingang in gute Werke über Electricität gefunden hat.²⁾ Ich kann auf Grund meiner mitgetheilten Versuche die Ergebnisse Matteucci's nur für falsch halten.

10. Die wesentlichsten Ergebnisse sind folgende:

1) Aus Hrn. Exner's Versuchen über den Uebergang der Electricität von einer mit Aether gefüllten Schale auf ein anderes Gefäss lässt sich kein Schluss auf die Mitnahme der Electricität durch die Aetherdämpfe ziehen.

2) Versuche über Zerstreuung der Electricität lassen keine Spur einer Mitnahme der *E* durch die Dämpfe von Wasser oder von Aether erkennen.

3) Beiläufig hat sich ergeben, dass Bewegung der Luft die Electricitätszerstreuung beschleunigt.

Nachdem also die den Blake'schen Ergebnissen scheinbar widersprechenden des Hrn. Exner als hinfällig erwiesen, und die Blake'schen Resultate durch meine gänzlich anders angeordneten Versuche über Zerstreuung vollständig bestätigt sind, darf man behaupten, dass eine Mitnahme der Electricität durch die Dämpfe einer electrisirten Flüssigkeit bisher durchaus nicht nachweisbar ist.

Zu Gunsten dieser Anschauung lässt sich schliesslich nur noch eine allgemeine Ueberlegung anführen, nämlich die: dass die Electricität eines frei schwebenden geladenen Tropfens beim gänzlichen Verdunsten desselben doch an das umgebende gasförmige Medium übergehen muss! Indessen scheint die

1) Matteucci, Ann. de chim. et de phys. (3) 28. p. 386. 1850.

2) E. Mascart, Handb. d. stat. Electr. Deutsch von Wallentia. 1. § 41. p. 101. Wien 1889. G. Wiedemann, Die Lehre v. d. Electr. 4. 2. Abth. p. 610 gibt das Resultat als „unsicher“ an.

V
S
zu
bu
A
co
H
Zi
un
for
let
dur
we
kei
Lu
Un

eine
Elec
Wa
telle

XI
bein
Dre

im lu
von c
exper
anges
den 2

1)

Verwirklichung dieses gedachten Vorganges mit sehr grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein. Zwar erzeugt Hr Linss¹⁾ zu dem Zwecke mittelst eines isolirten, electricischen Zerstäubungsapparates eine Wolke kleiner geladener Tröpfchen. Alsdann zeigt ein Electrometer vermittelt eines Flammencollectors noch $\frac{1}{4}$ Stunde später beträchtliche Ausschläge. Hieraus kann man aber keinen Schluss auf Electrisirung der Zimmerluft ziehen. Denn die electrisirten Tröpfchen können unmöglich reine Flüssigkeit bleiben, sondern sie müssen sofort Staubtheilchen an sich ziehen und, wegen der Benetzung letzterer, mit ihnen verbunden bleiben. Wenn sie dann verdunsten, lassen sie die Staubtheilchen geladen zurück. — In welcher Weise die Electricität eines völlig reinen Flüssigkeitstropfens bei seinem Verdunsten sich der umgebenden Luft mittheilen kann, darüber sind wir zur Zeit gänzlich in Unkenntniss.

Somit glaube ich vollständig bewiesen zu haben, dass eine Theorie der Luftpolelectricität, welche die Mitnahme der Electricität durch die von der geladenen Erde aufsteigenden Wasserdämpfe zur Grundlage hat, bis jetzt jeder experimentellen Stütze entbehrt.

**XIII. Ueber die Volumenänderung von Gasen
beim Mischen; ein Beitrag zur Frage, ob der
Druck eines gesättigten Dampfes im Vacuum ein
anderer ist, als in einem Gase;
von Ferdinand Braun.**

(Hierzu Taf. VIII Fig. 4.)

1. Die Frage, ob die Spannung eines gesättigten Dampfes im luftleeren Raume die gleiche sei, wie in einem Gase, wird von denjenigen Physikern, welche sich mit dem Gegenstande experimentell beschäftigt haben, als noch nicht entschieden angesehen. Die thatsächlich eintretenden Aenderungen werden z. B. von Regnault auf secundäre Einflüsse zurück-

1) Linss, Meteorol. Zeitschr. October 1887. p. 356.

geführt, wobei das Niederschlagen von Flüssigkeit an den Wänden des Dampfraumes eine hervorragende Rolle spielt.

Auf theoretischem Wege scheint es, vorerst wenigstens, nicht möglich, eine Entscheidung herbeizuführen. Bei einer Behandlung mit den Principien der Thermodynamik zerfallen nämlich die Gleichungen stets in je zwei voneinander unabhängige; die eine, welche als gemeinschaftlichen Factor das Quantum der im tropfbaren Zustande vorhandenen Flüssigkeit enthält, sagt direct nichts über die gewünschte Relation aus; die andere, welche sich auf die gasförmigen Bestandtheile bezieht, lässt keine Schlüsse zu, solange man nicht über die Art, wie sich die Gesamtenergie oder -entropie des Gemenges aus derjenigen der ungemischten Bestandtheile zusammensetzt, bestimmte Formulierungen macht. Die Annahmen aber, welche man zu machen hat, setzen schon die Lösung der Frage selber — wenn auch in anderer Form — voraus. Man wird also auf das Experiment zurückverwiesen. Da nun die Theorie keinen Anhalt gibt für die Auswahl von Substanzen, welche am besten geeignet sind, eine Entscheidung zu ermöglichen, so ist man auf Ueberlegung nach Wahrscheinlichkeitsgründen angewiesen. Man darf wohl erwarten, dass diejenigen Gase, welche sich am stärksten in einer Flüssigkeit auflösen, auch auf die Spannkraft des Dampfes den grössten Einfluss ausüben. Wollte man aber mit gesättigten Dämpfen operiren, so würden alle die Einwände, welche gegen die früheren Beobachtungen dieser Art gemacht sind, wieder zur Geltung kommen. Ich habe deshalb versucht, ob der Druck eines dem Condensationspunkte nahestehenden Gases sich beim Mischen mit einem anderen Gase ändere. Da bekannt ist, dass flüssige schweflige Säure und flüssige Kohlensäure sich miteinander mischen, also jedenfalls auch gasförmige Kohlensäure sich beträchtlich in flüssiger schwefliger Säure lösen wird, so habe ich speciell gefragt, ob gasförmige SO_2 (bei 0°C. und Atmosphärendruck) beim Mischen mit CO_2 von gleicher Temperatur und gleichem Druck, eine Volumenänderung zeigt. Von denjenigen Einflüssen, welche Regnault anführt, kann hier nicht mehr die Rede sein.

Angenommen, man finde bei 0° eine Aenderung, so ist damit noch nicht direct gesagt, dass dies auch eintreten müsse, wenn die SO_2 als gesättigter Dampf, also noch in Berührung mit Flüssigkeit, welche neue Dampfmengen liefern kann, vorhanden wäre. Denkt man sich aber den Versuch nicht bei 0° , sondern bei höherer Temperatur, aber immer Atmosphärendruck angestellt, so wird die Volumenänderung in dem Maasse kleiner werden, als beide Gase sich dem idealen Zustande nähern. Umgekehrt also auch, wenn man die Temperatur vermindert. So würde man jedenfalls kurz oberhalb derjenigen Temperatur, bei welcher die schweflige Säure sich condensirt, eine grössere Druckänderung finden als bei 0° C. Und man wird daher nach der Continuität der Erscheinungen schliessen dürfen, dass auch die Spannung der gesättigten schwefligen Säure im Gasraume eine andere als im Vacuum ist. — Eine principielle Entscheidung scheint mir also auf diesem Wege möglich; auch über die Grösse des Effects wird man einen ungefähren Anhalt bekommen, wenn auch die Ermittlung einer genauen Zahl nur auf einem mühsamen Wege, nämlich durch Extrapolation aus mehreren Beobachtungsreihen bei verschiedener Temperatur möglich wäre.

Die Frage hat noch ein weiteres Interesse, weil die gleichen Schwierigkeiten, welche unser Problem einer theoretischen Behandlung entgegensetzt, sich in einer Reihe verwandter Aufgaben, z. B. bei der Dissociation von Gasen, wiederholen. Man geht bei ihrer Behandlung von der als erste Annäherung gemachten Hypothese aus, dass die Energie oder Entropie der gemischten Gase gleich der Summe der betreffenden Grössen der Componenten sei. Die Abweichungen, welche Theorie und Beobachtung bisweilen zeigen, rühren wohl theilweise davon her, dass diese Annahme nicht streng erfüllt ist. Insbesondere würde auch hier wieder in Betracht kommen, ob die Componenten im festen oder flüssigen Zustande starke Kräfte aufeinander ausüben. Es schienen mir daher einige Versuche, welche einen Anhalt zur Beurtheilung geben, wie weit derartige Voraussetzungen zulässig sind, von Interesse.

2. Die ersten Beobachtungen wurden mit dem Fig. 4 skizzirten Apparate angestellt. Die Volumina v_1 und v_2 des linken Theiles — ich will ihn den Mischapparat nennen — sind nahezu gleich. Der Apparat communicirt durch ein sehr enges, gezogenes Stahlröhrchen mit dem einen Schenkel eines Quecksilbermanometers M ; der andere Schenkel desselben durch ein gleiches Röhrchen mit einem Gefäß, dessen Volum $v_3 = v_1 + v_2$ ist; es soll das constante Volumen heißen. Mischapparat und constantes Volumen sind in Schnee gut verpackt. Die Gasvolumina, welche je mit dem rechten und linken Manometerschenkel communiciren, und welche nicht mit Schnee umgeben werden können, sind nahezu gleich und klein gegen das Volumen v_3 . Eine gleiche Temperaturänderung dieser Gase hat daher keinen Einfluss auf die Druckmessungen. Soweit möglich, sind sie noch dicht mit Watte umwickelt. — Der Gang eines Versuches ist nun der folgende: v_1 wird mit trockener SO_2 , v_2 mit trockener CO_2 gefüllt, beide bei Atmosphärendruck und 0°C . Der Raum oberhalb des Hahnes H_2 , das Manometer, soweit es nicht mit Quecksilber gefüllt ist, und das constante Volumen enthalten trockene CO_2 . Durch kurzes Oeffnen der Hähne H_6 , H_2 , H_7 und H_3 bewirkt man, dass in allen Theilen gleicher Druck hergestellt ist. Sind H_6 , H_2 und H_7 wieder geschlossen, so ist man für die Druckmessung nun vollständig unabhängig vom Barometerstand und dessen Schwankungen. Dann wird H_2 und H_3 dauernd geöffnet, und endlich H_4 . Ueber diesem Hahne steht eine Quecksilbersäule von ca. 90 mm Länge. Diese fällt jetzt in den unteren Raum und saugt die Röhre voll SO_2 , während in der parallel liegenden Röhre CO_2 aufsteigt. Die Gewichts-differenz der beiden Gassäulen bringt die Mischung der Gase hervor. Das Manometer zeigt nach Ablauf von 10 Minuten schon eine Druckänderung an, welche nach etwa einer Stunde einen Maximalwerth erreicht, auf dem es stehen bleibt. In der That war der Schluss des Apparates bei den ersten Beobachtungen so vollkommen, dass das Manometer drei Tage lang keine Aenderung mehr anzeigte.

Die Versuche, welche ich mit diesem Apparate Ende

März des vorigen Jahres anstellte, gaben bei Mischung von CO_2 und SO_2 eine Druckzunahme von 0,9 mm, bei H_2 und SO_2 eine Druckzunahme von 2,9 mm. — Die vorgeschrittene Jahreszeit gestattete nicht die Fortsetzung der Beobachtungen; inzwischen war aber gerade das Verhalten von CO_2 gegen SO_2 durch die Pictet'schen Betrachtungen von besonderem Interesse geworden, und ich habe daher die Beobachtungen diesen Winter nochmals aufgenommen.

Der Apparat blieb wesentlich der gleiche. Doch zog ich es vor (was vielleicht nicht einmal zweckmässig ist), die Mischung der Gase dadurch zu bewirken, dass man das untere, leichtere Gas aus seinem Behälter durch Quecksilber in den oberen drängte, dort beide einige Zeit zusammenliess und dann die gemischten Gase wieder auf das gleiche Anfangsvolumen brachte. Diese Operation wurde zur Controle noch ein oder einige Male wiederholt. Die Versuche wurden in einem Raume angestellt, dessen Temperatur dem Nullpunkte sehr nahe lag.

Bezeichnet man mit v das Volumen des Mischapparates, mit p den Barometerstand, welcher beim Schliessen des Apparates herrscht, mit c eine Constante, so ist, solange die Gase noch nicht gemischt sind:

$$vp = cRT,$$

wo R und T bekannte Bedeutungen haben. Während des Mischens tritt eine Aenderung von R ein. Ist v_3 und p_3 Volumen und Druck des constanten Volumens, so gelten die Gleichungen:

$$vdp + p dv = c T dR, \quad v_3 dp_3 + p_3 dv_3 = 0, \quad dv + dv_3 = 0.$$

Nennt man δp die am Manometer beobachtete Druckänderung, so ist:

$$\delta p = dp - dp_3,$$

wo positives δp einer Druckzunahme beim Mischen entspricht. Misst man δp in Centimetern Quecksilber, v in C^3 und nennt q den Querschnitt des (rechts und links gleichweiten) Manometerschenkels in C^2 , so ist $dv = q \cdot \delta p / 2$. Daber wird:

$$\frac{c T dR}{v} = \delta p + p \frac{q}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_3} \right) \delta p$$

oder:
$$\frac{dR}{R} = \frac{\delta p}{p} \left\{ 1 + p \frac{q}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_3} \right) \right\}.$$

Die Druckänderung Δp , welche sich somit durch die Mischung der Gase bei constantem Volumen einstellen würde, ist:

$$\Delta p = \frac{dR}{R} p.$$

3. Versuchsergebnisse¹⁾. Es war $q = 1,65 C^2$; p im Mittel = 71 C; $v = 315 C^3$; v_3 für eine Anzahl (mit einem * bezeichneter) Versuche = 287 C³; für eine andere = 1494 C³. Die Versuchsergebnisse sind:

| Gemischte Gase | δp | | | Δp | Gesamtmittel der Druckzunahme in Millim. Quecks. | $100 \frac{\Delta R}{R}$ |
|-----------------------------------|------------|--------|-------|------------|--|--------------------------|
| CO ₂ / SO ₂ | +0,9* | +0*,9 | — | 1,25 | 1,15 | 0,162 |
| | +0,9 | +0,9 | +1,0 | 1,10 | | |
| SO ₂ / H ₂ | +2,9* | +2*,95 | — | 4,06 | 3,94 | 0,555 |
| | +3,2 | +3,15 | +3,25 | 3,88 | | |
| CO ₂ / H ₂ | +0,6* | +0*,65 | — | 0,86 | 0,97 | 0,137 |
| | +0,92 | +0,80 | +0,85 | 1,05 | | |
| CO ₂ / Luft | +0,25* | — | — | 0,35 | 0,35 | 0,049 |
| H ₂ / Luft | 0,00 | — | — | — | — | — |
| N ₂ / H ₂ | +0,17 | — | — | 0,21 | 0,21 | 0,029 |
| N ₂ / SO ₂ | +2,20 | +2,10 | — | — | 2,63 | 0,371 |

4. Was die Bedeutung der Grössen Δp betrifft, so setzt sich diese Druckänderung aus je drei Gliedern zusammen. Wenn sich ein Gas 1 mit dem gleichen Volumen eines

1) Ich füge einige Worte, die Darstellung der Gase betreffend, hinzu: SO₂: aus krystallisirtem unterschwefligsauren Natron, mit etwa dem gleichen bis dreifachen Gewicht Wasser gemengt und concentrirter Schwefelsäure in einem höchstens zu $\frac{1}{3}$ vom Gemenge erfüllten Kolben. Die Säure fliesst durch einen Trichter, dessen untere Oeffnung nicht direct in die Flüssigkeit taucht, sondern mit einem Probirröhrchen umgeben ist, hinzu. Erwärmen im Wasserbad bis auf ca. 50° C. Waschen mit Wasser oder Lösung von unterschwefligsaurem Natron. Trocknen durch Perlröhren mit Schwefelsäure. Diese Methode ist sehr empfehlenswerth. Sie liefert einen constanten Strom reinen Gases. — CO₂: Kalkspath, reine Salzsäure, Waschen mit Na₂CO₃-Lösung und Trocknen mit Schwefelsäure-perlröhren. — H₂: aus gewöhnlichem Zink mit reiner Schwefelsäure; Waschen mit übermangansaurem Kalilösung; Perlröhre mit concentrirter Kalilauge, dann ebensolche mit Schwefelsäure. — N₂: Böttcher'sche Mischung (chromsaures Kali, salpetrigsaures Kali, salpetersaures Ammoniak). Waschen mit pyrogallussaurem Kali; Perlröhre mit Schwefelsäure.

Gases 2 mischt, so dehnt sich jedes auf das doppelte Anfangsvolumen aus; war p der beiden gemeinschaftliche Anfangsdruck, so würde jedes, wenn es dem Mariotte'schen Gesetz streng folgte, auf den Partialdruck $p/2$ kommen. Davon werden aber Abweichungen stattfinden, sodass das erste Gas den Druck $p/2 + \delta_1$, das zweite den Druck $p/2 + \delta_2$ erreicht. Dazu kann sich noch eine von der gegenseitigen Einwirkung der Gasmolectüle herrührende Druckänderung d_{12} gesellen. Dann ist das oben angegebene $\Delta p = \delta_1 + \delta_2 + d_{12} = a_{12}$. Die Grösse, welche wir hier suchen, ist d_{12} .

Für die Grössen δ lagen bis vor kurzem nur wenig Beobachtungen vor. Nur über SO_2 existirten zwei verwendbare Beobachtungsreihen von Regnault¹⁾, eine von 1341 bis 512, die andere von 558 bis 388 mm Druck reichend; sie beziehen sich auf die Temperatur $+7,7^\circ$ und sind leider nicht mit ungeändertem Gasquantum ausgeführt. Schliesst man aber dieselben aneinander an, so berechnet sich, dass, wenn man das beim Druck 720 mm gemessene Anfangsvolumen sich verdoppeln lässt, der Druck nicht auf 360, sondern nur auf 365,5 mm sinkt. Einer privaten Mittheilung von Hrn. Fr. Fuchs verdanke ich die Angabe, dass dasselbe Gas bei 0° und dem Anfangsdruck 710, ausgedehnt auf das doppelte Volumen, nicht den Druck 355, sondern 359,1 annimmt. Von Hrn. Fuchs²⁾ ist auch atmosphärische Luft, CO_2 und neuerdings H_2 untersucht worden. Ich will nun bezeichnen als:

| | | | | |
|-----|---------------|---------------|------|----------------|
| Gas | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | SO_2 | CO_2 | Luft | H_2 . |

Dann hat man die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + d_{12} = a_{12}; & \delta_1 + \delta_3 + d_{13} = a_{13} \\ \delta_1 + \delta_4 + d_{14} = a_{14}; & \delta_2 + \delta_3 + d_{23} = a_{23} \\ \delta_2 + \delta_4 + d_{24} = a_{24}; & \delta_3 + \delta_4 + d_{34} = a_{34}, \end{cases}$$

und in diesen wäre:

1) Regnault, Mém. de l'Inst. de l'Ac. d. sc. 26. p. 234.

2) Fr. Fuchs, Progr. d. k. bayer. Realschule zu Kempten. 1886—87. Kempten bei Hartmann.

$$\begin{array}{ll}
 \delta_1 = + 5,5 \text{ (Regnault)} & a_{12} = + 1,15 \\
 = + 4,1 \text{ (Fuchs)} & a_{14} = + 3,94 \\
 \delta_2 = + 0,93 \text{ (Fuchs)} & a_{24} = + 0,97 \\
 \delta_3 = - 0,22 \text{ (Fuchs)} & a_{23} = + 0,35 \\
 \delta_4 = 0 \text{ (Fuchs)} & a_{34} = 0.
 \end{array}$$

Nimmt man für Stickstoff das δ der Luft, so wäre noch (ich klammere diese Werthe ein):

$$a_{34} = + (0,21) \quad a_{13} = + (2,63).$$

Kürze halber sollen die Grössen d als „Druckänderung durch Molecularkräfte“ bezeichnet werden. Dann ergeben sich, je nachdem man den Regnault'schen oder Fuchs'schen Werth für das δ der SO_2 nimmt (in der Tabelle durch R und F angedeutet).

Druckänderung durch Molecularkräfte:

| | | |
|-----------------------------|----------------|--------------|
| $\text{SO}_2 / \text{CO}_2$ | - 5,28 mm (R) | Druckabnahme |
| | - 3,88 „ (F) | |
| SO_2 / H_2 | - 1,56 „ (R) | „ |
| | - 0,16 „ (F) | |
| SO_2 / N_2 | (- 2,67) „ (R) | „ |
| | (- 1,27) „ (F) | |
| $\text{CO}_2 / \text{Luft}$ | - 0,36 | „ |
| CO_2 / H_2 | + 0,04 | Druckzunahme |
| H_2 / Luft | + 0,22 | „ |
| H_2 / N_2 | (+ 0,43) | „ |

Die Gasmoleculäre üben also bei Partialdrucken von weniger als einer halben Atmosphäre noch sehr merkliche Kräfte aus. Von besonderem Interesse scheint mir die beträchtliche Druckabnahme von $\text{SO}_2 / \text{CO}_2$. — Denkt man sich in SO_2 die Hälfte der Moleculäre weggenommen und durch CO_2 -Moleculäre ersetzt, so fällt der Druck um 4 mm Quecksilber. Man kann dies auch so ausdrücken, dass man sagt, die Anziehungskraft von SO_2 und CO_2 gegeneinander ist grösser, als die der SO_2 -Moleculäre untereinander. Das Gleiche würde auch noch gelten für SO_2 / H_2 , $\text{CO}_2 / \text{Luft}$ und SO_2 / N_2 .

5. Ich möchte an das Vorstehende noch eine weitere Bemerkung knüpfen. Wenn man mit dem Gleichungssystem (1) noch verbindet ein System:

$$\delta_1 - \delta_2 = b_{12} \quad \delta_1 - \delta_3 = b_{13} \quad \delta_1 - \delta_4 = b_{14},$$

und annimmt, dass alle a , b und ein einziges δ bekannt seien, so lassen sich alle anderen δ und d berechnen.

Die Grössen b lassen sich aber mit grosser Schärfe bestimmen. Es genügt dazu, in zwei Apparate, welche ähnlich dem obigen Mischapparat construirt sind, die Gase 1 und 2 einzuführen und ihre Volumina in gleicher Weise zu vervielfachen. Man hat dann nur kleine Druckdifferenzen direct zu beobachten, wodurch eine erheblich grössere Genauigkeit erreicht wird, als wenn dieselbe aus der Differenz grosser, je einzeln gemessener Drucke ermittelt werden soll.

Wenn wir diese Abweichungen d und δ für chemisch-physikalische Schlüsse verwerthen wollen, so ist es jedenfalls die erste Aufgabe, dieselben mit grösserer Genauigkeit zu messen, als Quecksilbermanometer gestatten. Ich habe einige dahin zielende Versuche gemacht und möchte mir gestatten, auf eine als Manometerflüssigkeit, wie mir scheint, sehr geeignete Substanz hinzuweisen. Es kommt bei einer solchen darauf an, dass sie neben kleinem specifischen Gewicht geringe Dampfspannung besitzt, chemisch indifferent ist und stets gleichmässig benetzt. Ist letzteres nicht der Fall, so entstehen in Röhren von etwa 2 mm Durchmesser oft Einstellungsfehler von 2 mm. Die meisten hoch siedenden organischen Substanzen leiden an letzterem Uebelstande. Dagegen zeigt denselben in keiner bemerkbaren Weise der im Handel als „weisses Vaselineöl“ gehende Körper. Es stellt sich in Röhren, welche einen Durchmesser von weniger als 2 mm haben, zwar langsam, aber doch mit einer solchen Schärfe ein, dass eine Höhendifferenz von wenigstens $\frac{1}{50}$ mm mit voller Sicherheit zu garantiren ist. Dies entspricht einer Druckdifferenz von etwa $\frac{1}{800}$ mm Quecksilber. Sein Siedepunkt liegt nahe dem des Quecksilbers. Sein Lösungsvermögen für Gase scheint gering zu sein.

Da die Grössen δ bisher nicht genauer gemessen sind, als die von mir bestimmten kleinen Druckänderungen, so habe ich mich mit Quecksilbermanometer begnügt. Es muss aber möglich sein, mittelst solcher Differenzmethoden die in Frage stehenden Grössen mit solcher Schärfe zu ermitteln, dass man hoffen darf, auf diesem Wege über die gegenseitige

Einwirkung der Substanzen in dem sehr verdünnten Zustande Aufschlüsse zu erhalten, welche ihrerseits wieder mit dem Verhalten in stark verdünnten Lösungen verglichen werden können.

6. Was nun endlich die Ausgangsfrage betrifft, so schliesse ich, dass die Spannung eines gesättigten Dampfes in einem Gase, auch wenn alle störenden Einflüsse vermieden sind, nicht immer gleich der im Vacuum ist. Speciell würde diejenige der schwefligen Säure bei ihrem Siedepunkt kleiner sein in CO_2 um mindestens 3,9 mm, in Stickstoff um 1,3 mm.

Tübingen, April 1888.

XIV. Ausdehnung, Compressibilität und specifische Wärme von Chlorkalium- und Chlorcalciumlösungen; von Joseph Drecker.

Untersucht man die specifische Wärme einer Lösung oder einer Mischung, so ergibt sich in den meisten Fällen, dass das Resultat verschieden ist von der mittleren, aus den Bestandtheilen der Lösung berechneten specifischen Wärme. Es ist nun möglich, dass diese Aenderung der specifischen Wärme darin ihren Grund hat, dass die zur Ausdehnung zu leistende innere Arbeit (die äussere Arbeit können wir bekanntlich bei flüssigen Körpern vernachlässigen), bei den Lösungen und Mischungen eine andere ist, als wenn die Körper gesondert sich ausdehnen. Wäre die Aenderung der specifischen Wärme einzig die Folge dieser verschiedenen Ausdehnungsarbeit, so müssten die specifischen Wärmen bei constantem Volumen gleich den berechneten sein.

Im 20. Bande dieser Annalen habe ich die specifischen Wärmen bei constantem Volumen einer grösseren Anzahl von Flüssigkeitsgemischen aus der beobachteten Ausdehnung und Compressibilität und der bekannten specifischen Wärme bei constantem Druck bestimmt. Es zeigte sich,

dass die specifischen Wärmen bei constantem Volumen weniger verschieden sind von den aus den Bestandtheilen berechneten, aber der ganze Unterschied zwischen beobachteten und berechneten specifischen Wärmen wird durch die Verschiedenheit der Ausdehnungsarbeit nicht erklärt.

Im Folgenden gebe ich nun die Resultate gleicher Versuche betreffs einiger Salzlösungen. Die Versuche wurden ausgeführt im physikalischen Laboratorium der hiesigen Technischen Hochschule, mit Ausnahme derer über die specifischen Wärmen, welche ich während der Herbstferien 1886 im physikalischen Laboratorium des Musée Teyler in Haarlem ausführte.¹⁾ Da ich durch Berufsarbeiten sehr in Anspruch genommen bin, kann ich erst jetzt die Beobachtungen veröffentlichen, welche ich aus demselben Grunde bisher leider nicht, wie es meine Absicht war, über eine grössere Reihe von Lösungen verschiedener Salze ausdehnen konnte.

Die untersuchten Salzlösungen.

Es wurden sieben Lösungen von Chlorkalium und sieben Lösungen von Chlorcalcium untersucht. Die Bestimmung des Procentgehaltes der Chlorkaliumlösungen wurde durch Wägung des verwandten, scharf getrockneten Salzes und des Wassers bestimmt. Bei der Herstellung der Chlorkaliumlösungen würde diese Methode zu ungenaue Resultate liefern wegen der Schwierigkeit, das Salz wasserfrei herzustellen. Es wurde daher der Procentgehalt dieser Lösungen durch Titriren mit Silbernitrat bestimmt. Die im Folgenden angegebenen Procentgehalte bedeuten die Gewichtsmengen wasserfreien Salzes in 100 Gewichtstheilen der Lösung.

Versuche über Ausdehnung.

Die Ausdehnung der in Frage kommenden Salzlösungen wurde im Piëzometer untersucht, und zwar (einzelne Fälle

1) Den Leitern beider Institute, dem Hrn. Geh. Regierungsrath Prof. Dr. Wüllner und dem Hrn. Dr. van der Ven, durch deren bereitwilligstes Entgegenkommen mir die Ausführung der Versuche ermöglicht wurde, spreche ich auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aus.

Der Verfasser.

ausgenommen) mit derselben Füllung, welche später zu den Compressionsversuchen diente. Die Piézometer hatten dieselbe Form, wie das früher von mir gebrauchte. Dieselben waren sehr sorgfältig calibriert und ihr Ausdehnungscoefficient aus der darin beobachteten scheinbaren Ausdehnung des Wassers sowohl wie des Quecksilbers und den bekannten wahren Ausdehnungscoefficienten dieser Körper berechnet. Als Ausdehnungscoefficient des Piézometers II ergab sich die Zahl 0,000 030 5, resp. 0,000 030 0 aus zwei Versuchsreihen für Temperaturen zwischen 20 und 40°.

Als Capacität der Capillaren ergab sich 0,000 338 2 aus der Beobachtung mit Quecksilber, 0,000 339 6 ccm pro mm aus der Beobachtung mit Wasser. Das Verhältniss des Volumens pro Millimeter der Capillaren zum Gesamtvolumen war 0,000 006 138 bis 0,000 006 152, je nach der Lage des betreffenden Theilstriches auf der Capillaren. Es wurde nun im Wasserbad das Volumen der Lösungen bei drei bis vier verschiedenen Temperaturen abgelesen. Die angewandten Thermometer waren in $\frac{1}{50}^{\circ}$ getheilt und wurden wiederholt mit einem Normalthermometer verglichen. Aus je drei Beobachtungen wurden alsdann die Constanten der Formel:

$$v_t = v_o(1 + at + bt^2)$$

berechnet, nachdem ausserdem noch die Dichte der Lösung bei einer Temperatur bestimmt war. Die Resultate der Beobachtung geben die Columnen 2, 3, 4 der folgenden Tabellen. In der ersten Columne findet sich der Procentgehalt, in der fünften der Ausdehnungscoefficient bei 20°, $\alpha_{20} = a + 40b$, in der sechsten die Temperaturgrenzen, zwischen welchen die Beobachtungen angestellt waren, in runden Zahlen, in der siebenten die Dichte bei der in der achten verzeichneten Temperatur.

Ausdehnung der Chlorkaliumlösungen.

| <i>p</i> | v_o | <i>a</i> | <i>b</i> | α_{20} | | δ_t | <i>t</i> |
|----------|--------|------------|-------------|---------------|--------|------------|----------|
| 2,49 | 0,9829 | -0,0000027 | 0,000005749 | 0,000228 | 10—23° | 1,01576 | 16,90 |
| 4,40 | 0,9673 | +0,0000645 | 0,000004537 | 0,000246 | 14—23 | 1,0320 | 13,84 |
| 8,28 | 0,9458 | 0,0001379 | 0,000003510 | 0,000278 | 15—22 | 1,0543 | 15,00 |
| 13,02 | 0,9176 | 0,0001260 | 0,000004555 | 0,000308 | 15—23 | 1,0867 | 15,00 |
| 16,75 | 0,8947 | 0,0002614 | 0,000001632 | 0,000327 | 14—23 | 1,1129 | 15,00 |
| 24,31 | 0,8523 | 0,0002695 | 0,000002080 | 0,000353 | 16—25 | 1,1680 | 15,00 |

Ausdehnung der Chlorcalciumlösungen.

| p | v_0 | a | b | α_{20} | | δ_t | t |
|------|---------|------------|--------------|---------------|--------|------------|-------|
| 5,8 | 0,95188 | 0,00007878 | 0,0000042742 | 0,0002497 | 18—25° | 1,0457 | 22,8 |
| 9,9 | 0,93193 | 0,00012340 | 0,0000039090 | 0,0002798 | 13—24 | 1,0706 | 13,08 |
| 17,8 | 0,86341 | 0,00020386 | 0,0000033228 | 0,0003368 | 18—25 | 1,1500 | 23,3 |
| 24,1 | 0,81823 | 0,00028827 | 0,0000021213 | 0,0003731 | 17—24 | 1,2135 | 19,5 |
| 30,2 | 0,77847 | 0,00034700 | 0,0000014591 | 0,0004054 | 17—24 | 1,2725 | 23,3 |
| 35,4 | 0,74690 | 0,00037945 | 0,0000012772 | 0,0004305 | 18—26 | 1,3245 | 25,0 |
| 40,9 | 0,71389 | 0,00042383 | 0,0000008571 | 0,0004581 | 17—24 | 1,3867 | 22,0 |

Für Wasser ergibt sich aus der bekannten Kopp'schen Formel für die Ausdehnung zwischen 0 und 25° $\alpha_{20} = 0,000 203$.

Die in vorstehenden Tabellen mitgetheilten Werthe für α_{20} lassen sich wiedergeben durch folgende Formeln, in welchen p den Procentgehalt bedeutet. Wie die Zusammenstellung zeigt, ist die Uebereinstimmung zwischen den nach der Formel berechneten und den beobachteten Zahlen eine befriedigende.

Formel für die Chlorkaliumlösungen:

$$\alpha_{20} = 0,000 203 + 0,000 010 3 p - 0,000 000 17 p^2,$$

Formel für die Chlorcalciumlösungen:

$$\alpha_{20} = 0,000 203 + 0,000 008 39 p - 0,000 000 054 p^2.$$

Chlorkalium:

| p | | 2,49 | 4,40 | 8,28 | 13,02 | 16,75 | 24,31 |
|-------------------------------------|--|------|------|------|-------|-------|-------|
| $10^6 \cdot \alpha_{20}$ berechnet | | 228 | 245 | 277 | 308 | 328 | 353 |
| $10^6 \cdot \alpha_{20}$ beobachtet | | 228 | 246 | 278 | 308 | 327 | 353 |
| Differenz | | 0 | +1 | +1 | 0 | -1 | 0 |

Chlorcalcium:

| p | | 5,8 | 17,8 | 24,1 | 30,2 | 35,4 | 40,9 |
|-------------------------------------|--|-----|------|------|------|------|------|
| $10^6 \cdot \alpha_{20}$ berechnet | | 250 | 335 | 374 | 408 | 433 | 456 |
| $10^6 \cdot \alpha_{20}$ beobachtet | | 250 | 337 | 373 | 405 | 430 | 458 |
| Differenz | | 0 | +2 | -1 | -8 | -3 | +2 |

Die spezifische Wärme der Salzlösungen.

Für die spezifische Wärme von Chlorkaliumlösungen liegen bereits Beobachtungen vor, und zwar von Schüller¹⁾, Thomson²⁾ und Winkelmann.³⁾ Die von Winkelmann angegebenen Werthe liegen zwischen denen von Schüller und

1) Schüller, Pogg. Ann. 136. p. 235. 1869.

2) Thomson, Pogg. Ann. 142. p. 337. 1871.

3) Winkelmann, Pogg. Ann. 149. p. 1. 1873.

Thomson. Winkelmann hat aus seinen Beobachtungen eine Formel abgeleitet, welche die beobachteten Werthe mit grosser Genauigkeit wiedergibt. Die Formel lautet:

$$c = 0,9965 - 0,011491 p + 0,0001086 p^2.$$

In dieser Formel bedeutet p die Gewichtsmenge Salz auf 100 Theile Wasser. Nach Umrechnung der von mir angegebenen Procente in 100 Theilen der Lösung in solche bezogen auf 100 Theile Wasser habe ich für die von mir angewandten Chlorkaliumlösungen die spezifische Wärme nach dieser Formel berechnet. Es ergibt sich:

| | | | | | | | |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| p | 2,49 | 4,40 | 8,28 | 13,02 | 16,75 | 19,97 | 24,31 |
| c | 0,968 | 0,946 | 0,902 | 0,849 | 0,809 | 0,777 | 0,739 |

Die spezifischen Wärmen von Chlorcalciumlösungen sind meines Wissens bisher noch nicht mitgetheilt worden, mit Ausnahme einer Angabe Thomson's für eine Lösung von sehr geringem Procentgehalt. Ich habe deshalb die spezifischen Wärmen dieser Lösungen nach der von Wüllner¹⁾ modificirten Kopp'schen Methode selbst bestimmt, und gebe in nachstehenden Tabellen die Resultate meiner Beobachtung. Nach der genannten Methode findet man die spezifische Wärme der Flüssigkeit nach der Gleichung:

$$c = \frac{H(t + \Sigma A_t - \delta) - \pi(T - t)}{p(T - t)}, \quad ^2)$$

In dieser Gleichung bedeutet:

H den Wasserwerth des gefüllten Calorimeters mit Rührer und eingetauchtem Theil des Thermometers,

π den Wasserwerth des Gläschens,

δ Anfangs- und t Endtemperatur des Calorimeters,

T Anfangstemperatur des Gläschens,

ΣA_t die Temperaturcorrection infolge der Ausstrahlung.

1) Bettendorf und Wüllner, Pogg. Ann. 133. p. 293. 1868.

2) Die genauere Correction wegen der Strahlung, welche bei der Bestimmung der spezifischen Wärme von schlechtleitenden Substanzen nothwendig wird, erfordert die Anwendung einer complicirteren Formel (Wüllner, Experimentalphysik, 4. Aufl. 3. p. 444). Bei obigen Bestimmungen war die Anwendung derselben nicht nöthig, da die dritte Ziffer dadurch nicht mehr geändert würde.

Bei sämtlichen Versuchen war:

$$H = 83,16, \quad \pi = 0,81.$$

Lösung Nr. 1. $p = 5,642$;
Procentgehalt 58.

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 77,51 | 22,720 | 18,708 | +0,013 | 0,933 |
| 76,54 | 22,614 | 18,675 | +0,029 | 0,940 |
| 76,45 | 23,385 | 19,417 | +0,067 | 0,936 |
| 86,64 | 23,928 | 19,340 | +0,012 | 0,937 |
| 80,12 | 23,420 | 19,275 | -0,016 | 0,932 |
| 80,62 | 23,323 | 19,100 | -0,022 | 0,936 |
| 75,68 | 23,032 | 19,140 | -0,033 | 0,936 |
| 92,52 | 24,598 | 19,677 | +0,064 | 0,938 |

Mittel $c = 0,936$

Lösung Nr. 3. $p = 6,425$;
Procentgehalt 24,1

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 77,70 | 22,303 | 18,621 | -0,013 | 0,731 |
| 77,03 | 22,175 | 18,525 | -0,017 | 0,731 |
| 77,43 | 22,282 | 18,620 | -0,012 | 0,731 |
| 77,27 | 22,324 | 18,690 | -0,009 | 0,728 |
| 76,64 | 22,408 | 18,818 | -0,014 | 0,729 |
| 76,88 | 22,581 | 19,040 | -0,010 | 0,727 |

Mittel $c = 0,729$

Lösung Nr. 5. $p = 6,975$;
Procentgehalt 35,4.

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 79,42 | 23,537 | 19,971 | -0,012 | 0,655 |
| 78,84 | 22,780 | 19,106 | -0,021 | 0,660 |
| 80,77 | 23,559 | 19,830 | -0,017 | 0,657 |
| 79,51 | 22,976 | 19,283 | -0,023 | 0,657 |
| 78,94 | 23,170 | 19,571 | -0,019 | 0,657 |
| 82,11 | 23,464 | 19,653 | -0,016 | 0,655 |

Mittel $c = 0,657$

Lösung Nr. 2. $p = 5,707$;
Procentgehalt 17,8

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 78,17 | 22,240 | 18,633 | -0,040 | 0,787 |
| 77,47 | 22,510 | 18,986 | -0,012 | 0,789 |
| 77,92 | 22,098 | 18,495 | -0,040 | 0,789 |
| 77,07 | 22,348 | 18,831 | -0,010 | 0,791 |
| 79,45 | 22,460 | 18,789 | -0,030 | 0,789 |

Mittel $c = 0,789$

Lösung Nr. 4. $p = 5,857$;
Procentgehalt 30,2

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 78,24 | 23,498 | 20,399 | +0,072 | 0,684 |
| 80,07 | 23,750 | 20,549 | +0,065 | 0,685 |
| 79,17 | 23,756 | 20,595 | +0,065 | 0,688 |
| 80,21 | 22,742 | 19,400 | -0,012 | 0,684 |

Mittel $c = 0,685$

Lösung Nr. 6. $p = 7,070$;
Procentgehalt 40,9.

| T | t | δ | $\Sigma \Delta_t$ | c |
|-------|--------|----------|-------------------|-------|
| 81,05 | 24,600 | 21,093 | 0,087 | 0,634 |
| 80,92 | 23,560 | 19,952 | 0,085 | 0,643 |
| 80,93 | 23,822 | 20,231 | 0,085 | 0,643 |
| 79,87 | 26,490 | 23,338 | 0,227 | 0,630 |
| 81,22 | 21,926 | 18,592 | 0,049 | 0,633 |
| 79,52 | 22,256 | 19,064 | -0,016 | 0,634 |

Mittel $c = 0,636$

Die gefundenen Werthe lassen sich wiedergeben durch folgende Gleichung, in welcher p die Gewichtsmenge Salz in 100 Theilen der Lösung angibt. Die Differenzen liegen, wie die Zusammenstellung zeigt, innerhalb der Grenzen der Genauigkeit. Bei der Aufstellung der Gleichung habe ich darauf verzichten müssen, die erste Constante = 1 zu setzen. Die-

selbe würde der Einheit näher liegen, wenn man den Procentgehalt bezöge auf 100 Theile Wasser. Die Formel hat also nur Gültigkeit für Lösungen, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung liegen. Es ergab sich:

$$c = 1,022 - 0,01603p + 0,00016p^2.$$

| Procent- gehalt | Specifische Wärme | | Differenz |
|--------------------|-------------------|-----------|-----------|
| | gefunden | berechnet | |
| 5,7 | 0,936 | 0,935 | +0,001 |
| 17,8 | 0,789 | 0,788 | +0,001 |
| 24,1 | 0,729 | 0,730 | -0,001 |
| 30,2 | 0,685 | 0,685 | 0 |
| 35,4 | 0,657 | 0,656 | +0,001 |
| 40,9 | 0,636 | 0,636 | 0 |

Compressibilität der Salzlösungen.

Die Beobachtungsmethode war dieselbe, wie bei meinen Versuchen über Compressibilität von Flüssigkeitsgemischen. Sie findet sich in der schon genannten Abhandlung¹⁾ ausführlich beschrieben. Eine Aenderung erlitt nur das Manometer. Dasselbe erhielt an seinem unteren Ende eine Erweiterung, und der obere Theil des Rohres wurde enger genommen, als es früher der Fall war. Die Verhältnisse waren so gewählt, dass das Quecksilber etwa bei einem Druck von 5 Atmosphären bis in den oberen engen Theil hineinragte. Dadurch wurde die Genauigkeit der Ablesung so gross, als bei einem ganz cylindrischen Manometer von fünffacher Länge. Dieser Kunstgriff ist meines Wissens zuerst angewandt worden von Amagat.²⁾ Da ich durch meine früheren Versuche gezeigt habe, dass zur Bestimmung des Compressionscoefficienten nur die Beobachtung der momentanen Volumenänderung bei der Compression oder Dilatation erforderlich ist, vorausgesetzt, dass der Ausdehnungscoefficient und die specifische Wärme der Flüssigkeit bekannt sind, so habe ich für die Salzlösungen nur die momentane Dilatation beobachtet. Besonders erwähnt werden aber muss, dass, im Gegensatz zu

1) Drecker, Wied. Ann. 20. p. 870. 1883.

2) Amagat, Ann. de chim. et de phys. (5) 11. p. 520. 1877.

den früher untersuchten Flüssigkeitsgemischen, bei den Salzlösungen absolut erforderlich war, dass dieselben vor dem Einfüllen in das Piëzometer von der absorbirten Luft möglichst befreit wurden. Wie eine Anzahl Vorversuche zeigte, wird nämlich regelmässig durch wiederholte Druckänderung im Piëzometer-Luft ausgeschieden, wenn das Auskochen unterlassen ist, und dadurch die Beobachtung der Compressibilität unmöglich gemacht. Das Auskochen wurde unmittelbar vor dem Einfüllen in das Piëzometer an einem Rückflusskühler vorgenommen. Der Procentgehalt der Lösungen wurde durch das Kochen nicht geändert, da sich durch Wägung ergab, dass der Verlust durch Kochen nur ganz minimal (etwa 0,1 g auf 250 g) war. Bei den Chlorcalciumlösungen käme ein etwaiger Fehler ganz in Wegfall, weil der Procentgehalt dieser Lösungen erst nach jener Operation durch Titiren bestimmt wurde.

Zu den Versuchen wurden zwei Piëzometer Nr. I und II gebraucht, deren Dimensionen folgende waren: Piëzometer Nr. I, Inhalt von 1 mm der Capillaren 0,000 337 8 ccm oder in Bruchtheilen des Gesamtvolumens 0,000 006 87 bis 0,000 006 88, Piëzometer Nr. II, Inhalt von 1 mm der Capillaren 0,000 338 2 ccm oder in Bruchtheilen des Gesamtvolumens 0,000 006 14 bis 0,000 006 15, je nachdem das betreffende Millimeter in der Nähe des Gefässes oder in der Nähe der offenen Enden der Capillaren genommen wurde.

Die Abweichungen der einzelnen Beobachtungswerthe vom Mittel betragen durchschnittlich bei sämmtlichen 42 Versuchsreihen 0,51 Proc. Die grössten Abweichungen kommen vor bei der Versuchsreihe für die 19,97procentige Chlorkaliumlösung bei 25,7°. Bei dieser, sowie bei allen Versuchen älteren Datums war das oben beschriebene verbesserte Manometer noch nicht im Gebrauch. Wo dasselbe zur Anwendung kam, überschreiten die Abweichungen vom Mittel nirgends 0,4 Proc. In den folgenden Tabellen theile ich die Daten der Beobachtungen für die eben genannte Chlorcalciumlösung, sowie je einer Reihe für eine Chlorcalciumlösung und Wasser ausführlich mit. Diese Tabellen geben gleichzeitig eine Uebersicht über die Grösse des angewandten Druckes.

Bei den Versuchen mit Chlorcalciumlösung und Wasser fand das verbesserte Manometer Anwendung.

| Chlorkaliumlösung Nr. 5. | | | | Chlorcalciumlösung Nr. 7. | | | |
|-----------------------------------|------|------|-----------------------------------|---------------------------------|-------|-------|-----------------------------------|
| Piézometer Nr. I. | | | | Piézometer Nr. II. | | | |
| Procentgehalt 19,97. Temp. 25,7°. | | | | Procentgehalt 9,9. Temp. 18,8°. | | | |
| Nr. d. Vers. | mm | s | 10 ⁷ . D _{mo} | Nr. d. Vers. | mm | s | 10 ⁷ . D _{mo} |
| 159 | 5074 | 30,1 | 310 | 404 | 11730 | 92,0 | 366 |
| 160 | 5146 | 30,5 | 311 | 405 | 12680 | 99,7 | 367 |
| 161 | 5260 | 30,6 | 304 | 406 | 7700 | 60,9 | 369 |
| 162 | 4217 | 26,5 | 321 | 407 | 11890 | 92,8 | 365 |
| 163 | 4242 | 26,1 | 322 | 408 | 7999 | 62,8 | 367 |
| 164 | 4092 | 23,8 | 305 | 409 | 13530 | 107,1 | 370 |
| 165 | 3234 | 19,2 | 310 | 410 | 7901 | 62,2 | 368 |
| 166 | 5042 | 30,3 | 314 | 411 | 12130 | 95,8 | 369 |
| 167 | 5273 | 31,1 | 309 | 412 | 10990 | 86,1 | 366 |
| 168 | 5414 | 32,1 | 310 | | | | Mittel 367,4 |
| 169 | 5389 | 32,3 | 313 | Wasser. | | | |
| 170 | 3101 | 18,9 | 319 | Piézometer Nr. II. Temp. 22,3°. | | | |
| 171 | 3255 | 19,0 | 305 | 420 | 11880 | 109,9 | 431 |
| 172 | 1889 | 11,2 | 311 | 421 | 6545 | 60,9 | 434 |
| 173 | 1821 | 10,8 | 310 | 422 | 14780 | 137,0 | 432 |
| 174 | 1866 | 11,1 | 311 | 423 | 14540 | 135,8 | 436 |
| 175 | 1259 | 7,7 | 320 | 424 | 6413 | 59,8 | 435 |
| 176 | 1281 | 7,3 | 310 | 425 | 10660 | 99,4 | 435 |
| 177 | 4303 | 25,1 | 305 | 426 | 10540 | 97,6 | 432 |
| 178 | 4792 | 28,5 | 311 | 427 | 12000 | 112,2 | 436 |
| | | | Mittel 311 | 428 | 14980 | 139,1 | 433 |
| | | | | 429 | 10890 | 100,8 | 434 |
| | | | | | | | Mittel 433,8 |

In der ersten Columne vorstehender Tabellen steht die Nummer des Versuches, in der zweiten der angewandte Druck in Millimetern Quecksilber, in der dritten die entsprechende Volumenänderung der Flüssigkeit, ausgedrückt in Millimetern der Capillaren des Piézometers, in der vierten die momentane Dilatation bezogen auf den Druck einer Atmosphäre.

Im übrigen beschränke ich mich darauf, in den folgenden Tabellen die Mittelwerthe der einzelnen Versuchsreihen mitzutheilen. Die letzte Horizontalreihe gibt die durch lineare Interpolation berechnete momentane Dilatation bei 20°.

Chlorkaliumlösungen:

| | | | | |
|------------------------------------|---|---|---|---|
| Procentgehalt | 2,49 | 4,40 | 8,28 | 12,65 |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ | $\left\{ \begin{array}{l} 10,2^\circ \text{ 441} \\ 14,4 \text{ 434} \\ 17,4 \text{ 427} \\ 21,9 \text{ 419} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 14,7^\circ \text{ 411,5} \\ 22,7 \text{ 407} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 14,6^\circ \text{ 388} \\ 22,1 \text{ 381} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 11,5^\circ \text{ 358} \\ 19,1 \text{ 354} \\ 23,0 \text{ 348} \end{array} \right.$ |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ bei 20° | 422 | 408 | 383 | 353 |
| Procentgehalt | 13,02 | 16,75 | 19,97 | 24,31 |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ | $\left\{ \begin{array}{l} 15,8^\circ \text{ 351} \\ 24,0 \text{ 345} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 14,4^\circ \text{ 333} \\ 15,2 \text{ 332} \\ 22,2 \text{ 333} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 18,4^\circ \text{ 307} \\ 25,7 \text{ 311} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 14,6^\circ \text{ 285} \\ 15,7 \text{ 286} \\ 16,5 \text{ 288} \\ 23,2 \text{ 294} \end{array} \right.$ |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ bei 20° | 347 | 333 | 308 | 291 |

Chlorcalciumlösungen:

| | | | | |
|------------------------------------|---|---|---|---|
| Procentgehalt | 5,8 | 9,9 | 17,8 | 24,1 |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ | $\left\{ \begin{array}{l} 17,8^\circ \text{ 396} \\ 25,3 \text{ 387} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 13,4^\circ \text{ 372} \\ 18,8 \text{ 367} \\ 21,5 \text{ 364,5} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 18,6^\circ \text{ 305} \\ 24,4 \text{ 302} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 17,1^\circ \text{ 264} \\ 24,0 \text{ 267} \end{array} \right.$ |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ bei 20° | 393 | 365 | 304 | 265 |
| Procentgehalt | 30,2 | 35,4 | 40,9 | |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ | $\left\{ \begin{array}{l} 17,1^\circ \text{ 243} \\ 25,4 \text{ 244} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 18,1^\circ \text{ 216} \\ 24,5 \text{ 219} \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} 17,4^\circ \text{ 200} \\ 23,6 \text{ 201} \end{array} \right.$ | |
| $10^4 \cdot D_{m0}$ bei 20° | 243 | 217 | 200 | |

Wasser:

| | | | | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| t | $16,0^\circ$ | $16,8^\circ$ | $17,4^\circ$ | $22,3^\circ$ | $25,2^\circ$ | 20° |
| D_{m0} | 444 | 442 | 441 | 434 | 428 | 438 |

Um aus diesen Zahlen die scheinbare Compressibilität der Lösungen zu erhalten, ist, wie ich a. a. O. gezeigt und durch Versuche bestätigt habe, zu der Grösse D_{m0} zu addiren $(\alpha_t \cdot \tau) / (1 + \alpha_t \cdot t)$. Die Grösse τ in diesem Ausdruck bedeutet die durch Compression hervorgerufene Temperaturerhöhung, resp. die bei der Dilatation eintretende Temperaturniedrigung. Sie wird bestimmt durch die Thomson'sche Gleichung:

$$\tau = \frac{d_t}{d_p} = \frac{AT}{c_p} \left(\alpha + t \frac{d_\alpha}{dt} \right) v_0.$$

Die Grössen der rechten Seite der Gleichung sind sämtlich bekannt. Es ist $A = \frac{1}{131}$, c_p die spezifische Wärme bei constantem Druck, $T = 293$; da ich alle Werthe auf die Temperatur 20° bezogen habe, und der in der Klammer stehende Ausdruck die oben angegebene Grösse α_{20} , v_0 ist in Cubicmetern pro Kilogramm auszudrücken, also sind die früher für

v_0 gegebenen Werthe durch 1000 zu dividiren, und endlich ist, da die Druckänderung 1 Atmosph. beträgt, die rechte Seite noch mit 10334 zu multipliciren. Das Resultat der Rechnung gibt folgende Tabelle. D_{t_0} ist die totale scheinbare Compressibilität.

Chlorkaliumlösungen:

| | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Procentgehalt | 2,49 | 4,40 | 8,28 | 13,02 | 16,75 | 19,97 | 24,31 |
| r | 0,00165 | 0,00179 | 0,00207 | 0,00238 | 0,00259 | 0,00275 | 0,00291 |
| $\alpha r / (1 + 20 \alpha) \cdot 10^7$ | 3,7 | 4,4 | 5,7 | 7,3 | 8,4 | 9,3 | 10,2 |
| $10^7 \cdot D_{t_0}$ | 426 | 412 | 389 | 354 | 341 | 317 | 301 |

Chlorcalciumlösungen:

| | | | | | | | | |
|---|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Procentgehalt | 0 | 5,8 | 9,9 | 17,8 | 24,1 | 30,2 | 35,4 | 40,9 |
| r | 0,00145 | 0,00181 | 0,00212 | 0,00263 | 0,00298 | 0,00324 | 0,00349 | 0,00367 |
| $\alpha r / (1 + 20 \alpha) \cdot 10^7$ | 2,9 | 4,5 | 5,9 | 8,8 | 11,1 | 13,0 | 14,9 | 16,7 |
| $10^7 \cdot D_{t_0}$ | 441 | 397 | 371 | 313 | 276 | 256 | 232 | 217 |

Die Zahlen der letzten Horizontalreihen vorstehender beiden Tabellen geben uns also die scheinbare Compressibilität der untersuchten Lösungen. Ehe ich aus diesen Resultaten weitere Folgerungen ziehe, will ich eine Vergleichung anstellen zwischen den von anderen Beobachtern gefundenen Werthen für die scheinbare Compressibilität und den vorstehenden. Aus den zahlreichen Versuchen der Herren Röntgen und Schneider¹⁾ ergeben sich nur wenige zu vergleichende Zahlen, nämlich zwei für Chlorkaliumlösungen und eine für Wasser. Da die Lösungen im Procentgehalt nicht mit den von mir untersuchten übereinstimmen, habe ich aus den angegebenen Werthen für eine 9,90- und eine 4,88procentige Lösung durch lineare Interpolation die Werthe für die zunächstliegenden, von mir untersuchten Lösungen vom Procentgehalt 8,28 und 4,40 berechnet. Es ergeben sich die Zahlen 0,875 resp. 0,927 für die relative Compressibilität oder $10^{-7} \cdot 383$ und $10^{-7} \cdot 406$ für die absolute scheinbare Compressibilität. Jede der beiden Zahlen weicht um sechs Einheiten der dritten Stelle von den von mir gefundenen ab, eine Differenz, welche noch um etwa ein bis zwei Einheiten derselben Stelle vergrößert wird, wenn man die Verschiedenheit der Beobachtungstemperatur berücksichtigt. Für die

1) Röntgen und Schneider, Wied. Ann. 29. p. 165. 1886.

scheinbare Compressibilität des Wassers geben die genannten Herren die Zahl $10^{-7.438}$ bei der Temperatur $17,84^{\circ}$, während sich aus meinen Versuchen durch Interpolation bei derselben Temperatur $10^{-7.443}$ ergibt. Auch hier ist wiederum die von mir gefundene Zahl grösser, und zwar um fünf Einheiten der letzten Stelle. Die Abweichungen betragen also im Mittel ungefähr 1,5 Proc. Bei der ziemlich gleich bleibenden Differenz zwischen den beobachteten Zahlen liegt jedoch die Vermuthung nahe, dass auch diese immerhin nicht sehr bedeutende Abweichung ihren Grund haben könne in der verschiedenen Compressibilität der Piézometer; denn streng genommen sind scheinbare Compressibilitäten nur vergleichbar, wenn sie in denselben Piézometern beobachtet wurden. Ferner hat Hr. Schumann¹⁾ eine grosse Reihe von Versuchen über Compressibilität von Salzlösungen mitgetheilt. Darunter finden sich auch Lösungen von Chlorkalium und Chlorcalcium. Die in dieser Arbeit enthaltenen Zahlen sind bald grösser, bald kleiner als die meinigen. Der Unterschied beträgt einige mal über 10 Proc. Auf eine genaue Zusammenstellung der Zahlen des Hrn. Schumann mit den meinigen, wozu eine Interpolation auf gleichen Procentgehalt erforderlich wäre, habe ich verzichtet; ich bemerke nur noch Folgendes. Die von Hrn. Schumann gefundene Anomalie verdünnter Chlorkalium- und Chlorcalciumlösungen, bei 15° eine grössere Compressibilität zu besitzen als das Wasser, hat mich veranlasst, nachträglich noch die in den obigen Tabellen mit aufgeführte Chlorkaliumlösung vom Procentgehalte 2,49, welche der Lösung des Hrn. Schumann von 2,52 Proc. hinreichend nahe liegt, herzustellen und zu untersuchen. Die angeführte Anomalie zeigte sich nicht; die gefundene Zahl ist dieselbe, welche sich durch lineare Interpolation zwischen den Werthen für Wasser und der 4,4procentigen Lösung ergeben würde. Ich bemerke noch, dass die Anomalie auch von den Herren Röntgen und Schneider²⁾ bestritten worden ist. Ferner findet sich unter Nr. 5 der „Resultate“ der Satz: „Die Lösungen von Chlorammonium

1) Schumann, Wied. Ann. 31. p. 14. 1887.

2) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 31. p. 1000. 1887.

und Chlorkalcium, wahrscheinlich auch diejenigen von Chlorkalium besitzen bei jeder Concentration die Eigenschaft des Wassers, eine mit wachsender Temperatur abnehmende Compressibilität.“ Auch diese Behauptung steht mit meinen Erfahrungen in Widerspruch. Chlorkalium ist wohl durch ein Versehen in diesen Satz gerathen; es wird Chlorbarium heissen sollen. Bei Chlorkalium gibt Hr. Schumann den Temperaturfactor in seiner Gleichung $\mu_t = \mu_o(1 + mt)$ für die verdünnte Lösung positiv, für die concentrirteren negativ. Aus meinen Beobachtungen ergibt sich sowohl bei Chlorkalium als auch bei Chlorkalcium das umgekehrte Resultat. Die Unrichtigkeit der Werthe der von Hrn. Schumann angegebenen Temperaturcoëfficienten zeigt sich namentlich bei den Chlorkalciumlösungen (auf p. 37 der Abhandlung), von denen der 22,5procentigen ein negativer Temperaturfactor und allen übrigen, sowohl schwächeren als stärkeren Lösungen, ein positiver zukommt.

Um aus den bisher mitgetheilten scheinbaren Compressionscoëfficienten die wirklichen zu berechnen, müsste man die Compressibilität des Piézometers γ kennen. Diese Grösse ist abhängig von der Natur des Glases und von der Temperatur. Regnault¹⁾ findet die Zahl $\gamma = 0,000\,001\,85$. Nimmt man diese Zahl auch für meine Piézometer als richtig an, so erhält man die wirklichen Compressionscoëfficienten der Lösungen durch Addition dieser Zahl zu den mitgetheilten Grössen D_{10} . Die Aenderung des Werthes für γ mit der Temperatur ist, wie aus den Versuchen der Herren Pagliani und Vicentini²⁾ hervorgeht, nicht sehr bedeutend. Diese Beobachter legen den Grassi'schen Werth für die wahre Compressibilität des Wassers bei 0°, $\mu_o = 0,0000503$, ihren Rechnungen zu Grunde und finden aus der Differenz der beobachteten scheinbaren Compressibilität und jener Zahl den Aenderungscoëfficienten k ihres Piézometers. Da bei ihren Versuchen die Compression nur im Innern des Piézometers ausgeführt wird, so setzt sich die Volumänderung zu-

1) Regnault, Mém. de l'acad. des sciences de l'inst. de France. 21. p. 429. 1847.

2) Pagliani e Vicentini, Nuovo Cimento (3) 16. 1884.

sammen aus der Aenderung des äusseren Volumens k^1 und der des Glases γ ; erstere wurde durch directe Beobachtungen bei 0° und 100° bestimmt. Unter der Annahme, dass die Aenderung des inneren Volumens sich in demselben Verhältniss mit der Temperatur ändert, wie die des äussern, und dass diese Aenderung der Temperatur in beiden Fällen proportional sei, ergibt sich aus jenen Beobachtungen:

$$\gamma_0 = k_0 - k^1_0 = 0,000\,001\,9 \text{ und } \gamma_{100} = k_{100} - k^1_{100} = 0,000\,002\,2.$$

Vergleicht man die von Pagliani und Vicentini angegebenen wahren Compressibilitäten des Wassers mit den von mir bei denselben Temperaturen gefundenen scheinbaren, so ergibt sich bei allen Beobachtungen die gleiche Differenz, nämlich 0,000 000 6. Es würde sich demnach unter der Annahme, dass die Zahlen der Herren Pagliani und Vicentini richtig sind, die Zahl 0,000 000 6 als Aenderungscoëfficient meiner Piëzometer ergeben. Dass beide von mir angewandten Piëzometer gleiche Compressibilität haben, folgt aus der Uebereinstimmung der Werthe für Wasser, welche sowohl im Piëzometer I, als im Piëzometer II bestimmt wurden.

In den folgenden Untersuchungen habe ich zur Bestimmung der wahren Compressibilität den Regnault'schen Werth $\gamma = 0,000\,001\,8$ benutzt.

Die Herren Röntgen und Schneider¹⁾ haben die Gleichung aufgestellt:

$$(\gamma - b)(n + a) = (1 - b)a,$$

worin γ die „relative scheinbare Compressibilität“ der Lösung, b die des gelösten Körpers, n die Anzahl der Moleküle, welche auf 1 g Wasser kommen, d. h. $n = 10^6 / m \cdot p / (100 - p)$ (m Moleculargewicht des Salzes, p Procentgehalt der Lösung), und a eine Constante bedeutet. Die aus dieser Gleichung für die Chlornatriumlösungen berechneten Werthe finden sich in guter Uebereinstimmung mit den beobachteten. Es ergaben sich für a und b die Zahlen 7391 und 0,044.

In einer folgenden Abhandlung²⁾ theilen dieselben Herren dann das Resultat ihrer Versuche über die Compressibilität von festem NaCl mit. Die Versuche wurden in der Art an-

1) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 29. p. 165. 1886.

2) Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 31. p. 1000. 1887.

gestellt, dass Steinsalzstäbchen in das im übrigen mit concentrirter NaCl-Lösung gefüllte Piézometer gebracht wurden und aus dem bestimmten Verhältniss der Volumina des festen Salzes und der Lösung, dem bekannten Compressionscoëfficienten der letzteren und der beobachteten Gesamtkompression, der Compressionscoëfficient des festen Salzes abgeleitet wurde. Für die relative scheinbare Compressibilität des Chlornatriums ergab sich der Werth 0,049, eine Zahl, welche von der Constanten b der obigen Gleichung 0,044 wenig abweicht. Es ist jedoch bei dieser Bestimmung ausser Acht gelassen, dass die Sättigungsmenge einer Lösung vom Druck abhängig ist, und zwar ergibt sich für NaCl aus einer Arbeit des Hrn. Braun¹⁾, dass eine concentrirte NaCl-Lösung durch Drucksteigerung noch weiteres Salz auflöst. Bei der Kleinheit der zu messenden Grösse kann dieser Umstand möglicherweise einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Resultat haben. Dass die Compressibilität eines festen Körpers aus der Compressibilität seiner Lösungen sich jedenfalls nur sehr ungenau nach der Gleichung der Herren Röntgen und Schneider ableiten lässt, ergibt sich, wenn man die Constanten aus anderen Werthepaaren ableitet. Nimmt man z. B. statt der 14,07procentigen und 26,4procentigen Lösungen die 4,05procentige und die 26,06procentige, so erhält man $a = 7199$, $b = 0,059$. Dieser Werth für b ist 30 Proc. grösser als der oben angegebene, und es lassen sich mit diesen beiden Constanten die beobachteten Zahlen der Herren Röntgen und Schneider selbst noch besser wiedergeben, als mit den von ihnen selbst angewandten Constanten, wie folgende Tabelle zeigt.

| | | | | | | |
|---------------------------|------|-------|--------|--------|-------|-------|
| Procentgehalt | 0 | 4,05 | 8,27 | 14,07 | 20,06 | 26,40 |
| Moleculargehalt | 0 | 724 | 1544 | 2805 | 4300 | 6145 |
| relat. scheinbar. } beob. | 1000 | 0,914 | 0,833 | 0,737 | 0,648 | 0,566 |
| Compression } berechn. | 1000 | 0,914 | 0,834 | 0,736 | 0,648 | 0,566 |
| Differenz | | 0 | +0,001 | -0,001 | 0 | 0 |

Ich habe die Relation²⁾

$$(y - y'')(n + a) = (y' - y'')a,$$

1) Braun, Wied. Ann. 30. p. 257. 1887.

2) Röntgen u. Schneider, l. c. p. 193.

worin y die Compressibilität der Lösung, y' diejenige des Wassers, y'' diejenige des festen Salzes, n den Moleculargehalt und a eine Constante bedeutet, auch auf die von mir untersuchten Lösungen angewandt. Für Chlorkalium ergab sich $a = 8310$, $y'' = 0,000\,000\,40$, für Chlorcalcium $a = 4891$, $y'' = 0,000\,002\,47$. Die Zahlen für y'' würden unter der Voraussetzung der Gültigkeit der Formel über das Beobachtungsgebiet hinaus die scheinbaren Compressibilitäten der festen Salze bedeuten. Einen Vergleich zwischen beobachteten und den mit den Constanten nach der Gleichung berechneten Werthen gibt die folgende Zusammenstellung.

Chlorkaliumlösungen:

| | | | | | | | |
|-----------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Procentgehalt | 2,49 | 4,40 | 8,28 | 13,02 | 16,75 | 19,97 | 24,31 |
| Moleculargehalt | 343 | 619 | 1213 | 2012 | 2704 | 3354 | 4317 |
| $10^7 \cdot y$ scheinbare } beob. | 426 | 412 | 389 | 354 | 341 | 317 | 301 |
| Compression } berechn. | 425 | 413 | 389 | 361 | 341 | 324 | 302 |

Chlorcalciumlösungen:

| | | | | | | | |
|-----------------------------------|-----|-----|------|------|------|------|------|
| Procentgehalt | 5,8 | 9,9 | 17,8 | 24,1 | 30,2 | 35,4 | 40,9 |
| Moleculargehalt | 555 | 990 | 1951 | 2861 | 3897 | 4938 | 6234 |
| $10^7 \cdot y$ scheinbare } beob. | 397 | 371 | 313 | 276 | 256 | 232 | 217 |
| Compression } berechn. | 398 | 371 | 315 | 287 | 256 | 232 | 208 |

Auch hier ist die Uebereinstimmung mit Ausnahme der 24procentigen CaCl_2 -Lösung eine ziemlich gute; es darf jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass man mit anderen Constanten eine ebenso gute Uebereinstimmung erreichen kann, z. B. bei CaCl_2 -Lösungen mit den Constanten $a = 4610$ und $y'' = 0,000\,003\,13$, welche sich ergeben, wenn man zunächst aus der Verbindung eines Werthepaares für y und n mit allen übrigen a bestimmt, dann mit dem Mittelwerthe für a aus sämtlichen Gleichungen y'' berechnet und hieraus wieder das Mittel nimmt.

Was sich mit voller Bestimmtheit aus den mitgetheilten Versuchen ergibt, ist Folgendes: Die Compressibilität der Lösungen von Chlorkalium und Chlorcalcium ist stets kleiner als die des Wassers, jedoch ist die durch Hinzufügung des Salzes hervorgerufene Compressibilitätsverkleinerung nicht proportional dem Salzgehalt. Die Compressibilität der untersuchten Salzlösungen nimmt bis zu einem bestimmten Concentrationsgrade mit der Temperatur ab, analog dem Ver-

halten des Wassers, dann aber nimmt die Compressibilität mit steigender Temperatur zu, wie es bei anderen Flüssigkeiten (Alkohol, Aether, Chloroform etc.) der Fall ist. Der betreffende Concentrationsgrad ist für Chlorkaliumlösungen etwa bei 16 Proc., für Chlorcalciumlösungen etwa bei 20 Proc. erreicht. Die Compressibilität dieser Lösungen ist demnach von der Temperatur unabhängig.

Specifische Wärme der Salzlösungen bei constantem Volumen.

Zwischen der specifischen Wärme der Flüssigkeiten bei constanten Volumen und derjenigen bei constantem Druck besteht die Relation:

$$c_v = c_p + \frac{T \left(\frac{d_v}{d_t} \right)^2}{E \frac{d_v}{d_p}} \quad 1)$$

Beziehen wir diese Gleichung auf $t = 20^\circ$ und setzen für die Differentialquotienten die betreffenden Werthe ein, so ergibt sich die Gleichung:

$$c_v = c_p - \frac{293}{224 v_0 \beta (1 + 20 \alpha_{20})} \cdot \alpha_{20}^2 \cdot v_0^2 \cdot 10334.$$

In der Berechnung der folgenden Tabellen habe ich die oben mitgetheilten Werthe für c_p zu Grunde gelegt. Streng genommen müssen auch diese sich auf die Temperatur 20° beziehen, das ist aber nicht der Fall; die aus der Winkelmann'schen Formel berechneten Werthe geben die specifischen Wärmen für die Chlorkaliumlösungen bei 18° , während die von mir gefundenen Werthe für Chlorcalcium die mittlere specifische Wärme zwischen den Beobachtungstemperaturen darstellen. Die Abweichung dürfte aber eine erlaubte Grenze nicht überschreiten. Berechnet man aus dem Procentgehalt der Lösung die Wärme, welche das Wasser der Lösung gebrauchen würde, wenn es für sich allein erwärmt würde, so zeigt sich, wie schon Schüller²⁾ nachgewiesen, dass dieselbe bei constantem Druck für Chlorkalium-

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. Aufl. 1. p. 189.

2) Schüller, Pogg. Ann. 136. p. 235. 1869.

lösungen einen grösseren Betrag hat, als die Wärme, welche die Lösung gebraucht. Bezieht man die gebrauchte Wärme auf 1000g, so geben die mit Δ_p überschriebenen Columnen der folgenden Tabelle die Wärmemengen in Calorien, welche 1000 g Lösung zur Temperaturerhöhung um 1° weniger gebrauchen, als das in ihnen enthaltene Wasser allein. Δ_v gibt die Zahlen gleicher Bedeutung für die specifischen Wärmen bei constantem Volumen. Die Werthe für Δ_p sowohl, als diejenigen für Δ_v nehmen für beide Salzlösungen zunächst mit steigendem Salzgehalt zu, erreichen bei einem bestimmten Gehalt ein Maximum, um alsdann wieder abzunehmen. Bei den concentrirten CaCl_2 -Lösungen werden sie negativ, d. h. diese Lösungen gebrauchen mehr Wärme, als das darin enthaltene Wasser allein. Stets aber ist die specifische Wärme der Lösungen kleiner, als die aus den Bestandtheilen nach der Gleichung:

$$m = \frac{c_1 p_1 + c_2 p_2}{p_1 + p_2}$$

berechnete mittlere specifische Wärme m . Bei der Berechnung von mp (mittlere specifische Wärme bei constantem Druck) habe ich die von Regnault¹⁾ angegebenen Werthe 0,1729 für die specifische Wärme des Chlorkaliums und 0,1642 für die specifische Wärme des Chlorcalciums zu Grunde gelegt.

Ferner ist zu bemerken, dass die Differenzen zwischen beobachteten und berechneten specifischen Wärmen bei constantem Volumen grösser sind, als bei constantem Druck, dass also die innere Ausdehnungsarbeit in den Lösungen eine grössere ist, als die Summe dieser Arbeiten bei den Bestandtheilen der Lösung. Es tritt demnach bei den Salzlösungen der umgekehrte Fall ein, wie bei den früher von mir in dieser Beziehung untersuchten Flüssigkeitsgemischen, bei welchen sich die Differenz zwischen beobachteter und berechneter specifischer Wärme wenigstens zum Theil durch die geänderte innere Ausdehnungsarbeit erklären liess. Bei den KCl - und CaCl_2 -Lösungen ist also die specifische Wärme kleiner, als die mittlere, aus den Bestandtheilen berechnete,

1) Regnault, Ann. de chim. et de phys. (3) 1. 1841.

trotzdem die innere Ausdehnungsarbeit in der Lösung grösser ist, als in den getrennten Bestandtheilen.

Chlorkaliumlösungen.

| Proc.-Gehalt | c_p | A_p | m_p | c_v | A_v |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1,000 | — | — | 0,995 | — |
| 2,49 | 0,968 | 7 | 0,979 | 0,960 | 9 |
| 4,40 | 0,946 | 10 | 0,964 | 0,936 | 14 |
| 8,28 | 0,902 | 15 | 0,931 | 0,889 | 23 |
| 13,02 | 0,849 | 21 | 0,893 | 0,832 | 33 |
| 16,75 | 0,809 | 23 | 0,861 | 0,790 | 37 |
| 19,97 | 0,777 | 23 | 0,835 | 0,755 | 40 |
| 24,31 | 0,739 | 18 | 0,799 | 0,715 | 38 |

Chlorcalciumlösungen:

| Proc.-Gehalt | c_p | A_p | m_p | c_v | A_v |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 1,000 | — | — | 0,995 | — |
| 5,8 | 0,936 | 6 | 0,952 | 0,926 | 11 |
| 9,9 | 0,879 | 22 | 0,917 | 0,866 | 30 |
| 17,8 | 0,789 | 23 | 0,851 | 0,768 | 50 |
| 24,1 | 0,730 | 29 | 0,799 | 0,703 | 52 |
| 30,2 | 0,685 | 14 | 0,748 | 0,652 | 43 |
| 35,4 | 0,656 | —10 | 0,704 | 0,617 | 26 |
| 40,9 | 0,636 | —45 | 0,658 | 0,591 | —2 |

Aachen, März 1888.

XV. *Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher Gase den Maxwell'schen Zustand erreichen;*
von Ladislaus Natanson.

In seinen „Illustrations of the dynamical theory of gases“ hat Maxwell den Satz ausgesprochen, dass die Zahl derjenigen Molecüle, die sich in einem Gase mit einer zwischen v und $v + dv$ enthaltenen Geschwindigkeit bewegen,

$$\frac{4N}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} v^3 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$$

gleich ist, wenn sich das Gas im Wärmegleichgewicht befindet. Hierin bedeutet N die Gesamtzahl der Molecüle, α die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (Geschwindigkeitsmodulus). Bereits Maxwell hat hervorgehoben, dass dieses Gesetz nur annähernd in der Natur erfüllt sein könne, da es in voller Strenge nur auf den Fall von unendlich grossem N anzuwenden wäre. Hr. Boltzmann, welchem man den exacten Beweis dieses Gesetzes verdankt, hat weiter gezeigt, dass dasselbe noch aus anderem Grunde eine Annäherung ist; sollte es nämlich strenge Geltung haben, so müsste die Zeitdauer eines Zusammenstosses gegen die Zeit, die zwischen zwei Zusammenstössen vergeht, verschwinden, was nur annäherungsweise den thatsächlichen Verhältnissen entspre-

chen kann. Das Maxwell'sche Gesetz hat man demnach als Grenze anzusehen, welcher sich das wahre Vertheilungsgesetz in Gasen nähert, wenn die Anzahl der Molecüle unbegrenzt wächst, und die Dauer der Zusammenstösse immer mehr abnimmt.

Ich glaube, eine weitere Beschränkung hinzufügen zu dürfen. Stellen wir uns ein ideelles Gas vor, welches sowohl die Maxwell'sche, wie die Boltzmann'sche Bedingung erfüllen mag. Wir stören dessen Zustand¹⁾ in beliebiger Weise und überlassen es sich selbst. Das Gas nähert sich zwar dem durch das Maxwell'sche Gesetz vorgeschriebenen Zustande, jedoch nimmt die Geschwindigkeit dieses Vorganges mehr und mehr ab, je näher der schliessliche (Maxwell'sche) Zustand ist. Mit anderen Worten, die Annäherung ist asymptotisch. Und obwohl das Gas sehr schnell solche Zustände annimmt, die vom Maxwell'schen nur wenig abweichen, so wird es doch genau den Maxwell'schen Zustand erst nach Ablauf unendlich langer Zeit erreichen.

Von der Richtigkeit dieser Sätze war ich schon seit längerer Zeit überzeugt.²⁾ Vor kurzem hat Hr. Tait³⁾ ein damit verwandtes Problem behandelt (worauf ich weiter unten eingehen will), und in einer eben erschienenen Abhandlung⁴⁾ hat Hr. Boltzmann die im Titel angeführte Frage berührt. Es sei mir gestattet, zur weiteren Beleuchtung des Gegenstandes einige Betrachtungen hier mitzutheilen.

1. Das Problem ist folgendes: Ein Gas, welches aus N einatomigen Molecülen besteht, ist zur Zeit $t = 0$ in einem beliebigen Zustande begriffen, wird jedoch von diesem Augenblicke an sich selbst überlassen. Die gesammte lebendige Kraft soll $N \cdot L$ betragen. Welchem schliesslichen Zustande das Gas zustreben wird, hat Hr. Boltzmann in seinen „Weiteren Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas-

1) Mit dem Worte Zustand soll immer eine gewisse Vertheilungsart der Geschwindigkeiten auf die Gasmolecüle bezeichnet werden.

2) In meiner Magisterschrift (Ueber die kinetische Theorie unvollkommener Gase, Dorpat, 1887) sind sie z. B. als These 6 angeführt.

3) Tait, Trans. of the Roy. Soc. of Edinb. 33. p. 82. 1886.

4) Boltzmann, Phil. Mag. (5) 25. p. 88. 1888.

moleculen⁽¹⁾ und in späteren Abhandlungen in vollständigster Weise erläutert; wir aber wollen das Gesetz suchen, welches bestimmt, in welcher Weise das Gas diesem schliesslichen Zustande zustrebt. Dazu will ich mich einer Methode bedienen, die zuerst in den „Weiteren Studien“ angewandt worden ist, auch manche Bezeichnungen dieser Abhandlung werde ich behalten. Wir setzen, dass die Moleculé nicht im Stande sind, eine Reihe continuirlich ineinander übergehender Werthe der lebendigen Kraft anzunehmen, sondern nur folgende Werthe derselben:

$$(1) \quad \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots, p\varepsilon.$$

Zugleich wollen wir $L = \lambda\varepsilon$ setzen. Zur Zeit t soll das Gas aus w_1 Moleculén mit der lebendigen Kraft ε , aus w_2 Moleculén mit der lebendigen Kraft $2\varepsilon, \dots$, aus w_p Moleculén mit der lebendigen Kraft $p\varepsilon$ bestehen. Die Grössen w sind mit der Zeit variabel, müssen jedoch stets den Gleichungen:

$$(2) \quad w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_p = N,$$

$$(3) \quad w_1 + 2w_2 + 3w_3 + \dots + pw_p = N\lambda$$

genügen. Wir wollen nun ganz wie Hr. Boltzmann in der citirten Abhandlung verfahren. Die Grössen w ändern sich durch Zusammenstösse; von diesen wollen wir nur voraussetzen, dass in ihnen die Summe der lebendigen Kräfte beider Moleculé erhalten bleibt. Sind also $m\varepsilon, n\varepsilon$ die lebendigen Kräfte der Moleculé vor, und $\mu\varepsilon, \nu\varepsilon$ die lebendigen Kräfte nach dem Zusammenstosse, so soll immer:

$$(4) \quad m + n = \mu + \nu$$

sein. Durch jeden Zusammenstoss von solcher Beschaffenheit wird w_μ und w_ν um eine Einheit vergrössert, w_m und w_n um eine Einheit vermindert. Ist also $N_{\mu, \nu}^{m, n}$ die Zahl der Zusammenstösse, die während der Zeit Δt so geschehen, dass die lebendigen Kräfte vor dem Stosse $m\varepsilon, n\varepsilon$ und nach demselben $\mu\varepsilon, \nu\varepsilon$ sind, so haben wir die Aenderung Δw_i von w_i während der Zeit Δt folgendermassen zu bilden:

1) Boltzmann, Wien. Ber. 66. p. 397. 1872.

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \Delta w_i = & -N_{i,1}^{i,1} - N_{i-1,2}^{i,1} - \dots - N_{2,i-1}^{i,1} - N_{1,i}^{i,1} \\
 & + N_{i,1}^{i-1,2} + \dots + N_{i,1}^{2,i-1} + N_{i,1}^{1,i} \\
 & - N_{i+1,1}^{i,2} - N_{i,2}^{i,2} - \dots - N_{2,i}^{i,2} - N_{1,i+1}^{i,2} \\
 & + N_{i,2}^{i+1,1} + N_{i,2}^{i,2} + \dots + N_{i,2}^{2,i} + N_{i,2}^{1,i+1} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & - N_{i+l-1,1}^{i,l} - N_{i+l-2,2}^{i,l} - \dots - N_{2,i+l-2}^{i,l} - N_{1,i+l-1}^{i,l} \\
 & + N_{i,l}^{i+l-1,1} + N_{i,l}^{i+l-2,2} + \dots + N_{i,l}^{2,i+l-2} + N_{i,l}^{1,i+l-1} \\
 & \dots \dots \dots 1) \\
 & - N_{p,1}^{i,p-i+1} - N_{p-1,2}^{i,p-i+1} - \dots - N_{2,p-1}^{i,p-i+1} - N_{1,p}^{i,p-i+1} \\
 & + N_{i,p-i+1}^{p,1} + N_{i,p-i+1}^{p-1,2} + \dots + N_{i,p-i+1}^{2,p-1} + N_{i,p-i+1}^{1,p} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & - N_{p,i}^{i,p} - N_{p-1,i+1}^{i,p} - \dots - N_{i+1,p-1}^{i,p} - N_{i,p}^{i,p} \\
 & + N_{p,i}^{p,i} + N_{p,i}^{p-1,i+1} + \dots + N_{i+1,p-1}^{p,i} + N_{i,p}^{p,2})
 \end{aligned}$$

In der mehrmals citirten Abhandlung Hrn. Boltzmann's ist der Beweis enthalten, dass:

$$(6) \quad N_{\mu, \nu}^{m, n} = \Delta t \frac{w_m w_n}{V^{m, n}} B_{\mu, \nu}^{m, n}$$

ist, worin $B_{\mu, \nu}^{m, n}$ eine m, n, μ, ν enthaltende, von der Zeit vollkommen unabhängige Function bezeichnet, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$(7) \quad B_{\mu, \nu}^{m, n} = B_{n, \mu}^{\mu, \nu}.$$

Setzt man (6) und (7) in (5) ein, und berücksichtigt, dass die Moleculë keine anderen als die p lebendigen Kräfte der Reihe (1) annehmen können, so findet man:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta w_i}{\Delta t} &= \sum_{l=1}^{i=p-i+1} \sum_{k=1}^{i+l-1} B_{i+l-k, k}^{i, l} \left(\frac{w_{i+l-k} w_k}{V^{(i+l-k)k}} - \frac{w_i w_l}{V^{i \cdot l}} \right) \\ &+ \sum_{i=p-i+2}^{l=p} \sum_{k=0}^{i=2p-i-l} B_{p-k, i-p+l+k}^{i, l} \left(\frac{w_{p-k} w_{i-p+l+k}}{V^{(p-k)(i-p+l+k)}} - \frac{w_i w_l}{V^{i \cdot l}} \right). \end{aligned} \right.$$

1) Diese Bildungsweise gilt nur, bis $i + l - 1$ gleich p geworden ist. Denn grösser als p kann keine lebendige Kraft werden.

2) Der Vollständigkeit halber werden hier absichtlich Glieder gezählt, die gleich Null sind, oder sich mit anderen tilgen.

Hierin¹⁾ setzen wir $\sqrt{i} \cdot u_i = w_i$ und lassen Δt beständig abnehmen; es kommt:

$$(9) \left\{ \begin{aligned} \sqrt{i} \frac{du_i}{dt} &= \sum_{l=1}^{l=p-i+1} \sum_{k=1}^{k=i+l-1} B_{i+l-k, k}^{i, l} (u_{i+l-k} u_k - u_i u_l) \\ &+ \sum_{l=p-i+2}^{l=p} \sum_{k=0}^{k=2p-i+l} B_{p-k, i-p+l+k}^{i, l} (u_{p-k} u_{i-p+l+k} - u_i u_l), \end{aligned} \right.$$

ein System von p Differentialgleichungen, welches in Verbindung mit (2) und (3) die Abhängigkeit der Grössen u von der Zeit bestimmt.

2. Ich setze nun $p=3$ und untersuche diesen speciellen Fall etwas näher. Das System (9) reducirt sich auf:

$$(1_a) \quad \frac{du_1}{dt} = B(u_2^2 - u_1 u_3), \quad (1_b) \quad \sqrt{2} \frac{du_2}{dt} = 2B(u_1 u_3 - u_2^2),$$

$$(1_c) \quad \sqrt{3} \frac{du_3}{dt} = B(u_3^2 - u_1 u_3),$$

worin anstatt $B_{2,2}^{1,3}$ einfach B geschrieben ist. Die Bedingungengleichungen haben die Gestalt:

$$(2) \quad u_1 + \sqrt{2} u_2 + \sqrt{3} u_3 = N \quad \text{und:}$$

$$(3) \quad u_1 + 2\sqrt{2} u_2 + 3\sqrt{3} u_3 = N \cdot \lambda.$$

Anstatt $u_2^2 - u_1 u_3$ kann man demnach $a + b u_3 + c u_3^2$ setzen, wenn:

$$(4) \quad a = N^2 \frac{(\lambda-1)^2}{2}; \quad b = N[2(\sqrt{3}-1) - \lambda(2\sqrt{3}-1)]; \quad c = 6 - \sqrt{3}$$

angenommen wird. Die Coëfficienten a, b, c können also von N und λ abhängig gedacht werden; N und λ haben gegebene, Druck und Temperatur definirende Werthe. Diese Coëfficienten kann man noch in anderer Weise berechnen. Hr. Boltzmann hat bewiesen, dass im vorliegenden Falle das Gas sich einem Zustande nähert, welcher nicht mehr verlassen wird. Ist dieser Zustand eingetreten, so sollen die Grössen u_1, u_2, u_3 die Werthe U_1, U_2, U_3 angenommen haben. Aus (1_a), (1_b), (1_c) folgt aber:

1) Die zweite Summe könnte noch geschrieben werden:

$$\sum_{j=2}^{j=i} \sum_{k=0}^{k=p-j} B_{p-k, k+j}^{i, p-i+j} \left(\frac{w_{p-k} w_{k+j}}{\sqrt{(p-k)(k+j)}} - \frac{w_i w_{p-i+j}}{\sqrt{i(p-i+j)}} \right).$$

$$(5) \quad du_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} du_2 = \sqrt{3} du_3,$$

und daraus ergibt sich:

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 + \frac{u_2}{\sqrt{2}} = U_1 + \frac{U_2}{\sqrt{2}}; & u_1 - \sqrt{3} u_3 = U_1 - \sqrt{3} U_3; \\ u_2 + \sqrt{6} u_3 = U_2 + \sqrt{6} U_3. \end{cases}$$

Man kann daher $u_2^2 - u_1 u_3$ in die Form $a + b u_3 + c u_3^2$ bringen, wenn man:

$$(7) \quad \begin{cases} a = U_2^2 + 6 U_3^2 + 2\sqrt{6} U_2 U_3; \\ b = -[2\sqrt{6} U_2 + U_1 + (12 - \sqrt{3}) U_3]; & c = 6 - \sqrt{3} \end{cases}$$

setzt. Die Gl. (1_c) nimmt die Gestalt an:

$$(8) \quad \frac{du_3}{a + b u_3 + c u_3^2} = \frac{B}{\sqrt{3}} dt,$$

und wird, da $b^2 - 4ac$ stets positiv ist, unmittelbar integriert zu:

$$(9) \quad \frac{2c u_3 + b + \sqrt{k}}{2c u_3 + b - \sqrt{k}} = A e^{-t/T}.$$

Mit k ist $b^2 - 4ac$, mit T ist $\sqrt{3}/B\sqrt{k}$, mit A eine vom Anfangszustande abhängige Constante bezeichnet. Die erhaltene Gleichung lässt sich noch in folgender Weise umformen:

$$(10) \quad u_3 = -\frac{b}{2c} - \frac{\sqrt{k}}{2c} \cdot \frac{1 + A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}} = -\frac{b + \sqrt{k}}{2c} - \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}}.$$

Diese Gleichung gibt die Anzahl der Molecüle (mit $\sqrt{3}$ dividirt) an, die die lebendige Kraft 3ε haben, und zwar nicht mehr für den schliesslichen Zustand des Wärmegleichgewichtes, sondern für eine beliebige Zeit t . Da der schliessliche Zustand mit der Zeit nicht weiter veränderlich sein soll, so kann er erst nach Ablauf unendlich langer Zeit eintreten. Dann verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite von (10), und es wird:

$$(11) \quad U_3 = -\frac{b + \sqrt{k}}{2c},$$

so dass Gl. (10) auch als:

$$(12) \quad u_3 = U_3 - \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}}$$

geschrieben werden kann. Dass U_3 gerade diejenige Grösse ist, welche für u_3 vom Maxwell'schen Gesetze gefordert wird, ersieht man daraus, dass $-(b + \sqrt{k})/2c$ eine Wurzel

der Gleichung $a + bu_3 + cu_3^2 = 0$ ist; diese letztere nimmt unter Berücksichtigung von (7) die Form $U_1 U_3 = U_2^2$ an, die nach Boltzmann im vorliegenden Falle mit dem Maxwell'schen Gesetze gleichbedeutend ist.

Von der Gl. (12) ausgehend, können wir nun weiter unter Zuhilfenahme von (6) Formeln für u_1 und u_2 erhalten:

$$(13) \quad u_1 = U_1 - \sqrt{3} \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}},$$

$$(14) \quad u_2 = U_2 + \sqrt{6} \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}};$$

sie genügen natürlich den Gleichungen (2) und (3), indem in den Summen $u_1 + \sqrt{2}u_2 + \sqrt{3}u_3$, $u_1 + 2\sqrt{2}u_2 + 3\sqrt{3}u_3$ alles verschwindet, was von der Zeit abhängig ist. Will man endlich zu den uns eigentlich interessirenden Zahlen w wiederkehren, so setzt man $\sqrt{i} U_i = W_i$ und findet:

$$(15) \quad w_1 = W_1 - \sqrt{3} \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}},$$

$$(16) \quad w_2 = W_2 + 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}},$$

$$(17) \quad w_3 = W_3 - \sqrt{3} \frac{\sqrt{k}}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{1 - A e^{-t/T}}.$$

Hierin sind w_i die veränderlichen, W_i die Maxwell'schen Werthe der Moleculzahlen, welche eine lebendige Kraft i haben; k, c, T, A sind Constanten.

Zwei Bemerkungen mögen hier Platz finden. Wir haben gesehen, dass der Maxwell'sche Zustand erreicht wird, wenn die Grösse $u_2^2 - u_1 u_3$, die ich f nennen will, verschwindet. Interessant ist also nachzusuchen, welchen allgemeinen, die Zeit enthaltenden Ausdruck f hat. Da nach (1₀) $Bf = \sqrt{3} du_3/dt$ ist, so findet man leicht:

$$(18) \quad f = \frac{k}{c} \cdot \frac{A e^{-t/T}}{(1 - A e^{-t/T})^2},$$

oder auch, wenn mit f_0 der der Zeit $t = 0$ entsprechende Werth von f bezeichnet wird:

$$(19) \quad f = f_0 \frac{e^{-t/T}}{(1 - A e^{-t/T})^2}.$$

Die hier vorkommende Grösse T hat die Bedeutung einer Zeitperiode. Sie ist von derselben Grössenordnung wie $1/B \cdot N$ (das Gasvolumen ist gleich Eins gesetzt), und B ist von der Grössenordnung $\pi R^2 \alpha$, wenn mit R der Radius der sogenannten Molecularsphäre oder die Anfangsentfernung zweier zusammenstossender Molecüle bezeichnet wird. Man findet¹⁾, dass die Grössenordnung von T für 1 ccm Sauerstoff z. B. bei 0° C. und Atmosphärendruck auf 10^{-9} Sec. geschätzt werden kann. Dies führt zu den in der Einleitung aufgestellten Sätzen.

Betrachten wir die ausgeführten Rechnungen, so ersehen wir, dass, wie oben für u_3 , ein ganz analoger Weg für u_1 oder u_2 eingeschlagen werden könnte. Wir hätten alsdann neue, den vorigen a, b, c, h, T, A entsprechende Constanten einführen; die resultirenden Formeln wären dadurch unwesentlich geändert. Bezeichnen wir die Grösse $\sqrt{k} \cdot A e^{-t/T} / c (1 - A e^{-t/T})$ mit den auf u_i sich beziehenden Constanten A, h, c, T mit Θ_i (die in den bisherigen Formeln vorkommende Grösse demnach mit Θ_3) so können wir folgendes Gleichungensystem aufstellen:

$$(20) \begin{cases} w_1 = W_1 - \Theta_1, & w_1 = W_1 - \sqrt{1} \Theta_2, & w_1 = W_1 - \sqrt{3} \Theta_3, \\ w_2 = W_2 + 2 \Theta_1, & w_2 = W_2 + \sqrt{2} \Theta_2, & w_2 = W_2 + 2 \sqrt{3} \Theta_3, \\ w_3 = W_3 - \Theta_1, & w_3 = W_3 - \sqrt{\frac{1}{2}} \Theta_2, & w_3 = W_3 - \sqrt{3} \Theta_3. \end{cases}$$

Addiren wir jede drei Gleichungen, die in einer Horizontallinie stehen, untereinander und bezeichnen $\Theta_1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \Theta_2 + \sqrt{3} \Theta_3$ mit 3ϑ , so kommt:

$$(21) \quad w_1 = W_1 - \vartheta, \quad w_2 = W_2 + 2\vartheta, \quad w_3 = W_3 - \vartheta;$$

ϑ ist eine Function, die mit unendlich wachsender Zeitdauer gegen Null convergirt.

3. In complicirteren Fällen stehen nun eingehenderer Behandlung analytische Schwierigkeiten im Wege. Wird z. B. $p = 4$ angenommen, so findet man, dass die Lösung des Problems in den Gleichungen:

1) Eine vollkommen analoge Grösse T hat schon Hr. Tait in derselben Weise berechnet (§ 4).

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{du_3}{dt} = au_3^2 + bu_1^2 + cu_3u_1 + eu_3 + fu_1, \\ \frac{du_4}{dt} = a'u_3^2 + b'u_1^2 + c'u_3u_1 + e'u_3 + f'u_1 \end{cases}$$

enthalten ist; die Integration derselben bietet indessen Schwierigkeiten. Um aber zur Grenze ($p = \infty$) übergehen zu können, wäre eine ganz allgemeine Integration eines Systems von $(p-2)$ quadratischen Differentialgleichungen erster Ordnung erforderlich. Uebrigens lässt sich ohne Integration erkennen, dass die Function $f(x, t)$, die die Wahrscheinlichkeit einer zwischen x und $x+dx$ enthaltenen lebendigen Kraft zu einer beliebigen Zeit t angiebt, die Variable t „asymptotisch“ enthalten muss. Dies erhellt aus der Gleichung, die Hr. Boltzmann in den „Weiteren Studien“, unter (16) als Fundamentalgleichung für die Veränderung der Function $f(x, t)$ aufstellt. Ist die lebendige Kraft des einen Molecüls vor dem Stosse zwischen x und $x+dx$, nach dem Stosse zwischen ξ und $\xi+d\xi$ enthalten; die des anderen vor dem Stosse zwischen x' und $x'+dx'$, nach dem Stosse zwischen ξ' und $\xi'+d\xi'$ enthalten, bezeichnet $\psi(x, x', \xi)$ eine der vorigen Grösse $\sqrt{mn} \cdot B_{\mu, n}^{m, n}$ entsprechende, die Natur des Stosses bestimmende Function, so ist:

$$(2) \quad \frac{df(x, t)}{dt} = \int_0^x \int_0^{x'} \left[\frac{f(\xi, t)}{V\xi} \cdot \frac{f(\xi', t)}{V\xi'} - \frac{f(x, t)}{Vx} \cdot \frac{f(x', t)}{Vx'} \right] \cdot \sqrt{xx'} \cdot \psi(x, x', \xi) dx' d\xi$$

die Boltzmann'sche Gleichung. Je näher der Maxwell'sche Zustand ist, um so kleiner wird die eingeklammerte Differenz (die der obigen $u_2^2 - u_1u_3$ entspricht); dann aber nimmt $df(x, t)/dt$ immer mehr ab, d. h. die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Gas dem Endzustande nähert, nimmt mehr und mehr ab. Dieser Maxwell'sche Endzustand wird also nach unendlich langer Zeit erreicht. Was aber die Function $f(x, t)$ betrifft, so darf man vorläufig voraussetzen, dass die Anzahl von Molecülen, die zu einer Zeit t , wenn Wärmegleichgewicht noch nicht eingetreten ist, eine zwischen v und $v+dv$ enthaltene Geschwindigkeit haben, durch:

$$(3) \quad \frac{4N}{\alpha^3 \sqrt{\pi}} \left(v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} - \varphi(v) \frac{e^{-v/T}}{1 - Ae^{-v/T}} \right) dv$$

gegeben ist. Hierin sind $\varphi(v)$, A und T unbekannte Functionen von v , die t nicht enthalten, und folgende Gleichungen:

$$(4) \int_0^{\infty} \varphi(v) \frac{e^{-t/T}}{1 - Ae^{-t/T}} dv = 0, \quad (5) \int_0^{\infty} v^2 \varphi(v) \frac{e^{-t/T}}{1 - Ae^{-t/T}} dv = 0,$$

identisch erfüllen.

4. In §§ 23 und 24 seiner ersten Abhandlung „On the foundations“ u. s. w. hat Hr. Tait, um eine Vorstellung von der Geschwindigkeit zu erhalten, mit welcher Gase dem Maxwell'schen Zustande zustreben, folgendes Problem behandelt: die Energie zu berechnen, welche in einem Gasgemenge von N_1 Molecülen mit der Masse m_1 und N_2 Molecülen mit der Masse m_2 — den Molecülen m_1 von Seiten der Molecüle m_2 in der Zeiteinheit abgegeben wird. Die gleiche Energiemenge habe ich (unter etwas anderen Annahmen, als Hr. Tait) berechnet.¹⁾ Es seien α, β die wahrscheinlichsten Geschwindigkeiten für beide Gase, R die charakteristische Entfernung des Zusammenstosses $m_1 m_2$. Ich finde die erwähnte Energiemenge zu:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & 16 \sqrt{\pi} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \\ & N_1 N_2 R^2 \frac{(m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2)}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w^5 e^{-w^2/(\alpha^2 + \beta^2)} \sin^2 \omega \sin \psi \cos \psi d\psi dw. \end{aligned} \right.$$

Wirken aber die Molecüle in der Entfernung R wie elastische Kugeln aufeinander, so hat das Doppelintegral den Werth $(\alpha^2 + \beta^2)^3/4$, und obige Energiemenge hat die Grösse:

$$(2) \quad 4 \sqrt{\pi} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} N_1 N_2 R^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} (m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2).$$

Wird hierin $\frac{1}{2} N_1 m_1 \alpha^2$ mit ω , $\frac{1}{2} N_2 m_2 \beta^2$ mit ϱ , $1/\alpha^2$ mit h , $1/\beta^2$ mit k , weiter m_1, m_2, N_1, N_2, R mit P, Q, m, n, s ersetzt, so erhält man aus (2) die von Hrn. Tait gegebene Grösse, welche er in der Form einer Differentialgleichung schreibt, indem (2) dem Differentialquotienten $d(\frac{1}{2} N_1 m_1 \alpha^2)/dt$ gleichgesetzt wird. Diese Gleichung wird angenähert integrirt,

1) Lad. Natanson, Wied. Ann. 33. p. 683. 1888.

unter der Annahme, dass $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ constant ist. Für den Zweck der betreffenden Betrachtungen genügt dies vollständig; indessen kann (wie auch Hr. Tait mir brieflich mittheilen die Güte hatte) die Integration genau ausgeführt werden. Ich setze dazu die constante Grösse $N_1 m_1 \alpha^2 + N_2 m_2 \beta^2$ gleich $N_2 L$, weiter bezeichne ich N_1/N_2 mit n , und $16 m_1 m_2 N_2 R^2 \sqrt{\pi/3} (m_1 + m_2)^2$ mit C ;

$$(3) \quad \frac{d}{dt}(m_1 \alpha^2) = C \sqrt{\frac{L}{m_2} + \alpha^2 \left(1 - n \frac{m_1}{m_2}\right)} (L - (n+1)m_1 \alpha^2)$$

ist dann unsere Differentialgleichung. Setzt man weiter (wenn $m_2 \geq n m_1$ ist, sonst ist Hrn. Tait's Gleichung streng richtig):

$$(4) \quad \frac{L}{m_2} + \alpha^2 \left(1 - n \frac{m_1}{m_2}\right) = y^2 \cdot L \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 (n+1)} \quad \text{und:}$$

$$(5) \quad C \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (n+1)} L = \frac{1}{T},$$

so findet man aus (3):

$$(6) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2T} (1 - y^2), \quad \frac{1-y}{1+y} = A e^{-t/T}, \quad y = \frac{1 - A e^{-t/T}}{1 + A e^{-t/T}},$$

wo A eine Constante ist. Man überzeugt sich leicht, dass:

$$(7) \quad 1 - y^2 = \frac{m_2 - n m_1}{m_2 + m_1} \cdot \frac{m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2}{L},$$

folglich ist:

$$(8) \quad m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2 = \frac{4(m_2 + m_1)(N_1 m_1 \alpha^2 + N_2 m_2 \beta^2)}{N_2 m_2 - N_1 m_1} \frac{A e^{-t/T}}{(1 + A e^{-t/T})^2}.$$

Die Differenz $(m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2)$, die nach Maxwell's Theorem verschwinden muss, convergirt also gegen Null mit wachsendem t nach obigem Gesetze. Die angenäherte Gleichung in Hrn. Tait's Abhandlung enthält nur den Zähler der Zeitfunction. Die Zeit T berechnet Hr. Tait zu $0,73 \cdot 10^{-10}$ Secunden und weist darauf hin, dass schon nach Verlauf der überaus kurzen Zeit $4,6 T$ die Differenz $m_2 \beta^2 - m_1 \alpha^2$ auf $1/100$ ihrer ursprünglichen Grösse herabsinken muss. Um so bemerkenswerther scheint mir zu sein, dass dieser übrig bleibende $1/100$. Theil, um vollständig zu verschwinden, der Ewigkeit bedarf.

Warschau, März 1888.

XVI. Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Topas und Baryt; von W. Voigt.

(Im Auszug vom Herrn Verf. mitgeteilt aus den Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1887, Nr. 19.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 5—8.)

Formeln für das rhombische System.

Die Elasticitätsconstanten c_{hk} für das rhombische System definieren wir durch das folgende System Formeln, welches sich auf die Hauptaxen der Krystalle bezieht:

$$(1) \quad \begin{cases} -X_x = c_{11}x_x + c_{12}y_y + c_{13}z_z \\ -Y_y = c_{21}x_x + c_{22}y_y + c_{23}z_z \\ -Z_z = c_{31}x_x + c_{32}y_y + c_{33}z_z \\ -Y_z = c_{44}y_z, \quad -Z_x = c_{55}z_x, \quad -X_y = c_{66}x_y; \end{cases}$$

hierin ist $c_{hk} = c_{kh}$.

Bezeichnet man mit:

$$S = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix}$$

die Determinante des Systems der neun Coefficienten c_{hk} und mit S_{hk} den Coefficienten des h ten Elementes der k ten Reihe dieser Determinante, so drücken sich die Biegungen und Drillungen prismatischer Stäbe durch die Verhältnisse:

$$(3) \quad S_{hk} / S = s_{hk}$$

aus, deren Anzahl wegen der Relation $s_{hk} = s_{kh}$ im allgemeinen 21 beträgt.

Für das rhombische System verschwinden von diesen Verhältnissen zwölf und bleiben nur die neun folgenden übrig:

$$s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{44}, s_{55}, s_{66}, s_{23}, s_{31}, s_{12}.$$

Die Biegung η eines prismatischen Stabes ist gegeben durch die Formel:

$$(4) \quad \eta = \frac{EPL^3}{4BD^3},$$

worin L die Länge, B die Breite, D die Dicke des Prismas, P die Belastung und E den Coëfficienten der linearen Dilation (das Reciproke des sogenannten Elasticitätscoëfficienten E , der passender Biegungs- oder Dehnungswiderstand genannt würde) bezeichnet, der sich durch die s_{hk} folgendermassen ausdrückt. Es ist, falls α, β, γ die Richtungscosinus der Längsrichtung des Prismas bezeichnen:

$$(5) \quad E = 1/E = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2.$$

Nach diesem Werthe ist es möglich, durch Biegungsbeobachtungen sechs Aggregate der neun s_{hk} oder der neun Elasticitätsconstanten c_{hk} zu bestimmen. Wir bezeichnen diejenigen Stäbchen, welche mit ihren Längsaxen in die Richtungen der drei Krystallaxen fallen, mit I, II, III; ihre Beobachtung ergibt die Grössen von:

$$(6) \quad E_I = s_{11}, \quad E_{II} = s_{22}, \quad E_{III} = s_{33}.$$

Von den Aggregaten ($s_{44} + 2s_{23}$) etc. bleibt in (5) je eines übrig, wenn die Längsaxe des Stäbchens in eine Hauptebene fällt; die Stäbchen, welche so in der YZ -, ZX -, XY -Ebene liegen, seien mit IV, V, VI bezeichnet; ihre Beobachtung gibt:

$$(7) \quad \begin{cases} E_{IV} = s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2, \\ E_V = s_{33}\gamma^4 + s_{11}\alpha^4 + (s_{55} + 2s_{31})\gamma^2\alpha^2, \\ E_{IV} = s_{11}\alpha^4 + s_{22}\beta^4 + (s_{66} + 2s_{12})\alpha^2\beta^2. \end{cases}$$

Schliesst die Längsaxe mit den beiden bezüglichlichen Krystallaxen die Winkel $\pi/4$ ein, so wird am einfachsten:

$$(8) \quad 4E_{IV} = s_{22} + s_{33} + s_{44} + 2s_{23} \text{ u. s. f.,}$$

oder in Rücksicht auf (6):

$$4E_{IV} - (E_{II} + E_{III}) = s_{44} + 2s_{23}.$$

Um die drei noch fehlenden Aggregate der s_{hk} zu bestimmen, genügt es, drei Gattungen von Torsionsbeobachtungen vorzunehmen. Es empfiehlt sich vor allem anderen die Drillung von Stäbchen, deren Längs-, Dicken- und Breitenrichtung in Krystallaxen liegen, weil für diesen Fall die Theorie völlig streng durchführbar ist. Die hier möglichen sechs verschiedenen Orientirungen führen auf die Bestimmung nur dreier Aggregate, nämlich dreier specieller Werthe des allgemeinen Drillungscoefficienten T , des Reciproken des sonst

gebräuchlichen Factors T (des Drillungswiderstandes), der für rhombische Krystalle die Gestalt annimmt:

$$(9) T = 4(s_{11} \alpha^2 \alpha_1^2 + s_{22} \beta^2 \beta_1^2 + s_{33} \gamma^2 \gamma_1^2) \\ + 2[(s_{44} + 4s_{23}) \beta \beta_1 \gamma \gamma_1 + (s_{55} + 4s_{13}) \gamma \gamma_1 \alpha \alpha_1 + (s_{66} + 4s_{12}) \alpha \alpha_1 \beta \beta_1] \\ + s_{44} (\beta^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \beta_1^2) + s_{55} (\gamma^2 \alpha_1^2 + \alpha^2 \gamma_1^2) + s_{66} (\alpha^2 \beta_1^2 + \beta^2 \alpha_1^2);$$

darin bezeichnen α, β, γ wie vorhin die Richtungscosinus der Längsrichtung, aber $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ diejenigen der grösseren Querdimension.

Die angedeuteten sechs Orientirungen der Stäbchen seien nun so bezeichnet, dass zu dem Index I, II, III, welcher die Lage der Längsaxe in der I, II. oder III. Krystallaxe andeutet, die Indices a, b, c hinzugefügt werden, entsprechend der Richtung der Breite des Stäbchens; z. B. hat also das Prisma III_a die Längsaxe parallel der dritten, die Breite parallel der ersten Krystallaxe.

Die speciellen Werthe des Drillungscoëfficienten für die sechs speciellen Orientirungen sind:

$$(10) T_{II_c} = T_{III_b} = s_{44}, T_{III_a} = T_{I_c} = s_{55}, T_{I_b} = T_{II_a} = s_{66},$$

entsprechend dem allgemeinen Satze, dass der Werth von T sich bei der Vertauschung der Richtungen von Länge und Breite nicht ändert.

Die Drillung eines jeden der genannten Stäbchen hängt von den beiden Coëfficienten T ab, welche den seiner Längsrichtung entsprechenden Zahlenindex haben; z. B. ist für die Gattung (II_c) der Drillungswinkel τ :

$$\tau_{II_c} = \frac{3 T_{II_c} L N}{B D^3 \left(1 - \frac{3}{16} \lambda \frac{D}{B} \sqrt{\frac{T_{II_a}}{T_{II_c}}} \right)},$$

hingegen für (II_a):

$$\tau_{II_a} = \frac{3 T_{II_a} L N}{B D^3 \left(1 - \frac{3}{16} \lambda \frac{D}{B} \sqrt{\frac{T_{II_c}}{T_{II_a}}} \right)},$$

und ebenso für die vier übrigen.

In diesen Formeln haben die Buchstaben I, B, D die frühere Bedeutung, N ist das um die Längsaxe ausgeübte Drehungsmoment, λ eine Function von D/B , welche für

Werthe desselben kleiner als $1/3$ merklich constant gleich $= 3,361$ ist.

Da das Verhältniss D/B eine kleine Grösse ist, so ist das zweite Glied des Nenners von nur geringem Einfluss, und für die Berechnung der Coëfficienten T genügt es, zunächst Näherungswerthe zu bilden, indem man jenes Glied gleich Null, oder besser, da die T voraussichtlich nicht sehr stark differiren werden, gleich $3\lambda D/16B$ nimmt, und mit den so erhaltenen dann die definitive Berechnung desselben auszuführen.

Ist das benutzte Stäbchen nicht streng prismatisch, so ist in die Torsionsformeln (11) für den Werth B und D einfach das arithmetische Mittel der beobachteten Dimensionen auf dem in Betracht kommenden Stück zu setzen, da bei der Drillung alle Querschnitte gleich viel in Anspruch genommen sind. In der Biegungsformel (4) lässt sich dies nur für die wenig variirende Breite B thun; die Dicke D , welche in $(n+1)$ gleich weit voneinander entfernten Querschnitten gemessen ist, entspricht stets sehr nahe dem Gesetz:

$$D = D_0 \pm \alpha \delta_1 + \alpha^2 \delta_2, \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots;$$

die in Rechnung zu ziehende Dicke ist dann gegeben durch:

$$(12) \quad (D) = D_0 + \frac{n^2}{40} \left(\delta_2 - \frac{2\delta_1^2}{D_0} \right).$$

Aus den neun, nach dem Obigen durch die Biegungs- und Drillungsbeobachtungen zu findenden Determinantenverhältnissen s_{hk} bestimmen sich die neun Elasticitätsconstanten c_{hk} durch die Formeln:

$$(13) \quad \begin{aligned} c_{11}s_{11} + c_{12}s_{12} + c_{13}s_{13} &= 1, & c_{21}s_{31} + c_{22}s_{33} + c_{23}s_{33} &= 0 \\ c_{21}s_{21} + c_{22}s_{22} + c_{23}s_{23} &= 1, & c_{31}s_{11} + c_{32}s_{12} + c_{33}s_{13} &= 0 \\ c_{31}s_{31} + c_{32}s_{32} + c_{33}s_{33} &= 1, & c_{11}s_{21} + c_{12}s_{22} + c_{13}s_{23} &= 0 \\ c_{44}s_{44} &= 1, & c_{55}s_{55} &= 1, & c_{66}s_{66} &= 1. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich, falls man setzt:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = \sigma, \text{ des System Werthe:} \\ c_{11} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix}, \quad c_{22} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{33} & s_{31} \\ s_{13} & s_{11} \end{vmatrix}, \quad c_{33} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix},$$

$$c_{23} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{31} & s_{32} \\ s_{11} & s_{12} \end{vmatrix}, \quad c_{31} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix}, \quad c_{12} = \frac{1}{\sigma} \begin{vmatrix} s_{23} & s_{21} \\ s_{33} & s_{31} \end{vmatrix},$$

$$c_{44} = 1/s_{44}, \quad c_{55} = 1/s_{55}, \quad c_{66} = 1/s_{66}.$$

Diese neun Constanten werden voneinander abhängig, wenn die Molecüle des Krystalles keine Polarität besitzen, ihre Wechselwirkungen also nur Functionen der Entfernungen sind; in diesem Falle ist nämlich:

$$(15) \quad c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}.$$

Die Resultate der Beobachtung gestatten zu beurtheilen, ob die erwähnte Hypothese für eine bestimmte Substanz zulässig ist.

Da die Constanten c_{hk} aus den nahezu direct gefundenen s_{hk} sich erst durch complicirte Rechnungen bestimmen, werden sie relativ ungenauer sein als diese. Für die Bestimmung der Grösse der elastischen Deformationen kommen aber ausschliesslich jene s_{hk} in Betracht und besitzen demnach die grössere praktische Wichtigkeit.

Beispielsweise wird ein beliebiges Stück eines rhombischen Krystalles, welches einem allseitig gleichen Druck p ausgesetzt wird, parallel den Hauptaxen lineäre Dilatationen x_x, y_y, z_z erfahren, die gegeben sind durch:

$$x_x = -p(s_{11} + s_{12} + s_{13}), \quad y_y = -p(s_{21} + s_{22} + s_{23}),$$

$$z_z = -p(s_{31} + s_{32} + s_{33});$$

die Coefficienten der lineären Dilatation sind also:

(16) $A_a = s_{11} + s_{12} + s_{13}$, $A_b = s_{21} + s_{22} + s_{23}$, $A_c = s_{31} + s_{32} + s_{33}$,
der Coefficient der cubischen Dilatation (identisch mit dem reciproken sogenannten Elasticitätsmodul) aber wird:

$$(17) \quad M = (s_{11} + s_{22} + s_{33}) + 2(s_{23} + s_{31} + s_{12}).$$

Zwei Ebenen innerhalb oder aussen an dem Krystall, deren Normalen durch die Richtungs cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ definirt sind und den Winkel χ einschliessen, werden bei allseitig gleichem Druck gedreht, sodass der Winkel χ einen Zuwachs $\delta\chi$ erfährt, der gegeben ist durch:

$$(18) \quad \sin\chi \cdot \delta\chi = -p\{s_{11} + s_{12} + s_{13}\} [2\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\cos\chi]$$

$$+ (s_{21} + s_{22} + s_{23}) [2\beta_1\beta_2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2)\cos\chi]$$

$$+ (s_{31} + s_{32} + s_{33}) [2\gamma_1\gamma_2 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\cos\chi]\},$$

wobei $\cos\chi = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$.

Hierdurch bestimmen sich die Winkeländerungen, die ein rhombischer Krystall durch allseitig gleichen Druck erfährt.

Ein mit seinen Flächen zu den Hauptaxen a, b, c oder X, Y, Z normales Prisma wird unter der Wirkung von Drucken p_a, p_b, p_c auf die zu a, b, c normalen Flächenpaare Deformationen erleiden, die gegeben sind durch:

$$(19) \begin{cases} x_x = -(p_a s_{11} + p_b s_{12} + p_c s_{13}), & y_y = -(p_a s_{21} + p_b s_{22} + p_c s_{23}), \\ z_z = -(p_a s_{31} + p_b s_{32} + p_c s_{33}), & y_z = z_x = x_y = 0; \end{cases}$$

die Erwärmung eines beliebigen Stückes eines rhombischen Krystalles um ϑ Grad ergibt:

$$(20) \begin{cases} x_x = \vartheta (q_a s_{11} + q_b s_{12} + q_c s_{13}), & y_y = \vartheta (q_a s_{21} + q_b s_{22} + q_c s_{23}), \\ z_z = \vartheta (q_a s_{31} + q_b s_{32} + q_c s_{33}), & y_z = z_x = x_y = 0, \end{cases}$$

worin q_a, q_b, q_c das Maass der Wärmeabstossung parallel je einer Hauptaxe bezeichnet. Bei einem wie gesagt prismatischen Stück lässt sich hiernach die Wirkung der Erwärmung durch drei passend gewählte Drucke p_a, p_b, p_c aufheben. Sind die s_{hk} durch Elasticitätsbeobachtungen und ebenso die thermischen Ausdehnungscoëfficienten a_a, a_b, a_c parallel den Hauptaxen bestimmt, so lassen sich die Grössen q_a, q_b, q_c aus den Gleichungen:

$$(21) \begin{cases} a_a = q_a s_{11} + q_b s_{12} + q_c s_{13}, & a_b = q_a s_{21} + q_b s_{22} + q_c s_{23}, \\ a_c = q_a s_{31} + q_b s_{32} + q_c s_{33} \end{cases}$$

berechnen; man erhält:

$$q_a = \frac{1}{\sigma} \left(a_a \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + a_b \begin{vmatrix} s_{31} & s_{33} \\ s_{12} & s_{13} \end{vmatrix} + a_c \begin{vmatrix} s_{12} & s_{13} \\ s_{22} & s_{23} \end{vmatrix} \right) \text{ u. s. f.,}$$

oder kürzer nach (14) in merkwürdig einfacher Beziehung¹⁾:

1) Diese Beziehung findet eine allgemeine und directe Begründung durch folgende Erwägung. Die Zuwachse der molekularen Drucke (X_x).. werden als lineäre Functionen der Temperaturerhöhung ϑ angesehen, also wird (X_x) = $q_a \vartheta$, (Y_y) = $q_b \vartheta$, (Z_z) = $q_c \vartheta$, (Y_z) = $q'_a \vartheta$, (Z_x) = $q'_b \vartheta$, (X_y) = $q'_c \vartheta$ zu setzen sein. Bei einem gleichförmig erwärmten Körper, der äusseren Drucken nicht ausgesetzt ist, findet Gleichgewicht statt, wenn gilt:

$$X_x + (X_x) = 0, \quad Y_y + (Y_y) = 0, \quad \dots,$$

wobei wie gewöhnlich:

$$-X_x = c_{11} x_x + c_{12} y_y + c_{13} z_z + c_{14} y_z + c_{15} z_x + c_{16} x_y.$$

$$(22) \quad \begin{cases} q_a = a_a c_{11} + a_b c_{12} + a_c c_{13}, & q_b = a_a c_{21} + a_b c_{22} + a_c c_{23}, \\ q_c = a_a c_{31} + a_b c_{32} + a_c c_{33}. \end{cases}$$

Endlich sei noch angefügt, dass die Drillung τ eines Kreiscylinders, aus der Substanz eines rhombischen Krystalles gefertigt, sich durch die Grössen s_{hk} folgendermassen bestimmt. Ist R der Radius des Querschnittes, L die Länge des Cylinders, N das wirkende Moment, und sind α, β, γ die Richtungscosinus der Axe, so gilt:

$$(23) \quad \tau = \frac{LNT'}{\pi R^4}, \quad \text{worin:}$$

$$(24) \quad \begin{cases} T' = \alpha^2 (s_{55} + s_{66}) + \beta^2 (s_{66} + s_{44}) + \gamma^2 (s_{44} + s_{55}) \\ \quad + 4\beta^2 \gamma^2 (s_{22} + s_{33} - s_{44} - 2s_{23}) \\ \quad + 4\gamma^2 \alpha^2 (s_{33} + s_{11} - s_{55} - 2s_{31}) \\ \quad + 4\alpha^2 \beta^2 (s_{11} + s_{22} - s_{66} - 2s_{12}). \end{cases}$$

Die x_z . . . sind gleichfalls lineäre Functionen der Temperaturerhöhung, und wir setzen daher:

$$x_x = a_x \vartheta, \quad y_y = a_y \vartheta, \quad z_z = a_z \vartheta, \quad y_z = a'_z \vartheta, \quad z_x = a'_x \vartheta, \quad x_y = a'_y \vartheta,$$

worin die a die lineären thermischen Ausdehnungskoeffizienten parallel den Coordinatenaxen, die a' die Coefficienten der thermischen Winkeländerung zwischen diesen Axen bezeichnen; sind die Coordinatenaxen identisch mit den thermischen Hauptaxen, so sind die $a' = 0$.

Sonach erhält man für den Zustand des Gleichgewichtes die Bedingungen:

$$q_a = a_a c_{11} + a_b c_{12} + a_c c_{13} + a'_a c_{14} + a_b c_{15} + a'_c c_{16},$$

von denen die obigen Formeln (22) den dem rhombischen Systeme entsprechenden speciellen Fall darstellen.

Sind die Coordinatenaxen mit den thermischen Hauptaxen identisch, so sind, wie gesagt, die a' gleich Null; daraus folgt aber keineswegs allgemein auch das Verschwinden der q' , wie aus den letzten Gleichungen zu sehen, welche hier ergeben:

$$q'_a = a_a s_{41} + a_b s_{42} + a_c s_{43},$$

$$q'_b = a_a s_{51} + a_b s_{52} + a_c s_{53},$$

$$q'_c = a_a s_{61} + a_b s_{62} + a_c s_{63}.$$

Hieraus folgt, dass in den Krystallen der thermische Druck im allgemeinen auch nicht einmal auf den Flächen normal steht, welche normal zu den thermischen Axen liegen, — noch weniger natürlich auf anderen. Hiernach ist die in Hrn. F. Neumann's Vorlesungen über Elasticität (Leipzig 1885 p. 116 u. f.) angestellte Betrachtung zu vervollständigen.

Erläuterungen zu den Beobachtungstafeln.

Die im Folgenden im Auszug gegebenen Beobachtungsergebnisse sind in derselben Weise angeordnet, wie die entsprechenden in meiner Abhandlung über den Beryll und Bergkrystall¹⁾, die ausführlichen Tabellen finden sich am unten angegebenen Orte.²⁾

Bei der Bestimmung der Dimensionen zeigte sich eine eigenthümliche und mir neue Schwierigkeit, die viele Arbeit verursachte.

Die Stäbchen kamen vom Verfertiger jederzeit im völlig reinen Zustande an — sie waren durch Waschen mit Benzin von dem Kitt befreit, mittelst welches sie auf der Polirscheibe befestigt gewesen waren, und zeigten schönen Glanz. Auf den absichtlich in Form einer schwach gekrümmten Linse geschliffenen Tisch des Sphärometers gebracht, gaben sie deutlich Newton'sche Ringe, das Merkmal dafür, dass sie wirklich sehr nahe zur Berührung mit der Unterlage kamen. Ich hielt es demnach für genügend, die Stäbchen für die Beobachtungen mit Alkohol oder Benzin leicht abzuwaschen und mit einem Leinentuch zu trocknen.

Indess durch einen Zufall wurde ich darauf aufmerksam, dass die anscheinend so reinen Flächen der Stäbchen noch immer mit einer fremdartigen Schicht überzogen waren, die erst bei längerem Aufbewahren in Alkohol oder Benzin und wiederholtem Abreiben verschwindet.

Ich verfolgte diese Erscheinung sorgfältig zuerst bei dem Barytstäbchen II No. 3.

Die erste Messung ergab hier die Werthe:

$$D_0 = 516,8, \quad \delta_1 = 1,7, \quad \delta_2 = -0,89;$$

nachdem das Stäbchen 24 Stunden in Alkohol gelegen hatte, fand sich:

$$D_0 = 515,6, \quad \delta_1 = 1,6, \quad \delta_2 = -0,86,$$

also ein Unterschied der Dicke um etwa 0,001 mm. Um zu sehen, ob die Reinigung eine vollständige wäre, wurde das

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 474 u. 701. 1887.

2) W. Voigt, Götting. Nachr. 1887, Nr. 19. p. 561.

Stäbchen abermals längere Zeit in Alkohol gelegt und dann sehr kräftig abgerieben; es fand sich nun:

$$D_0 = 515.4, \quad \delta_1 = 1.6, \quad \delta_2 = -0.80.$$

Die so erhaltene Aenderung ist als unmerklich zu bezeichnen und rührt jedenfalls zum grössten Theil von der schleifenden Wirkung des Abreibens her; es scheint mir dadurch erwiesen, dass die einmalige gründliche Reinigung genügend ist.

Schliesslich stellte ich mir noch die Frage, ob das sonst beliebte Poliren blanker Flächen mit Leder nicht vielleicht eine Fettschicht auf dieselben bringt und eben dadurch der Glanz so merklich erhöht wird. Die Messung des mit Leder polirten Stäbchens ergab folgende Werthe:

$$D_0 = 515.7, \quad \delta_1 = 1.7, \quad \delta_2 = -0.85.$$

Es ist also die Dicke des Stäbchens merklich, wenn auch wenig vergrössert worden.

Ich habe demgemäss für das Abreiben der Stäbchen niemals Leder, sondern immer weiches Leinen benutzt.

Die Entdeckung jener Oberflächenschicht geschah leider erst, nachdem alle Messungen vollendet, ja die Beobachtungen am Topas schon gesetzt waren. Es wurde sonach nöthig, die gesammten Dimensionsbestimmungen von vorn anzufangen — eine ermüdende Arbeit, wenn man erwägt, dass sie für Topas und Baryt zusammen über 2000 Messungen erforderten. Den Herren Dr. Drude und Pockels bin ich für die ausdauernde Hülfe, die sie mir hierbei geleistet haben, zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Es war nun die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die Biegungen und Drillungen ebenfalls durch die erwähnte Oberflächenschicht beeinflusst würden, und ich habe demgemäss Controlbeobachtungen angestellt. Indess liess sich ein Einfluss nicht mit Sicherheit nachweisen, und ich habe daher von der Wiederholung der übrigen Messungen (wohl 15000 an der Zahl) absehen zu können geglaubt. In der That ist es auch plausibel, dass jene dünne Schicht, die wahrscheinlich aus dem Wachs besteht, auf welches, soviel mir bekannt, das

Polirmittel aufgetragen wird, den Deformationen keinen merklichen Widerstand entgegensetzt.

Die Umrechnung der alten Beobachtungen mit den neuen Dimensionswerthen ergab das erfreuliche Resultat, dass der wahrscheinliche Fehler der erhaltenen Biegungs- und Drillungsconstanten erheblich vermindert wurde. Die Uebereinstimmung ist namentlich beim Topas, der infolge der grösseren Härte einen gleichmässigeren Schliff erlaubt, weit grösser, als ich erwartet hatte. Der Baryt zeigte nicht nur unregelmässigere Gestalt der Stäbchen, gegen die Kanten hin merklich gerundete Flächen, sondern auch im allgemeinen eine viel dickere Oberflächenschicht, was wohl darauf hindeutet, dass er die Politur schwerer annimmt. Alles dies erklärt die hier schliesslich erreichte geringere — indess noch immer nahe $\frac{1}{1000}$ betragende — Sicherheit der Endresultate.

Die Biegungen sind mit dem früher beschriebenen¹⁾ Apparat gemessen, der nur in der Weise vervollkommen worden war, dass die am unten angegebenen Orte erwähnten Röllchen nicht mehr zwischen Spitzen gingen, sondern mit Schneiden, die ihre Axen bildeten, auf Glasplatten ruhten; die Reibung war auf diese Weise auf Bruchtheile eines Millimeters der Beobachtungsscala herabgesetzt und konnte mit Leichtigkeit in der früher angegebenen Weise völlig eliminirt werden.

Der Werth von 1 mm der Beobachtungsscala betrug nach vielen Bestimmungen, die in der Weise angestellt wurden, dass eine und dieselbe besonders grosse Biegung (ca. 1270 mm der Scala) zugleich mikrometrisch gemessen wurde, 0,0002954 mm; wiederholte Beobachtungen der Biegungen gaben eine Sicherheit bis auf den zehnten Theil — eine Genauigkeit, die in Verbindung mit der Bequemlichkeit der Handhabung den Apparat sehr empfiehlt.

In den Tabellen über die Biegungsbeobachtungen gibt *L* die Länge des Stäbchens in Millimetern, aus dem Abstand der Schneiden erhalten — eine, da die Schneiden keine mathematischen Linien sind, nicht eben sehr genau bestimmbare

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 476. 1887.

Grösse —, B die in Rechnung zu ziehende Breite, D die Dicke in Spärometertheilen, P die Belastung in Grammen. Die η sind die an der Beobachtungsscala abgelesenen Senkungen in Millimetern der Scala; die mitgetheilten Zahlen sind bereits die Mittelwerthe von 8–12 Ablesungen.

Bei den Biegungen der Topasstäbchen wurde eine besondere Vorsicht dadurch nöthig, dass bei der grossen Starrheit des Materiales und der geringen Länge einiger Gattungen von Stäbchen die unangenehme Fehlerquelle, welche die Eindrückung der Lagerschneiden bei der Belastung darbietet, einen ausserordentlichen Einfluss erreichte. Ein genaues, sehr zeitraubendes Studium dieser Erscheinung hat mir gezeigt, dass dieselbe von Umständen abhängig ist, denen man von vorn herein gewiss keine Bedeutung beilegen würde. Eine kleine Verunreinigung der Oberfläche z. B. durch Berührung mit der Hand, einige mikroskopische Stäubchen oder Fäserchen, die sich zwischen Stäbchen und Lagerschneiden befanden, liessen die Biegung merklich grösser erscheinen — wahrscheinlich indem sie als äusserst dünne Kissen sich bei der Belastung zusammendrückten. Hierfür ein Beispiel. Einige Topasstäbchen waren gebogen worden, bevor sie der Drillung unterworfen wurden; nachdem sie von dem hierbei auf ihre Enden gebrachten Kitt mit Alkohol sorgsam gereinigt waren, wurden sie abermals gebogen und gaben nun eine um 2–3 Theile der Beobachtungsscala grössere Eindrückung der Lagerschneiden; erst nachdem sie längere Zeit in Benzin aufbewahrt waren, stellte sich der ursprüngliche Werth angenähert wieder her. Dies ist wohl nur so zu erklären, dass bei dem erstmaligen Reinigen eine dünne, absolut unsichtbare Schicht des Wachs-Colophonium-Kittes auf der Oberfläche verrieben worden war, die in der angegebenen Weise als weiches Kissen wirkte und erst bei längerem Aufbewahren in Benzin verschwand.

Nun wäre jener Ueberzug ohne Einfluss auf die Bestimmung der Biegungsconstanten, wenn er die ganze Oberfläche eines jeden Stäbchens gleichmässig bedeckte, denn sein Einfluss würde dann bei Beobachtungen in verschiedenen Längen, vermittelt deren die Eindrückung eliminirt wird, mit

herausfallen; da man dessen aber nicht sicher sein kann, so muss man suchen, ihn durch sorgfältige Reinigung möglichst vollständig zu beseitigen. Das mit Benzin abgewaschene und mit weicher Leinwand getrocknete Stäbchen wurde also gar nicht mit der Hand, sondern nur mit einer Pincette berührt und vor dem Auflegen auf die Lager noch vorsichtig mit einem Pinsel von etwa anhängenden Fäserchen befreit; so gelang es, den Resultaten die Uebereinstimmung zu geben, welche die folgenden Tafeln zeigen.

Für den angeregten Punkt sind dieselben in der folgenden Hinsicht von Bedeutung. Jedes Stäbchen ist erst in der geringsten Länge (14,3 mm) gebogen, die der Apparat bequem gestattete, darauf in der grössten, welche seine Gestalt zuließ, und aus diesen Beobachtungen ist die Durchdrückung der Lagerschneiden bestimmt. Das in der ersten Beobachtungsreihe jeder Tafel neben η stehende η' gibt den so erhaltenen Werth. Fasst man die bei verschiedenen Stäbchen derselben Art so erhaltenen Werthe zusammen, so findet man eine sehr gute Uebereinstimmung. Eine absolute ist schon dadurch ausgeschlossen, dass in den η' nicht nur die Eindrückung der Schneiden, sondern auch diejenige des Stäbchens selbst an der Auflagestelle steckt, und diese je nach der zufälligen Gestalt desselben verschieden sein wird, bei starker convexer Oberfläche selbst grösser. Bei Stäbchen verschiedener Art ist das η' merklich verschieden, offenbar weil diese Eindrückung des Stäbchens mit der Orientirung, Politur etc. desselben wechselt.

Bei der Berechnung der Bieigungsconstante E , resp. E ist der mittlere Werth aller η' für dieselbe Gattung in Rechnung gezogen und unter (η') beigeschrieben, weil dadurch eine grössere Sicherheit der Resultate zu gewinnen möglich schien.

Inwieweit dieser Werth nun an den verschiedenen Stellen desselben Stäbchens stattfindet, gestattet eine Reihe von Beobachtungen zu übersehen, welche dasselbe Stäbchen in verschiedenen Längen benutzt, so namentlich IIa Nr. 2. und 4., IIIb Nr. 1. und 2), IV Nr. 1. und 2., V Nr. 1. Die Uebereinstimmung der so erhaltenen Werthe E oder E ist so befriedigend, dass der unangenehme Fehler als eliminirt angesehen werden kann.

Beim Baryt lagen die Verhältnisse im allgemeinen günstiger, da die Biegungen infolge grösserer Länge der Stäbchen und geringerer Starrheit im allgemeinen grösser ausfielen. Nur bei den Sorten I, IV, V und VI ist die Bestimmung von η' in derselben Weise ausgeführt wie beim Topas, bei den übrigen genügte es, sie an einigen Stäbchen anzustellen.

Die Tafeln für die Drillungsbeobachtungen enthalten wiederum zunächst die in Rechnung zu ziehenden Dimensionen, dann die an dem früher beschriebenen¹⁾ Apparat beobachteten Drehungen σ_P des beweglichen gegen den festen Spiegel in Millimetern der Scala (reducirt von der Tangente auf den Bogen), wie er der Belastung mit dem Gewicht P entspricht; die mitgetheilte Zahl ist aus 20–30 Beobachtungen unter Elimination der Axenreibung berechnet.

Die Entfernung der Spiegel von der Scala betrug 5173 mm, die Millimeter der letzteren waren um 0,00374 zu gross.

Die Rollen des Apparates sind vor dem Beginn der Beobachtungen neu abgedreht und der Hebelarm, an welchem bei den Beobachtungen die Belastung angreift, danach bestimmt. Dies geschah in doppelter Weise. Einmal wurde mittelst eines Schublineales direct der Durchmesser der Rollen plus dem umgelegten Draht, an welchem später die Belastung angehängt wurde, gemessen und davon die einfache (mikroskopisch gemessene) Drahtdicke (0,15 mm) in Abzug gebracht; hierdurch fand sich für den doppelten Hebelarm an beiden Rollen (mit lR und rR bezeichnet):

$$lR \text{ 73,65 mm} \quad rR \text{ 73,54 mm.}$$

Sodann wurde der erwähnte Draht über die Rollen gelegt und beiderseitig belastet und danach der Abstand der an beiden Seiten herabhängenden Enden direct gemessen; auf diese Weise wurden erhalten:

$$lR \text{ 73,68 mm} \quad rR \text{ 73,55 mm.}$$

Die Werthe:

$$lR \text{ 73,66 mm} \quad rR \text{ 73,54 mm,}$$

oder für den einfachen Hebelarm:

$$36,83 \text{ mm} \quad 36,77 \text{ mm,}$$

1) W. Voigt, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 185. 1875.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

d. h. im Mittel 36,80, sind hiernach bis über den tausendsten Theil sichergestellt.

Bei der Berechnung des Drillungscoefficienten T , resp. T aus den Beobachtungen nach Formel (11) zeigte es sich nöthig, um den viel schwierigeren Drillungsbeobachtungen wenigstens annähernd dieselbe Genauigkeit zu geben, die bei den Biegungsbeobachtungen schliesslich erreicht ist, auch den Einfluss der an den Enden der Stäbchen aufgekitteten Stanniolbelege, die ich diesmal viel dicker als früher gewählt hatte, durch eigene Beobachtungen zu bestimmen. Die dadurch nöthig gemachte Correction ist nicht sehr genau und unter der Bezeichnung δT beigeschrieben.

Topas.

Hr. Rittergutsbesitzer v. Janson auf Schloss Gerdauen (Ostpreussen) hat die Freundlichkeit gehabt, mir für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten des Topases aus seiner berühmten Sammlung ausgezeichnet schönes Material zu überlassen, und ich bin ihm für sein grossartiges und werthvolles Geschenk zu aufrichtigem Danke verpflichtet.

Hr. v. Janson hat mir drei nahe gleich grosse, gleich gestaltete und gleich gefärbte, hellgrünliche Krystalle von demselben Fundort „von Mursinka im Ural, näher vom kleinen Makruschkinberge bei Alabaschka“ übersandt, ein Umstand von grossem Vortheil, da hierdurch die Garantie gegeben ist, dass das gefundene System von Constanten ebenso als zusammengehörig zu betrachten ist, als wäre es an einem einzigen Individuum erhalten, was ja immer das Erwünschteste sein würde. Die Krystalle waren nahezu parallelepipedisch oder säulenförmig gestaltet und massen ca. 3 cm parallel der Längs-, 2 cm parallel den Queraxen. Es war hiernach möglich, in den verschiedenen Richtungen Stäbchen von 2 bis 3 cm Länge herzustellen. Die Ausführung derselben hat zum Theil die Firma Voigt und Hochgesang hier, nach dem Tode des Leiters dann Dr. Steeg und Reuter in Hamburg vor der Höhe übernommen; demgemäss ist die Politur der Stäbchen nicht identisch ausgefallen; die von den letzteren hergestellten (Nr. III, IV und V) sind vollkommener.

Um die Orientirung der beobachteten Stäbchen klar zu stellen, denke ich mir im Topas die c -Axe parallel der Normale auf der Spaltungsrichtung (Basis), die a -Axe in die Brachy-, die b -Axe in die Makrodiagonale gelegt und das System a, b, c mit dem Coordinatensystem X, Y, Z zusammenfallen. Dann sind die sechs benutzten Gattungen Stäbchen durch folgende Bezeichnungen charakterisirt, welche den nebenstehenden Richtungen der Länge L und Breite B entsprechen:

$$(I_c) : L \parallel a, \quad B \parallel c,$$

$$(II_a) : L \parallel b, \quad B \parallel a,$$

$$(III_b) : L \parallel c, \quad B \parallel b,$$

$$(IV) : \angle(L, b) = \angle(L, c) = 45^\circ, \quad B \parallel a$$

$$(V) : \angle(L, c) = \angle(L, a) = 45^\circ, \quad B \parallel b$$

$$(VI) : \angle(L, a) = \angle(L, b) = 45^\circ, \quad B \parallel c.$$

Die verschiedenen Stäbchen derselben Gattung sind durch beigeschriebene Ordnungsnummern unterschieden, welche den in die Stäbchen eingeritzten entsprechen.

Bei den Messungen der Biegungen und der Dimensionen hat Hr. F. Pockels mir freundlichst vielfache Hülfe geleistet.

Biegungen.

| | | |
|-------------------------|--------|--|
| Ic | Nr. 1. | $B = 3778, \quad D = 558,9, \quad P = 200,3,$ $L = 14,3, \quad \eta = 35,3, \quad \eta' = 3,6,$ $L = 24,2, \quad \eta = 157,2, \quad (\eta') = 3,6, \quad E = 23\,020\,000.$ |
| Ic | Nr. 2. | $B = 3773, \quad D = 553,9, \quad P = 200,3,$ $L = 14,3, \quad \eta = 36,0, \quad \eta' = 3,4,$ $L = 24,2, \quad \eta = 161,5, \quad (\eta') = 3,6, \quad E = 23\,040\,000.$ |
| Ic | Nr. 3. | $B = 3762, \quad D = 554,8, \quad P = 200,3,$ $L = 14,9, \quad \eta = 36,1, \quad \eta' = 3,5,$ $L = 26,2, \quad \eta = 203,9, \quad (\eta') = 3,6, \quad E = 23\,000\,000.$ |
| Ic | Nr. 4. | $B = 3762, \quad D = 562,7, \quad P = 200,3,$ $L = 14,3, \quad \eta = 35,0, \quad \eta' = 4,0,$ $L = 22,2, \quad \eta = 120,0, \quad (\eta') = 3,6, \quad E = 23\,080\,000.$ |
| Gesamtmittel | | $E_{I_c} = 23\,040\,000, \quad E_{I_c} = 4,341 \cdot 10^{-8}.$ |
| Wahrscheinlicher Fehler | | $\pm 12000 \quad \pm 0,0023.$ |
| IIa | Nr. 1. | $B = 3786, \quad D = 539,4, \quad P = 200,3,$ $L = 14,3, \quad \eta = 31,4, \quad \eta' = 3,3,$ $L = 22,2, \quad \eta = 108,6, \quad (\eta') = 3,3, \quad E = 28\,800\,000.$ |

| | | | | | |
|-------------------------|--------|--------------|-----------------|---------------------------|---------------------------------|
| IIa | Nr. 2. | $B = 3775,$ | $D = 538,2,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 31,9,$ | $\eta' = 3,6,$ | |
| | | $L = 24,2,$ | $\eta = 140,4,$ | $(\eta') = 3,3,$ | $E = 28\ 900\ 000.$ |
| | | $L = 22,2,$ | $\eta = 108,8,$ | $(\eta') = 3,3,$ | $E = 28\ 990\ 000.$ |
| IIa | Nr. 3. | $B = 3749,$ | $D = 533,6,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 32,5,$ | $\eta' = 3,3,$ | |
| | | $L = 22,2,$ | $\eta = 112,6,$ | $(\eta') = 3,3,$ | $E = 28\ 940\ 000.$ |
| IIa | Nr. 4. | $B = 3758,$ | $D = 537,5,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 31,7,$ | $\eta' = 3,3,$ | |
| | | $L = 24,2,$ | $\eta = 141,3,$ | $(\eta') = 8,3,$ | $E = 28\ 940\ 000.$ |
| | | $L = 22,2,$ | $\eta = 110,2,$ | $(\eta') = 3,3,$ | $E = 28\ 880\ 000.$ |
| IIa | Nr. 5. | $B = 3758,$ | $D = 534,2,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 32,2,$ | $\eta' = 3,2,$ | |
| | | $L = 22,2,$ | $\eta = 112,2,$ | $(\eta') = 3,3,$ | $E = 28\ 850\ 000.$ |
| Gesamtmittel | | | | $E_{IIa} = 28\ 900\ 000,$ | $E_{IIa} = 3,460 \cdot 10^{-4}$ |
| Wahrscheinlicher Fehler | | | | ± 19000 | $\pm 0,0023.$ |
| IIIb | Nr. 1. | $B = 3845,$ | $D = 567,4,$ | $P = 110,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,4,$ | $\eta' = 2,3,$ | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 111,1,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 26\ 520\ 000.$ |
| | | $L = 26,2,$ | $\eta = 89,2,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 26\ 630\ 000.$ |
| IIIb | Nr. 2. | $B = 3877,$ | $D = 580,4,$ | $P = 110,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 15,55,$ | $\eta' = 2,5,$ | |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 126,0,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 26\ 560\ 000.$ |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 103,3,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 26\ 480\ 000.$ |
| IIIb | Nr. 3. | $B = 3870,$ | $D = 569,6,$ | $P = 110,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,0,$ | $\eta' = 2,2,$ | |
| | | $L = 26,2,$ | $\eta = 88,1,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 26\ 490\ 000.$ |
| | | Gesamtmittel | | | |
| Wahrscheinlicher Fehler | | | | ± 18000 | $\pm 0,0026.$ |
| IV | Nr. 1. | $B = 3989,$ | $D = 578,3,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,5,$ | $\eta' = 4,0,$ | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 271,7,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 610\ 000.$ |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 224,2,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 680\ 000.$ |
| IV | Nr. 2. | $B = 3986,$ | $D = 580,9,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,0,$ | $\eta' = 3,7,$ | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 268,8,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 560\ 000.$ |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 222,1,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 580\ 000.$ |
| IV | Nr. 3. | $B = 3990,$ | $D = 575,4,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,8,$ | $\eta' = 4,0,$ | |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 227,6,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 650\ 000.$ |

| | | | | | |
|----|-------------------------|--------------------------|-----------------|------------------|---------------------|
| IV | Nr. 4. ¹⁾ | $B = 3989,$ | $D = 566,1,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 29,0,$ | $\eta' = 3,9,$ | |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 240,0,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 670\ 000.$ |
| IV | Nr. 5. | $B = 3987,$ | $D = 577,6,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,5,$ | $\eta' = 4,1,$ | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 183,2,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 26\ 770\ 000.$ |
| | Gesamtmittel | $E_{IV} = 26\ 650\ 000,$ | | | |
| | Wahrscheinlicher Fehler | $\pm 19000,$ | | | |
| | | $\pm 0,0027.$ | | | |
| V | Nr. 1. | $B = 3990,$ | $D = 574,8,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,1,$ | $\eta' = 4,0,$ | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 254,7,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 910\ 000.$ |
| | | $L = 26,2,$ | $\eta = 139,1,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 900\ 000.$ |
| | | $L = 20,2,$ | $\eta = 65,8,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 930\ 000.$ |
| V | Nr. 2. | $B = 3979,$ | $D = 572,3,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,0,$ | $\eta' = 3,7,$ | |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 213,9,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 940\ 000.$ |
| V | Nr. 3. | $B = 3987,$ | $D = 565,3,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,9,$ | $\eta' = 3,8,$ | |
| | | $P = 30,2,$ | $\eta = 221,4,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 940\ 000.$ |
| V | Nr. 4. | $B = 3978,$ | $D = 575,8,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 25,7,$ | $\eta' = 4,0,$ | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 171,6,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 990\ 000.$ |
| V | Nr. 5. | $B = 3984,$ | $D = 574,3,$ | $P = 200,3,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,2,$ | $\eta' = 4,1,$ | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 173,3,$ | $(\eta') = 3,9,$ | $E = 28\ 860\ 000.$ |

Das Stäbchen V Nr. 1 ist, wie oben gesagt, zu einer Untersuchung über die Constanz der Eindrückung η' in möglichst verschiedenen Längen beobachtet; zur Bestimmung von E sind die bei kleinen Längen angestellten Beobachtungen nicht günstig; sie würden also zu viel Einfluss erhalten, wenn man ihnen das volle Gewicht der übrigen beilegen wollte. Ich habe demgemäss den bei den beiden Längen 26,2 mm und 20 mm gefundenen Werthen nur das halbe Gewicht der übrigen beigelegt.

1) Die eine Kante dieses Stäbchens war durch Scharten zerstört, welche sich bis ca. 0,1 mm Tiefe in die angrenzende Breitseite, bis nahezu auf die Hälfte der Dicke in die angrenzende Schmalseite erstreckten. Für die Berechnung von E habe ich angenommen, dass sie durch eine gleichmässige Abstumpfung der Kante durch eine Ebene ersetzt werden könnten, welche auf der Schmalseite von der Mitte ausgehend die Kante in 0,05 mm Tiefe abschneidet. Hierdurch ergab sich eine Correction von E im Betrage von 140 000. Der Werth, der so erhalten wurde, ist oben angeführt.

Gesamtmittel $E_V = 28\,920\,000$, $E_V = 3,457 \cdot 10^{-4}$
 Wahrscheinlicher Fehler ± 19000 $\pm 0,0016$.

| | | |
|----|--------|---|
| VI | Nr. 1. | $B = 3753$, $D = 537,3$, $P = 200,3$, $L = 14,3$, $\eta = 30,7$, $\eta' = 4,7$, $L = 25,3$, $\eta = 148,3$, $(\eta') = 4,9$, $E = 31\,920\,000$. |
| VI | Nr. 2. | $B = 3762$, $D = 543,6$, $P = 200,3$, $L = 14,3$, $\eta = 30,0$, $\eta' = 5,0$, $L = 24,25$, $\eta = 126,9$, $(\eta') = 4,9$, $E = 31\,820\,000$. |
| VI | Nr. 3. | $B = 3762$, $D = 542,8$, $P = 200,3$, $L = 14,3$, $\eta = 30,3$, $\eta' = 5,1$, $L = 24,25$, $\eta = 127,5$, $(\eta') = 4,9$, $E = 31\,820\,000$. |
| VI | Nr. 4. | $B = 3760$, $D = 538,5$, $P = 200,3$, $L = 14,3$, $\eta = 30,6$, $\eta' = 4,8$, $L = 24,25$, $\eta = 130,6$, $(\eta') = 4,9$, $E = 31\,780\,000$. |
| VI | Nr. 5. | $B = 3763$, $D = 538,8$, $P = 200,3$, $L = 14,3$, $\eta = 30,5$, $\eta' = 4,9$, $L = 22,2$, $\eta = 100,7$, $(\eta') = 4,9$, $E = 31\,950\,000$. |

Gesamtmittel $E_{VI} = 31\,860\,000$, $E_{VI} = 3,140 \cdot 10^{-4}$
 Wahrscheinlicher Fehler ± 23000 , $\pm 0,0022$.

Die durch die vorstehenden Beobachtungen erhaltenen Werthe von E , resp. E sind insofern noch unrichtig, als die benutzten Stäbchen mit ihren Axen nicht genau diejenigen Richtungen haben, welche oben unter den Bezeichnungen I bis IV verstanden sind.

Die Gattungen I bis III sollen mit ihren Axen in die Krystallaxen fallen und weichen von ihnen nur wenig, im Maximum etwa $1,5^\circ$ ab; da die Symmetrieaxen Richtungen grösster oder kleinster Werthe von E sind, so geben Abweichungen der Richtung auf diese Grösse einen Einfluss zweiter Ordnung, der nicht in Betracht kommt. Die Werthe E_I , E_{II} , E_{III} , sind also als richtig anzusehen.

Die Gattungen IV bis VI sollen mit ihren Längsaxen in Symmetrieebenen liegen und mit den in denselben befindlichen Symmetrieaxen den Winkel 45° einschliessen. Eine Abweichung ihrer Axe aus der Symmetrieebene gibt aus demselben Grunde, der eben erörtert ist, nur einen Einfluss zweiter Ordnung, der zu vernachlässigen ist; dagegen ist die Abweichung ihrer Axe von der vorgeschriebenen Lage in der Symmetrie in Rechnung zu ziehen.

Für Stäbchen, die in der bc -Ebene liegen, gilt:

$$(E_{IV}) = s_{22}\beta^4 + s_{33}\gamma^4 + (s_{44} + 2s_{23})\beta^2\gamma^2.$$

Ist: $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \delta)$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \delta)$, so gibt dies:

$$(E_{IV}) = s_{12}(\frac{1}{2} + \delta) + s_{33}(\frac{1}{2} - \delta) + \frac{1}{2}(s_{44} + 2s_{22})$$

oder, wenn man E_{IV} , E_{II} , E_{III} im früheren Sinne benutzt:

$$(E_{IV}) = E_{IV} + (E_{II} - E_{III})\delta_2.$$

Da aber E_{II} und E_{III} direct richtig beobachtet sind, so erhält man aus dem durch Beobachtung gefundenen (E_{IV}) das corrigirte nach der einfachen Formel:

$$E_{IV} = (E_{IV}) - (E_{II} - E_{III})\delta_2,$$

ebenso auch:

$$E_V = (E_V) - (E_{II} - E_I)\delta_3, \quad E_{VI} = (E_{VI}) - (E_I - E_{II})\delta_1.$$

Hierin bezeichnet δ_1 , δ_2 , δ_3 resp. die Grösse, um welche der Winkel zwischen der Axe des Stäbchen und der a -, b - oder c -Axe den Werth 45° überschreitet.

Diese Winkel zu messen, boten sich zwei Wege.

Da bei dem Ausschneiden der Stäbchen aus der dazu hergestellten Platte durch mechanische Vorrichtungen der Parallelismus der Schnitte erhalten wird und durch das Schleifen der abgesägten Stücke nur eine sehr kleine Veränderung in der Lage der Fläche hervorgebracht werden kann, so bieten sich die Reste der benutzten Platten von selbst zur Bestimmung der Winkel.

Mittelst eines gut gearbeiteten Anlegegoniometers war es möglich, auf diese Weise bis auf $0,1^\circ$ zu constatiren, dass die Längsaxe der Gattung IV mit der Prismenkante, d. h. der c -Axe, sehr genau den Winkel $43,8^\circ$ einschloss, die Gattung V den Winkel $45,1^\circ$. Es war also $\delta_2 = 1,2^\circ$, $\delta_3 = 0,1^\circ$.

Die Gattung VI gestattete leider diese Behandlung nicht, da die zu benutzenden Krystallflächen nicht vollkommen eben waren. Hier musste die optische Bestimmungsmethode eintreten, die auf der Aufsuchung der Polarisations Ebenen des normal durch die Stäbchen fortgepflanzten Lichtes beruht. Diese Methode ist deshalb für unseren Zweck bedenklich, weil es nicht ausgeschlossen ist, dass durch irgend welche

Spannungen, die auf das elastische Verhalten bekanntlich nicht einwirken, das optische Verhalten beeinflusst wird. Wenigstens hat Hr. Dr. Drude, der diese Beobachtungen anstellte, gefunden, dass bei den Gattungen IV und V die nach den beiden genannten Methoden erhaltenen Orientirungen nicht übereinstimmen. Für Gattung VI hat er als Mittel aus zahlreichen Messungen den Werth $\delta_1 = 0,35^\circ$ gefunden, und die Messung mit dem Anlegegoniometer zeigte, dass dieser Werth nahe richtig sein muss. Hiernach würde folgendes corrigirte System Constanten folgen:

$$\begin{aligned} E_I &= (4,341 \pm 0,0023) 10^{-8}, & E_{IV} &= (3,747 \pm 0,0027) 10^{-8}, \\ E_{II} &= (3,460 \pm 0,0023) 10^{-8}, & E_V &= (3,456 \pm 0,0016) 10^{-8}, \\ E_{III} &= (3,771 \pm 0,0026) 10^{-8}, & E_{VI} &= (3,145 \pm 0,0022) 10^{-8}. \end{aligned}$$

Drillungen.

| | | | | | |
|----|--------|------------------------|---------------------|--------------|-----------------------|
| Ic | Nr. 1. | $L = 22,32,$ | $B = 3778,$ | $D = 558,1,$ | |
| | | $\sigma_{40} = 122,9,$ | $\delta T = -70000$ | | $(T = 13\,410\,000).$ |
| Ic | Nr. 2. | $L = 21,66,$ | $B = 3773,$ | $D = 553,1,$ | |
| | | $\sigma_{40} = 121,8,$ | $\delta T = -70000$ | | $T = 13\,500\,000.$ |
| Ic | Nr. 3. | $L = 23,51,$ | $B = 3762,$ | $D = 553,8,$ | |
| | | $\sigma_{40} = 132,3,$ | $\delta T = -30000$ | | $T = 13\,550\,000.$ |
| | | $L = 20,87$ | | | |
| | | $\sigma_{40} = 117,9,$ | $\delta T = -20000$ | | $T = 13\,480\,000.$ |
| Ic | Nr. 4. | $L = 17,85,$ | $B = 3762,$ | $D = 562,5,$ | |
| | | $\sigma_{40} = 95,1,$ | $\delta T = -7000$ | | $T = 13\,630\,000.$ |
| Ic | Nr. 5. | $L = 15,36,$ | $B = 3767,$ | $D = 550,7,$ | |
| | | $\sigma_{40} = 87,45,$ | $\delta T = -70000$ | | $T = 13\,510\,000.$ |

Der Werth von T für das Stäbchen Ic Nr. 1 weicht merklich, wenn auch nicht erheblich, von den übrigen ab; ich schiebe dies auf den Umstand, dass das Stäbchen einen kleinen Sprung parallel einer Schmalseite besass, der zwar bei der Biegung ohne Einfluss bleiben, aber die Drillung ein wenig vergrößern, d. h. T verkleinern musste. Es ist daher vielleicht angemessen, diesen Werth von der Beobachtung des Gesamtmittels auszuschliessen. Man erhält dann:

$$\text{Gesamtmittel} \quad T_{I_c} = 13\,530\,000, \quad T_{I_c} = 7,391 \cdot 10^{-4}.$$

$$\text{Wahrscheinlicher Fehler} \quad \pm 18000 \quad \pm 0,0098.$$

| | | | | | |
|-----|--------|-------------------------|---------------------|--------------|---------------------|
| IIa | Nr. 1. | $L = 21,06,$ | $B = 3786,$ | $D = 538,5.$ | |
| | | $\sigma_{40} = 129,95,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 13\,360\,000.$ |

| | | | | | |
|------|-------------------------|----------------------------|------------------------|-----------------------------------|---------------------|
| IIa | Nr. 2. | $L = 21,75,$ | $B = 3775,$ | $D = 535,7.$ | |
| | | $\sigma_{40} = 135,6,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 13\,340\,000.$ |
| | | $L = 18,18$ | | | |
| | | $\sigma_{40} = 114,3,$ | $\delta T = -30000$ | | $T = 13\,280\,000.$ |
| IIa | Nr. 3. | $L = 20,42,$ | $B = 3749,$ | $D = 533,1.$ | |
| | | $\sigma_{40} = 130,2,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 13\,440\,000.$ |
| IIa | Nr. 4. | $L = 20,34,$ | $B = 3770,$ | $D = 537,5.$ | |
| | | $\sigma_{30} = 95,05,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 13\,370\,000.$ |
| IIa | Nr. 5. | $L = 18,95,$ | $B = 3758,$ | $D = 534,1.$ | |
| | | $\sigma_{30} = 90,65,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 13\,350\,000.$ |
| | Gesamtmittel | $T_{IIa} = 13\,360\,000,$ | | $T_{IIa} = 7,485 \cdot 10^{-8},$ | |
| | Wahrscheinlicher Fehler | ± 14000 | | $\pm 0,0078$ | |
| IIIb | Nr. 1. | $L = 26,20,$ | $B = 3845,$ | $D = 567,5.$ | |
| | | $\sigma_{30} = 160,6,$ | $\delta T = -120\,000$ | | $T = 11\,080\,000.$ |
| | | $L = 22,26$ | | | |
| | | $\sigma_{40} = 137,65,$ | $\delta T = -60000$ | | $T = 11\,040\,000.$ |
| IIIb | Nr. 2. | $L = 26,95,$ | $B = 3877,$ | $D = 580,6$ | |
| | | $\sigma_{40} = 154,3,$ | $\delta T = -80000$ | | $T = 11\,040\,000.$ |
| | | $L = 25,05$ | | | |
| | | $\sigma_{40} = 144,6,$ | $\delta T = -40000$ | | $T = 10\,980\,000.$ |
| IIIb | Nr. 3. | $L = 27,25,$ | $B = 3870,$ | $D = 569,7.$ | |
| | | $\sigma_{40} = 139,6,$ | $\delta T = -120\,000$ | | $T = 11\,100\,000.$ |
| | | $L = 20,76$ | | | |
| | | $\sigma_{40} = 126,4,$ | $\delta T = -60000$ | | $T = 11\,020\,000.$ |
| | Gesamtmittel | $T_{IIIb} = 11\,040\,000,$ | | $T_{IIIb} = 90,59 \cdot 10^{-8},$ | |
| | Wahrscheinlicher Fehler | ± 12000 | | $\pm 0,0099.$ | |

Resultate.

Die im Obigen bestimmten Zahlen stellen wir hier nochmals zusammen, und zwar beschränken wir uns auf die Grössen E und T , da diese für die Anwendungen der Theorie direct in Betracht kommen.

Wir haben gefunden:

$$\begin{aligned}
 (25) \quad & \left\{ \begin{aligned} E_I &= (4,341 \pm 0,0023) 10^{-8}, & E_{IV} &= (3,747 \pm 0,0027) 10^{-8}, \\ E_{II} &= (3,460 \pm 0,0023) 10^{-8}, & E_V &= (3,456 \pm 0,0016) 10^{-8}, \\ E_{III} &= (3,771 \pm 0,0026) 10^{-8}, & E_{VI} &= (3,145 \pm 0,0022) 10^{-8}, \\ T_{IIc} &= T_{IIIb} = (9,059 \pm 0,0099) 10^{-8}, \\ T_{IIIa} &= T_{Ic} = (7,391 \pm 0,0098) 10^{-8}, \\ T_{Ib} &= T_{IIa} = (7,485 \pm 0,0078) 10^{-8}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Der wahrscheinliche Fehler beträgt im Mittel noch nicht ein Tausendtheil des gesammten Werthes, und da das für die Beobachtung benutzte Material tadellos war, so kann eine Unsicherheit dieser Zahlen über diesen Betrag hinaus wohl nur entweder von etwaigen Fehlern bei der recht schwierigen Auswerthung des Sphärometers oder von Fehlern bei der Bestimmung der Dimensionen, welche in Unvollkommenheiten der Politur, fremdartigen Oberflächenschichten und dergleichen ihren Grund haben, herrühren. Aber derartige Fehlerquellen, welche auf alle nahe gleich dicken Stäbchen in gleicher Weise einwirken, modificiren auch die Werthe der s_{hk} und c_{hk} im gleichen Verhältnisse, sodass sie auf die interessanteste Frage nach dem Verhältnisse der Constanten c_{kk} ohne Einfluss bleiben.

Die vorstehenden Werthe bestimmen zunächst nach den Formeln (6), (8) und (10) sogleich folgendes System:

$$(26) \quad \begin{cases} s_{11} = (4,341 \pm 0,0023) 10^{-8}, & s_{23} = -(0,651 \pm 0,0083) 10^{-8}, \\ s_{22} = (3,460 \pm 0,0023) 10^{-8}, & s_{31} = -(0,840 \pm 0,0077) 10^{-8}, \\ s_{33} = (3,771 \pm 0,0026) 10^{-8}, & s_{12} = -(1,353 \pm 0,0067) 10^{-8}, \\ s_{44} = (9,059 \pm 0,0099) 10^{-8}, \\ s_{55} = (7,391 \pm 0,0098) 10^{-8}, \\ s_{66} = (7,485 \pm 0,0078) 10^{-8}. \end{cases}$$

Hierin sind wahrscheinlichen Fehler der s_{23} , s_{31} und s_{12} durch die Wurzeln aus der Summe der Quadrate der wahrscheinlichen Fehler ihrer Theile nach den Formeln (8) gegeben; die s_{23} , s_{31} und s_{12} sind naturgemäss am ungenauesten bestimmt, da sie sich aus je vier völlig unabhängigen Beobachtungsreihen bestimmen.

Diese neun Werthe (26) sind, wie oben ausgeführt, die für alle Anwendungen massgebenden Aggregate der Elasticitätsconstanten, welche in anderen Combinationen kaum vorkommen dürften; darum ist die vorstehende Zusammenstellung eines der Hauptresultate unserer Untersuchung.

Die erhaltenen Zahlen gestatten zunächst, nach der Formel (5) den allgemeinen Ausdruck für den Dehnungscoefficienten E zu bilden. Wir erhalten:

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} E = 1/E &= [4,341 \cdot \alpha^4 + 3,460 \cdot \beta^4 + 3,771 \cdot \gamma^4 \\ &+ 2(3,879 \cdot \beta^2 \gamma^2 + 2,856 \cdot \gamma^2 \alpha^2 + 2,390 \cdot \alpha^2 \beta^2)] \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \right.$$

Maxima und Minima erlangt E nur in den Hauptebenen; dieselben haben folgende Lagen und Werthe:

$$\text{I. } bc\text{-Ebene,} \quad \angle L, a = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle L, b = 0, & \quad E_{II} = 3,460 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, b = 63^\circ 5', & \quad (E_{IV}) = 3,792 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, b = 90^\circ, & \quad E_{III} = 3,771 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\text{II. } ca\text{-Ebene,} \quad \angle L, b = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle L, c = 0, & \quad E_{III} = 3,771 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, c = 39^\circ 5', & \quad (E_V) = 3,422 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, c = 90^\circ, & \quad E_I = 4,341 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\text{III. } ab\text{-Ebene,} \quad \angle L, c = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \angle L, a = 0, & \quad E_I = 4,341 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, a = 53^\circ 08', & \quad (E_{VI}) = 3,128 \cdot 10^{-8}, \\ \angle L, a = 90^\circ, & \quad E_{II} = 3,460 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Das Minimum von E in der *ab*-Ebene gibt den kleinsten Werth, der für Topas existirt, und damit den kleinsten bisher bekannten überhaupt; es entspricht ihm ein Elasticitätscoefficient oder, nach der von mir vorgeschlagenen Bezeichnung, ein Dehnungswiderstand von 32 450 000 g.

Die Abhängigkeit von E mit der Richtung wird durch Fig. 5 (Taf. VIII) veranschaulicht, welche die Gestalt der drei Schnittcurven der Oberfläche (27) mit den Symmetrieebenen darstellt. Die Grösse der Längsdehnung oder Biegung eines Cylinders von constanten Dimensionen ist bei wechselnder Orientirung seiner Axe mit E proportional.

Der allgemeine Werth des Drillungscoefficienten T lautet nach dem System (26) und der Formel (9):

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} T = 1/T &= [17,36 \cdot \alpha^2 \alpha_1^2 + 13,84 \cdot \beta^2 \beta_1^2 + 15,08 \cdot \gamma^2 \gamma_1^2 \\ &+ 12,910 \cdot \beta \beta_1 \gamma \gamma_1 + 8,06 \cdot \gamma \gamma_1 \alpha \alpha_1 + 4,146 \cdot \alpha \alpha_1 \beta \beta_1 \\ &+ 9,059 (\beta^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \beta_1^2) + 7,391 (\gamma^2 \alpha_1^2 + \alpha^2 \gamma_1^2) \\ &+ 7,485 (\alpha^2 \beta_1^2 + \beta^2 \alpha_1^2)] 10^{-8}, \end{aligned} \right.$$

er eignet sich weniger für die Discussion und graphische Darstellung, da er von zwei Richtungen (L und B) abhängig

ist. Einfache Werthe erhält man, wenn man die eine der beiden Richtungen in eine Axe festlegt, also z. B. nach der Abhängigkeit des Drillungscoëfficienten von der Lage der Querdimensionen des Prismas fragt, wenn die Längsaxe in die a -Axe fällt. Dafür wird:

$$T = 7,391 \cdot \gamma_1^2 + 7,485 \cdot \beta_1^2,$$

— ein Werth, der zeigt, dass Maxima und Minima eintreten, wenn die Querdimensionen ebenfalls in Krystallaxen liegen.

Sehr übersichtlich ist der Werth des Drillungscoëfficienten für einen Kreiscylinder, welcher nach (24) hier lautet:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} T' = (14,88 \cdot \alpha^2 + 16,54 \cdot \beta^2 + 16,45 \cdot \gamma^2 \\ \quad - 2,10 \cdot \beta^2 \gamma^2 + 9,60 \cdot \gamma^2 \alpha^2 + 12,09 \cdot \alpha^2 \beta^2) \cdot 10^{-8}, \end{array} \right.$$

oder:

$$\begin{aligned} &= (14,88 \alpha^4 + 16,54 \beta^4 + 16,45 \gamma^4 \\ &\quad + 30,89 \beta^2 \gamma^2 + 40,89 \gamma^2 \alpha^2 + 43,51 \alpha^2 \beta^2) \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die Maxima und Minima in den Hauptschnitten haben folgende Lagen und Werthe:

$$\text{I. } bc\text{-Ebene,} \quad <L, a = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} <L, b = 0, & \quad T_{II} = 16,54 \cdot 10^{-8}, \\ <L, b = 44^\circ 54', & \quad (T'_{IV}) = 15,97 \cdot 10^{-8}, \\ <L, b = 90^\circ, & \quad T'_{III} = 16,45 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

$$\text{II. } ca\text{-Ebene,} \quad <L, b = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} <L, c = 0, & \quad T'_{III} = 15,45 \cdot 10^{-8}, \\ <L, c = 44^\circ 06', & \quad (T'_{II}) = 18,08 \cdot 10^{-8}, \\ <L, c = 90^\circ, & \quad T'_I = 14,88 \cdot 10^{-8}, \end{aligned}$$

$$\text{III. } ab\text{-Ebene,} \quad <L, b = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} <L, a = 0, & \quad T'_I = 14,88 \cdot 10^{-8}, \\ <L, a = 45^\circ 52', & \quad (T'_{IV}) = 18,75 \cdot 10^{-8}, \\ <L, a = 90^\circ, & \quad T'_{II} = 16,54 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit der Grösse T' von der Richtung wird durch die Figur 7 dargestellt, in welcher die drei Hauptschnitte der Oberfläche (29) gezeichnet sind. Die Grösse der Drillung eines Kreiscylinders von constanten Dimen-

sionen ist bei wechselnder Richtung seiner Axe mit T' proportional.

Aus dem System der s_{hk} (26) folgend weiter die Coefficienten der linearen Dilatation bei allseitig gleichem Druck nach (16) folgendermassen:

$$(30) \quad A_a = 2,148 \cdot 10^{-8}, \quad A_b = 1,456 \cdot 10^{-8}, \quad A_c = 2,280 \cdot 10^{-8};$$

ebenso der Coefficient der dabei eintretenden cubischen Dilatation nach (17):

$$M = 5,884 \cdot 10^{-8},$$

letzterer noch kleiner als selbst für Beryll, für welchen die Beobachtungen $M = 7,255 \cdot 10^{-8}$ ergeben hatten.

Die Elasticitätsconstanten selbst, wie sie für das rhombische Krystallsystem in den Formeln (1) definirt sind, bestimmen sich nach den Gleichungen (14), natürlich durch die complicirte Rechnung zum Theil mit verhältnissmässig geringer Genauigkeit, wie folgt:

$$(31) \quad \begin{cases} c_{11} = 28,7_0 \cdot 10^6, & c_{22} = 35,6_0 \cdot 10^6, & c_{33} = 30,0_2 \cdot 10^6, \\ c_{44} = 11,0_4 \cdot 10^6, & c_{55} = 13,5_3 \cdot 10^6, & c_{66} = 13,3_6 \cdot 10^6, \\ c_{23} = 9,0_1 \cdot 10^6, & c_{31} = 8,6_1 \cdot 10^6, & c_{12} = 12,8_4 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Diese Constanten setzen, wie auch das System der s_{hk} (26), die im Eingang erörterte Aufstellung des Krystalles voraus.

Bestände der Topas aus Moleculen, deren Wechselwirkungen nur von den Entfernungen abhängig, also nicht polar wären, so müssten nach (15) die Relationen gelten:

$$c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}.$$

Wie gering man immer die Zuverlässigkeit der erhaltenen Zahlen anschlagen möge, so können dieselben als Stütze dieser Beziehungen doch in keinem Falle gelten. Die Beobachtungen lassen also auf eine starke Polarität der Moleculé des Topases schliessen. Die von Hrn. Prof. Riecke¹⁾ ausgesprochene Anschauung, dass diese Polarität electricischen Ursprunges ist, und Krystalle, welche sie besitzen, pyroelectric sein müssen, findet durch dieses Resultat bei den bekannten electricischen Eigenschaften des Topases eine neue Stütze.

1) Riecke, Gött. Nachr. 1887. Nr. 7. p. 194.

Schliesslich können wir die gefundenen Werthe noch benutzen, um die Grössen q_a , q_b , q_c zu berechnen, welche nach dem zu den Formeln (22) Gesagten das Maass der thermischen Abstossung parallel den Hauptaxen darstellen.

Nach Beobachtungen von Fizeau¹⁾ sind die thermischen lineären Dilatationscoëfficienten des Topases parallel seinen Axen

$$a_a = 0,000\,004\,84, \quad a_b = 0,000\,004\,14, \quad a_c = 0,000\,005\,92.$$

Daraus folgt nach den genannten Formeln:

$$q_a = 243, \quad q_b = 263, \quad q_c = 256.$$

Diese Werthe, welche im Vergleich zu sonst bekannten ausserordentlich gross sind, sagen aus, dass der Topas bei einer Erwärmung eine höchst bedeutende Druckkraft entwickelt. Um nämlich die Dilatation aufzuheben, welche er parallel den Axen bei der Erwärmung um nur 1°C. erfährt, würden auf die Flächen eines Prismas normal zu den Axen die Drucke von resp.

$$243 \qquad 263 \qquad 256$$

Gramm pro Quadratmillimeter, oder circa 24, 26 und 25 Atmosphären ausgeübt werden müssen.

Bemerkenswerth ist die sehr nahe gleiche Grösse dieser drei Zahlen, welche zeigt, dass die Dilatation, welche durch eine Erwärmung eines Topases hervorgebracht wird, sehr vollständig durch einen allseitig gleichen Druck aufgehoben werden kann.

B a r y t.

Das Material für die Beobachtungen lieferte mir ein prachtvoller Krystall von Alston Moor in Cumberland, den ich der Güte des Hrn. Prof. Hirschwald in Charlottenburg verdanke. Seine Gestalt war tafelförmig bei einer Dicke von über 2 cm und Querdimensionen von nahe 8 cm; obgleich in erheblichen Theilen von Sprüngen durchzogen, gestattete er doch bei einiger Ueberlegung neun Gattungen verschieden orientirter Stäbchen — also drei mehr, als zur Bestimmung der Constanten absolut nothwendig sind, — in für die Beobachtungen genügenden Dimensionen herzustellen; — ein grosser

1) Fizeau, Pogg. Ann. 135. p. 383. 1868.

Vortheil, wenn man berücksichtigt, dass die Hauptfrage, welche die Untersuchung zu stellen hat, das Verhältniss der Werthe der Elasticitätsconstanten betrifft, und es immerhin denkbar ist, dass verschiedene Fundorte Krystalle mit ein wenig verschiedenen absoluten Constantenwerthen liefern. Um so mehr fühle ich mich verpflichtet, Hrn. Prof. Hirschwald für die Ueberlassung dieses schönen Stückes den herzlichsten Dank auszusprechen.

Die Herstellung der Stäbchen für die Messungen ist von den Herren Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. Höhe in ganz vorzüglicher Weise ausgeführt, und die Präparate lassen bei der feinen Politur der Breitseiten die unvergleichliche Reinheit und Klarheit, welche der Krystall in seinem bei weitem grössten Theile besass, aufs deutlichste erkennen.

War sonach ein vollendet schönes Beobachtungsmaterial verfügbar, so bot doch die Ausführung der Beobachtungen, namentlich derjenigen der Drillung, ganz eigenthümliche Schwierigkeiten durch die ausserordentliche Sprödigkeit und Spaltbarkeit des Baryts, welche z. B. diejenige des Flussspaths weit übertrifft. Für die Torsionsbeobachtungen war es nöthig, nahe den Enden kleine Stücke Bleifolie auf die Stäbchen aufzukitten, um dadurch den auf das Stäbchen zu setzenden Spiegelklemmen Halt zu geben, — danach waren die Stäbchen mit ihren beiden Enden an dem Torsionsapparat durch Einklemmen oder Einkitten anzubringen und zu centriren — schliesslich die Spiegelklemmen auf den Stäbchen zu befestigen —; bei allen diesen Operationen, wo die Stäbchen ungleichförmigen Erwärmungen und nicht unerheblichen Drucken ausgesetzt werden mussten, entstanden auch bei peinlichster Vorsicht leicht Sprünge, welche, wenn sie auch nicht das Stäbchen sogleich zerstörten, dasselbe doch für die Beobachtung untauglich machten. Und wenn alle diese gefährlichen Vorbereitungen glücklich überstanden waren, so sprang oft genug das Stäbchen, nachdem es bereits einige Belastungen ausgehalten hatte, aus unbekannten Gründen an einer Befestigungsstelle durch, sodass die ganzen mühsamen Vorbereitungen verloren waren. Unter diesen Umständen war es nöthig, alle einigermassen brauchbaren Fragmente

der Beobachtung zu unterwerfen, um eine Zuverlässigkeit der Endresultate zu erhalten, welche den Verbrauch so schönen Materials rechtfertigt.

Die von einem Stäbchen noch weiter benutzten Bruchstücke sind in den folgenden Tafeln durch an die Ordnungsnummer desselben angefügte Indices bezeichnet.

Die vorstehend beschriebene war aber keineswegs die einzige Schwierigkeit, welche sich aus der grossen Spaltbarkeit des Baryts ergab; es besteht noch eine weitere, welche die Genauigkeit aller an so spaltbarem Material erhaltenen Constanten in Frage stellt.

Wiederholt habe ich bemerkt, dass bei der Erwärmung der Stäbchen behufs Aufkitten der Stanniolbeläge grössere oder geringere Sprünge entstanden, welche sich bei der Abkühlung wieder schlossen, sodass sie absolut un wahrnehmbar wurden, ja mitunter schlossen sich vorhandene Sprünge beim neuen Erwärmen und blieben auch nach der Abkühlung, sogar im polarisirten Lichte, unsichtbar. Man wird aber kaum annehmen dürfen, dass sie nun auch in ihrer Wirkung beseitigt seien; jedenfalls zeigte sich eine auffallende Neigung der Stäbchen, parallel derartigen geschlossenen Sprüngen bei anderer Gelegenheit definitiv zu brechen, und bei dem früher gezeigten bedeutenden Einfluss, welchen kaum sichtbare Spalten auf die Beobachtung ausüben, ist es nur zu wahrscheinlich, dass auch jene geschlossenen Risse einen wenngleich kleineren Einfluss geben.

Ist nun aber hiernach anzunehmen, dass Sprünge vollständig unsichtbar werden und doch noch wirksam sein können — welche Garantie bietet das optisch tadellose Verhalten bei so leicht spaltenden Medien für normale Structur? Und wollte man auch bei der Handhabung der Stäbchen jede Erwärmung vermeiden, so wäre dieselbe bei ihrer Herstellung doch nicht zu umgehen, und die Wirkungen, denen der Krystall im Erdinnern ausgesetzt gewesen ist, entziehen sich nun gar völlig jeder Beurtheilung. Man wird hiernach wohl thun, den durch Beobachtung an so spaltbaren Medien erhaltenen Constantenwerthen nicht allzu grosses Gewicht beizulegen, zwischen verschiedenen an derselben Substanz erhaltenen

Zahlen für die elastischen Widerstände aber der grösseren auch mehr Vertrauen zu schenken, da diese wie manche andere Fehlerquellen (Oberflächenschichten, mangelhafte Politur) zu kleine Werthe veranlassen.

Die grosse Spaltbarkeit des Baryts wirkt endlich noch in einer dritten Hinsicht störend auf die Beobachtungen ein. Sehr spaltbare Substanzen nehmen bekanntlich nach verschiedenen Flächen verschieden leicht Politur an — eine Thatsache, die nach dem Mechanismus des Schleifens und Polirens leicht verständlich ist. Demgemäss ist eine uns schliesslich als blank erscheinende Oberfläche je nach der verschiedenen Orientirung von verschiedener Structur, enthält speciell mehr oder weniger tiefe Poren, die durch herausgerissene winzige Fragmente gebildet sind und sich der Messung natürlich völlig entziehen.

Da nun diese Poren die Dicke der wirklich wirksamen Schicht vermindern, so muss die scheinbare Dicke der Stäbchen je nach der Orientirung der Breitseiten um verschiedene Beträge falsch sein. Ein Fehler von 0,001 mm macht aber die elastischen Coëfficienten je nach Umständen bereits um den zwei bis dreihundertsten Theil fehlerhaft; demgemäss tritt nicht nur eine Unsicherheit der absoluten Werthe um einen solchen Betrag leicht ein, sondern es kann auch in scheinbarem Widerspruch mit der Theorie geschehen, dass Stäbchen mit gleicher Orientirung der Längs-, aber verschiedener der Querrichtung verschiedene Biegeconstanten ergeben. Auch hier ist im allgemeinen der grössere Werth der wahrscheinlichere.

Freilich gibt es auch eine Fehlerquelle, die entgegengesetzt wirkt, als die erwähnten, nämlich der Einfluss der bei der Drillung aufgelegten Stanniolbeläge. Bei dem sehr kleinen Torsionswiderstand einiger Gattungen von Stäbchen gewann dieselbe einen ganz ausserordentlichen Einfluss; sie ist wie oben beim Topas in den Tafeln mit δT bezeichnet. Wie beim Topas, sind auch hier Controlbeobachtungen zur Bestimmung desselben angestellt worden, indem absichtlich grosse Stücke der Beläge zwischen die Schneiden eingeschaltet wurden; aber die Resultate waren wenig übereinstimmend, offen-

bar, weil die angewandte Kittmenge nicht immer die gleiche sein konnte. Das beste Verfahren ist, die Stanniolbeläge nur am äusseren Ende aufzukitten, sodass sie im übrigen lose am Stäbchen anliegen, aber dies bietet bei einem so äusserst zerbrechlichen Material wie Baryt technische Schwierigkeiten; da man nicht eine einzelne Stelle für sich erwärmen kann, so verfliesst der Kitt leicht in den ganzen Zwischenraum zwischen Stanniol und Krystall, und auch die nahe liegenden Auswege, wie z. B. das Emporbiegen eines Theiles des Belages beim Aufkitten u. a., haben sich nicht bewährt.

Alles in allem hat sich die Bestimmung zuverlässiger Werthe trotz der langjährigen Erfahrungen wiederum als eine recht schwierige Aufgabe erwiesen, die eine ausserordentlich grosse Zahl von Messungen erfordert. Beispielsweise erfordert jede einzelne Reihe von Drillungsbeobachtungen über 200 Ablesungen, und die Gesamtzahl der am Baryt nur zur Bestimmung der drei Drillungscoefficienten T angestellten Ablesungen am Torsionsapparat beträgt über 6000, die ich ihrer grossen Subtilität wegen niemandem anvertrauen mochte, während ich bei den Messungen der Dimensionen und der Biegungen die zuverlässige und dankenswerthe Hülfe des Hrn. Dr. Drude gern wieder in Anspruch nahm.

Um die der Beobachtung unterworfenen Stäbchen zu charakterisiren; denke ich mir den Barytkrystall so aufgestellt, dass die Brachydiagonale des Spaltungsprismas die a -Axe, die Makrodiagonale die b -Axe, also die Normale zur Basis die c -Axe ist.

Dann stellen sich die neun Gattungen beobachteter Stäbchen, falls man die Längsrichtung mit L , Breite mit B , Dicke mit D bezeichnet, folgendermassen dar:

- (Ib) : $L \parallel a, B \parallel b$; (Ic) : $L \parallel a, B \parallel c$;
- (IIc) : $L \parallel b, B \parallel c$; (IIa) : $L \parallel b, B \parallel a$;
- (IIIa) : $L \parallel c, B \parallel a$; (IIIb') : $L \parallel c, \angle (B, b) = 50^\circ 50'$;
- (IV) : $\angle (L, b) = \angle (L, c) = 45^\circ, B \parallel a$;
- (V) : $\angle (L, c) = \angle (L, a) = 45^\circ, B \parallel b$;
- (VI) : $\angle (L, a) = 50^\circ 50', \angle (L, b) = 39^\circ 10', D \parallel c$.

Die beiden Gattungen (IIIb') und (VI) sind von den übrigen abweichend orientirt, weil die Form des benutzten

Krystalls nahe legte, eine Platte parallel der vorhandenen Spaltungsfläche abzutrennen und zu verarbeiten.

Biegungen.

| | | | | | |
|----|--------|---|---|--|---------------------------------|
| Ib | Nr. 1. | $B = 5596,$ $L = 16,3,$ $L = 46,2,$ | $D = 874,0,$ $\eta = 18,2,$ $\eta = 386,6,$ | $P = 110,$ $\eta' = 2,3,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 208\ 000.$ |
| Ib | Nr. 2. | $B = 5418,$ $L = 56,15,$ | $D = 874,1,$ $\eta = 714,2,$ | $P = 110,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 213\ 000.$ |
| Ib | Nr. 3. | $B = 5441,$ $L = 14,3,$ $L = 50,2,$ | $D = 870,0,$ $\eta = 14,1,$ $\eta = 516,5,$ | $P = 110,$ $\eta' = 2,2,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 206\ 000.$ |
| Ib | Nr. 4. | $B = 5612,$ $L = 58,2,$ | $D = 873,6,$ $\eta = 768,4,$ | $P = 110,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 215\ 000.$ |
| Ib | Nr. 5. | $B = 5610,$ $L = 14,3,$ $L = 62,2,$ | $D = 871,7,$ $\eta = 14,0,$ $\eta = 942,3,$ | $P = 110,$ $\eta' = 2,5,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 230\ 000.$ |
| Ic | Nr. 1. | $B = 5102,$ $L = 14,3,$ $L = 52,2,$ | $D = 907,$ $\eta = 5,3,$ $\eta = 201,2,$ | $P = 40,$ $\eta' = 1,1,$ $(\eta') = 1,6,$ | $E = 6\ 164\ 000.$ |
| Ic | Nr. 2. | $B = 5540,$ $L = 14,3,$ $L = 52,2,$ | $D = 906,0,$ $\eta = 8,1,$ $\eta = 278,6,$ | $P = 60,$ $\eta' = 2,4,$ $(\eta') = 2,3,$ | $E = 6\ 164\ 000.$ |
| Ic | Nr. 3. | $L = 50,2,$ | $B = 5437,$ $\eta = 253,1,$ | $D = 903,7,$ $\eta' = 2,3,$ | $P = 60,$ $E = 6\ 193\ 000.$ |

Hier liegt meines Erachtens der Fall vor, der in der Einleitung erwähnt ist: zwei Gattungen Stäbchen mit derselben Orientirung der Längsaxe und verschiedener der Querdimensionen geben merklich, wenn auch unerheblich verschiedene Resultate. Beachtet man, dass bei der ersteren Gattung die Hauptspaltungsrichtung in die Breitseiten fällt, die beiden anderen normal dazu stehen, so ist es sehr einleuchtend, dass diese leichter und vollkommener Politur annimmt, als die letztere, bei welcher die Hauptspaltungsrichtung normal steht, die anderen die Winkel von $\pm 50^\circ$ dagegen bilden; denn bei letzteren wird es viel leichter stattfinden, dass das Schleifmittel kleine Fragmente herausreisst. Der grössere Werth E ist also der wahrscheinlichere von beiden. Da indess die anderen benutzten Stäbchen meist Orientirungen haben, welche die verschiedenste Einwirkung der

Spaltungsrichtungen auf die Politur ergeben, so schien es mir der gleichen Behandlung aller Richtungen zu entsprechen, wenn zur Berechnung des Gesamtmittels alle Stäbe benutzt würden. Die absoluten Werthe sind, wie oben gesagt, so alle um eine Kleinigkeit zu klein. Wir erhalten:

$$\begin{array}{lcl} \text{Gesamtmittel} & E_I = 6\,199\,000, & E_I = 16,13 \cdot 10^{-8} \\ \text{Wahrscheinlicher Fehler} & \pm 5700 & \pm 0,015. \end{array}$$

| | | |
|------|--------|---|
| II c | Nr. 1. | $B = 5627, D = 743,7, P = 50,$ $L = 14,3, \eta = 11,7, (\eta') = 2,1,$ $\eta = 326,5, (\eta') = 2,1, L = 44,2, E = 5\,395\,000.$ |
| II c | Nr. 3. | $L = 52,2, B = 5607, D = 741,3, P = 30,$ $\eta = 286,5, (\eta') = 1,8, E = 5\,392\,000.$ |
| II c | Nr. 4. | $D = 5613, D = 742,6, P = 30,$ $L = 14,3, \eta = 7,6, \eta' = 1,8,$ $L = 52,2, \eta = 283,4, (\eta') = 1,8, E = 5\,414\,000.$ |
| II a | Nr. 1. | $B = 5536, D = 520,7, P = 20,$ $L = 14,3, \eta = 12,1, (\eta') = 0,75,$ $L = 40,2, \eta = 253,1, (\eta') = 0,8, E = 5\,413\,000.$ |
| II a | Nr. 2. | $B = 5546, D = 517,2, P = 25,$ $L = 14,3, \eta = 15,6, \eta' = 1,1,$ $L = 38,2, \eta = 277,4, (\eta') = 1,1, E = 5\,400\,000.$ |
| II a | Nr. 3. | $B = 5544, D = 515,0, P = 25,$ $L = 14,3, \eta = 15,5, \eta' = 0,8,$ $L = 38,2, \eta = 281,9, (\eta') = 1,1, E = 5\,390\,000.$ |
| II a | Nr. 4. | $B = 5505, D = 520,0, P = 25,$ $L = 14,3, \eta = 15,5, \eta' = 1,2,$ $L = 32,2, \eta = 164,3, (\eta') = 1,1, E = 5\,426\,000.$ |
| II a | Nr. 5. | $B = 5518, D = 520,6, P = 25,$ $L = 14,3, \eta = 15,7, \eta' = 1,4,$ $L = 30,2, \eta = 135,7, (\eta') = 1,1, E = 5\,400\,000.$ |
| II a | Nr. 6. | $B = 5546, D = 522,0, P = 25,$ $L = 14,3, \eta = 15,0, \eta' = 0,9,$ $L = 32,2, \eta = 162,3, (\eta') = 1,1, E = 5\,395\,000.$ |

$$\begin{array}{lcl} \text{Gesamtmittel} & E_{II} = 5\,403\,000, & E_{II} = 18,51 \cdot 10^{-8} \\ \text{Wahrscheinlicher Fehler} & \pm 2300 & \pm 0,008. \end{array}$$

Bei dieser Gattung stimmen die Resultate merklich überein, obgleich die Breitseiten von II c anders orientirt sind, als von II a; die Politur von beiden mag sonach gleich sein, oder wenigstens das Verhältniss der oberflächlichen Unebenheiten zu der ganzen Dicke übereinstimmen. Im letzteren

Fälle würde wieder, wie bei den Gattungen I, die Politur der Sorten IIc, welche die Breitseiten normal zur Hauptspaltungsrichtung besitzt, weniger vollkommen sein, als die der Sorte IIa, bei denen sie parallel sind.

| | | | | |
|--|-------------|-----------------|------------------|--------------------|
| IIIa Nr. 1. | $B = 5490,$ | $D = 532,9,$ | $P = 80,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,9,$ | $\eta' = 3,5,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 94,5,$ | $(\eta') = 2,9,$ | $E = 9\,580\,000.$ |
| IIIa Nr. 2. | $B = 5487,$ | $D = 533,5,$ | $P = 80,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,7,$ | $\eta' = 2,3,$ | |
| | $L = 20,3,$ | $\eta = 72,2,$ | $(\eta') = 2,9,$ | $E = 9\,530\,000.$ |
| IIIa Nr. 3. | $B = 5483,$ | $D = 529,5,$ | $P = 90,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 30,6,$ | $\eta' = 2,7,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 108,6,$ | $(\eta') = 3,5,$ | $E = 9\,590\,000.$ |
| | $L = 20,3,$ | $\eta = 82,6,$ | $(\eta') = 3,5,$ | $E = 9\,620\,000.$ |
| IIIa Nr. 4. | $B = 5488,$ | $D = 530,6,$ | $P = 90,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 31,3,$ | $(\eta') = 3,9,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 107,9,$ | $(\eta') = 3,5,$ | $E = 9\,580\,000.$ |
| IIIa Nr. 5. | $B = 5487,$ | $D = 530,0,$ | $P = 90,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 31,6,$ | $\eta' = 4,3,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 107,9,$ | $(\eta') = 3,5,$ | $E = 9\,610\,000.$ |
| IIIa Nr. 6. | $B = 5504,$ | $D = 531,0,$ | $P = 90,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 31,2,$ | $\eta' = 3,7,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 107,9,$ | $(\eta') = 3,5,$ | $E = 9\,530\,000.$ |
| IIIb Nr. 1. | $L = 22,3,$ | $B = 5375,$ | $D = 524,6,$ | $P = 90,$ |
| | | $\eta = 113,4,$ | $(\eta') = 3,6,$ | $E = 9\,610\,000.$ |
| IIIb Nr. 2. | $B = 5394,$ | $D = 519,8,$ | $P = 70,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,3,$ | $(\eta') = 3,4,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 90,3,$ | $(\eta') = 3,1,$ | $E = 9\,620\,000.$ |
| IIIb Nr. 3. | $B = 5385,$ | $D = 529,1,$ | $P = 70,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 24,6,$ | $(\eta') = 2,7,$ | |
| | $L = 22,3,$ | $\eta = 85,8,$ | $(\eta') = 3,1,$ | $E = 9\,650\,000.$ |
| Gesamtmittel $E_{III} = 9\,594\,000,$ $E_{III} = 10,42 \cdot 10^{-8}.$ | | | | |
| Wahrscheinlicher Fehler ± 9000 $\pm 0,0097.$ | | | | |

Beide Gattungen III geben merklich übereinstimmende Resultate; in der That liegt hier die Hauptspaltungsebene normal zu den Breitseiten beider.

| | | | | |
|-----------|-------------|-----------------|------------------|--------------------|
| IV Nr. 1. | $B = 5492,$ | $D = 529,8,$ | $P = 30,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 25,9,$ | $\eta' = 2,4,$ | |
| | $L = 32,2,$ | $\eta = 270,9,$ | $(\eta) = 2,0,$ | $E = 3\,768\,000.$ |
| IV Nr. 2. | $B = 5491,$ | $D = 534,7,$ | $P = 30,$ | |
| | $L = 14,3,$ | $\eta = 24,8,$ | $\eta' = 2,1,$ | |
| | $L = 32,2,$ | $\eta = 261,3,$ | $(\eta') = 2,0,$ | $E = 3\,779\,000.$ |

| | | | | | | |
|----|--------|-------------------------|-----------------|-------------------------|---------------------------------|--|
| IV | Nr. 3. | $B = 5494,$ | $D = 518,5,$ | $P = 30,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,8,$ | $\eta' = 1,8,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 285,6,$ | $(\eta') = 2,0,$ | $E = 3\,788\,000.$ | |
| IV | Nr. 4. | $B = 5495,$ | $D = 538,0,$ | $P = 30,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 23,9,$ | $\eta' = 1,5,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 257,3,$ | $(\eta') = 2,0,$ | $E = 3\,768\,000.$ | |
| IV | Nr. 5. | $B = 5499,$ | $D = 528,6,$ | $P = 30,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 25,4,$ | $\eta' = 2,0,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 270,3,$ | $(\eta') = 2,0,$ | $E = 3\,781\,000.$ | |
| IV | Nr. 6. | $B = 5498,$ | $D = 529,8,$ | $P = 40,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 33,3,$ | $\eta' = 2,0,$ | | |
| | | $L = 26,2,$ | $\eta = 194,6,$ | $(\eta') = 1,9,$ | $E = 3\,755\,000.$ | |
| IV | Nr. 7. | $B = 5496,$ | $D = 511,4,$ | $P = 40,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 36,4,$ | $\eta' = 1,7,$ | | |
| | | $L = 26,2,$ | $\eta = 215,1,$ | $(\eta') = 1,9,$ | $E = 3\,776\,000.$ | |
| | | Gesamtmittel | | $E_{IV} = 3\,775\,000,$ | $E_{IV} = 26,50 \cdot 10^{-9}.$ | |
| | | Wahrscheinlicher Fehler | | ± 2800 | $\pm 0,020.$ | |
| V | Nr. 1. | $B = 5543,$ | $D = 597,7,$ | $P = 50,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,5,$ | $\eta' = 6,1,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 165,7,$ | $(\eta') = 2,1,$ | $E = 7\,085\,000.$ | |
| V | Nr. 2. | $B = 5565,$ | $D = 598,4,$ | $P = 50,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,5,$ | $\eta' = 2,3,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 164,9,$ | $(\eta') = 2,1,$ | $E = 7\,066\,000.$ | |
| V | Nr. 3. | $B = 5567,$ | $D = 598,4,$ | $P = 50,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,5,$ | $\eta' = 2,3,$ | | |
| | | $L = 32,2,$ | $\eta = 164,2,$ | $(\eta') = 2,1,$ | $E = 7\,095\,000.$ | |
| V | Nr. 4. | $B = 5535,$ | $D = 584,0,$ | $P = 50,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 17,1,$ | $\eta' = 1,6,$ | | |
| | | $L = 30,2,$ | $\eta = 147,9,$ | $(\eta') = 2,1,$ | $E = 7\,040\,000.$ | |
| V | Nr. 5. | $B = 5359,$ | $D = 592,3,$ | $P = 50,$ | | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 119,6,$ | $(\eta') = 2,1,$ | $E = 7\,058\,000.$ | |
| V | Nr. 6. | $B = 3530,$ | $D = 596,9,$ | $P = 30,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 15,4,$ | $\eta' = 2,3,$ | | |
| | | $L = 28,2,$ | $\eta = 106,8,$ | $(\eta') = 2,3,$ | $E = 7\,044\,000.$ | |
| | | Gesamtmittel | | $E_V = 7\,063\,000,$ | $E_V = 14,16 \cdot 10^{-9}.$ | |
| | | Wahrscheinlicher Fehler | | ± 6000 | $\pm 0,005.$ | |

Die folgende Gattung VI' war von allen die ungünstigste, da die Stäbchen infolge eines Unglücksfalles auf den Wege von Homburg hierher zerbrochen in meine Hände kamen, sodass nur wenige Stücke die Beobachtung überhaupt zuließen. Die Nummern (1) – (3) waren darunter am besten

zu verwerthen; um sie möglichst vollständig auszunutzen und ihnen einen entsprechenden Einfluss zu gewähren, sind sie nicht nur in verschiedenen Längen, sondern auch bei verschiedenen Belastungen (60 und 110 g) beobachtet.

Indessen habe ich nur die Beobachtungen mit 60 g Belastung mitgetheilt, da es sich zeigte, dass bei 110 g die dünneren Stäbchen nahe an der Grenze ihrer Tragfähigkeit waren und sich deshalb wohl unregelmässig verhielten¹⁾; sie gaben nämlich übereinstimmend merklich grössere Werthe von E als bei geringerer Inanspruchnahme. Durch besondere Beobachtungen überzeugte ich mich, dass bei 90 g Belastung die Proportionalität zwischen Gewicht und Biegung noch vollständig war. Für die Berechnung habe ich nur die eine Belastung, aber verschiedene Längen angewandt, weil dabei nur ein Werth von η' in Betracht kam, der durch das Mittel der an allen Stäbchen erhaltenen recht genau bestimmt werden konnte.

Die Nummern (4) und (5) waren nicht ganz tadellos, sondern an den Enden mit kleinen Sprüngen oder Fortwachsungserscheinungen behaftet; da dieselben aber an den Enden geringen Einfluss haben, so glaubte ich die bezüglichlichen Beobachtungen nicht unterdrücken zu sollen.

Das Stäbchen (6) war das einzige Fragment einer ganzen Reihe dickerer Stäbchen, das noch eine Beobachtung zuließ; um eine messbare Biegung zu erhalten, war hier die grössere Belastung von 110 g erforderlich; die vereinzelte Messung von η' hat wenig Zuverlässigkeit, — ein etwas kleinerer Werth als 3,0, vielleicht 2,8 ist nach anderen Beobachtungen wahrscheinlicher.

| | | | | | |
|----|--------|--------------|-----------------|------------------|--------------------|
| VI | Nr. 1. | $B = 5143,$ | $D = 523,6,$ | $P = 60,$ | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,2,$ | $\eta' = 1,4,$ | |
| | | $L = 22,3,$ | $\eta = 101,5,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,400\,000.$ |
| | | $L = 20,25,$ | $\eta = 77,2,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,380\,000.$ |

1) In der That sprangen zwei in ganz unerklärlicher Weise, als ihnen die Belastung von 110 g nochmals für eine Wiederholung der Beobachtungsreihe zugemuthet wurde. Es scheint hiernach fast, dass ähnlich wie Metallstäbe durch fortgesetztes Hin- und Herbiegen spröder werden, auch die Krystallstäbchen an Zerbrechlichkeit zunehmen.

| | | | | | | |
|----|--------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|--------------------|--|
| VI | Nr. 2. | $B = 5347,$ | $D = 528,3,$ | $P = 60,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,4,$ | $\eta' = 1,6,$ | | |
| | | $L = 22,3,$ | $\eta = 95,5,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,370\,000.$ | |
| | | $L = 20,15,$ | $\eta = 72,4,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,380\,000.$ | |
| VI | Nr. 3. | $B = 5355,$ | $D = 527,1,$ | $P = 60,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 26,2,$ | $\eta' = 1,7,$ | | |
| | | $L = 24,3,$ | $\eta = 121,9,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,490\,000.$ | |
| | | $L = 20,25,$ | $\eta = 72,1,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,440\,000.$ | |
| VI | Nr. 4. | $B = 5164,$ | $D = 523,9,$ | $P = 60,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,8,$ | $(\eta') = 1,3,$ | | |
| | | $L = 18,3,$ | $\eta = 56,9,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,360\,000.$ | |
| VI | Nr. 5. | $B = 5254,$ | $D = 523,2,$ | $P = 60,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 27,5,$ | $\eta' = 1,7,$ | | |
| | | $L = 18,3,$ | $\eta = 55,8,$ | $(\eta') = 1,5,$ | $E = 7\,370\,000.$ | |
| VI | Nr. 6. | $B = 5361,$ | $D = 794,5,$ | $P = 110,$ | | |
| | | $L = 14,3,$ | $\eta = 16,4,$ | $\eta' = 3,3,$ | | |
| | | $L = 20,3,$ | $\eta = 40,8,$ | $(\eta') = 2,8,$ | $E = 7\,400\,000.$ | |
| | | Gesamtmittel | $E_{VI} = 7\,400\,000,$ | $E_{VI} = 13,51 \cdot 10^{-3}.$ | | |
| | | Wahrscheinlicher Fehler | ± 9300 | $\pm 0,017.$ | | |

Die im Vorstehenden erhaltenen Werthe sind nun noch wegen der Abweichung der Orientirung der Stäbchen von der vorgeschriebenen zu corrigiren. Auf die Gattungen I, II und III haben allerdings kleine Orientirungsfehler keinen merklichen Einfluss, wohl aber auf IV, V und VI.

Bezeichnet man resp. mit $45^\circ + \delta_2$ und $45^\circ + \delta_3$ den Winkel, den die Stäbchen der Gattung IV und V resp. mit der *b*- und *c*-Axe einschliessen, so gelten die früheren Formeln (s. p. 999)

$$E_{IV} = (E_{IV}) - (E_{II} - E_{III})\delta_2, \quad E_V = (E_V) - (E_{III} - E_I)\delta_3;$$

hierin bezeichnen die in Klammern gestellten *E* die direct beobachteten Werthe.

Bei der Gattung IV gab die Messung, die an den Resten der Platten angestellt wurde, aus welchen die Stäbchen gesägt waren, $\delta_2 = -0,6^\circ$, bei der Gattung V $\delta_3 = +0,8^\circ$; die erlangte Genauigkeit von $0,1^\circ$ genügt für unseren Zweck. Berechnet man die dadurch bedingte Correction, so ergibt sich, dass zu den beiden beobachteten Werthen von *E* 0,08 additiv hinzuzufügen ist.

Die Orientirung der Stäbchen VI' fand sich merklich

richtig, wie zu begreifen ist, da bei der Orientirung eine Spaltungsrichtung massgebend war.

Die corrigirten Werthe der E sind hiernach:

$$E_I = (16,13 \pm 0,015) 10^{-8}, \quad E_{IV} = (26,58 \pm 0,020) 10^{-8},$$

$$E_{II} = (18,51 \pm 0,008) 10^{-8}, \quad E_V = (14,24 \pm 0,005) 10^{-8},$$

$$E_{III} = (10,42 \pm 0,010) 10^{-8}, \quad E_{VI} = (13,51 \pm 0,017) 10^{-8}.$$

Drillungen.

| | | | | | |
|----|--------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|--------------------|
| lb | Nr. 1. | $B = 5596,$ | $D = 873,6,$ | | |
| | | $L = 29,63,$ | $\sigma_{30} = 98,3,$ | $\delta T = -9000$ | $T = 2\ 825\ 000.$ |
| | | $L = 22,26,$ | $\sigma_{40} = 102,8,$ | $\delta T = -9000$ | $T = 2\ 829\ 000.$ |
| lb | Nr. 2. | $B = 5424,$ | $D = 878,5,$ | | |
| | | $L = 42,81,$ | $\sigma_{30} = 154,3,$ | $\delta T = -5000$ | $T = 2\ 823\ 000.$ |
| lb | Nr. 3. | $B = 5487,$ | $D = 870,0,$ | | |
| | | $L = 38,47,$ | $\sigma_{30} = 139,1,$ | $\delta T = -6000,$ | $T = 2\ 837\ 000.$ |
| | | $L = 30,91$ | $\sigma_{30} = 112,1,$ | $\delta T = -6000,$ | $T = 2\ 828\ 000.$ |
| lb | Nr. 4. | $B = 5612,$ | $D = 873,0,$ | | |
| | | $L = 46,50,$ | $\sigma_{30} = 187,6,$ | $\delta T = -5000,$ | $T = 2\ 826\ 000.$ |
| lb | Nr. 5. | $B = 5611,$ | $D = 871,0,$ | | |
| | | $L = 46,94,$ | $\sigma_{30} = 164,2,$ | $\delta T = -5000,$ | $T = 2\ 824\ 000.$ |
| | | Gesamtmittel | $T_{Ib} = 2\ 828\ 000,$ | $T_{Ib} = 35,36 \cdot 10^{-8}.$ | |
| | | Wahrscheinlicher Fehler | ± 1200 | $\pm 0,015.$ | |
| le | Nr. 1. | $B = 5705,$ | $D = 906,2,$ | | |
| | | $L = 38,12,$ | $\sigma_{30} = 127,5,$ | $\delta T = -8000$ | $T = 2\ 934\ 000.$ |
| le | Nr. 2. | $B = 5441,$ | $D = 905,8,$ | | |
| | | $L = 35,43,$ | $\sigma_{30} = 111,05,$ | $\delta T = -8000$ | $T = 2\ 919\ 000.$ |
| | | $L = 30,00,$ | $\sigma_{40} = 125,45,$ | $\delta T = -0$ | $T = 2\ 925\ 000.$ |
| le | Nr. 4. | $B = 3876,$ | $D = 908,6,$ | | |
| | | $L = 31,89,$ | $\sigma_{20} = 97,1,$ | $\delta T = -5000$ | $T = 2\ 936\ 000.$ |
| | | $L = 28,51,$ | $\sigma_{20} = 87,05,$ | $\delta T = -0,$ | $T = 2\ 932\ 000.$ |
| le | Nr. 5. | $B = 3925,$ | $D = 904,4,$ | | |
| | | $L = 26,44,$ | $\sigma_{40} = 80,75,$ | $\delta T = -6000$ | $T = 2\ 917\ 000.$ |
| | | $L = 19,42,$ | $\sigma_{30} = 59,10,$ | $\delta T = -6000,$ | $T = 2\ 927\ 000.$ |
| | | Gesamtmittel | $T_{Ic} = 2\ 927\ 000,$ | $T_{Ic} = 34,16 \cdot 10^{-8}.$ | |
| | | Wahrscheinlicher Fehler | ± 1900 | $\pm 0,022.$ | |

Die folgende Gattung (IIc) bot bei der Beobachtung grosse Schwierigkeiten. Einerseits erwies sie sich zerbrechlicher als irgend eine frühere, was damit zusammenhängen mag, dass die Hauptspaltungsrichtung normal zu den Breit-

seiten steht, die beiden anderen mit ihnen Winkel von nahe 40° bilden, aber keine von ihnen den Breitseiten parallel liegt. Ferner zeigte sie einen äusserst geringen Drillungswiderstand — nur etwa 0,4 der beiden vorhergehenden Gattungen —, sodass die Fehler, welche durch die aufgelegten Stanniolstreifen entstanden, sehr bedeutend wurden; trotzdem liess die grosse Zerbrechlichkeit nicht zu, die Belege dünner zu wählen, weil dann die Stäbchen durch den Druck der Spiegelklemmen noch mehr gefährdet gewesen wären. Endlich aber zeigten die verschiedenen Stäbe untereinander fast ganz constante Abweichungen in den Resultaten, die sich weder aus Verschiedenheiten in der Politur erklären lassen — denn die Biegungsbeobachtungen zeigen sie nicht —, noch aus Inhomogenitäten der Substanz —, denn das optische Verhalten war tadellos; überdies führte die Benutzung derselben Stäbchen in verschiedenen Längen auf merklich dieselben Resultate. Ein Grund für die Abweichungen war also nicht nachweisbar, und es blieb nichts anderes übrig, als von den weit über 2000 Ablesungen, die ich zur Bestimmung des einen Coëfficienten T_{IIc} angestellt habe, diejenigen Reihen zusammenzustellen, welche an den vier längsten Stäbchen gemacht waren, und die mit den kurzen Fragmenten erhaltenen zu unterdrücken, weil bei diesen, welche in Fassungen eingekittet beobachtet wurden, sich stets Kitt aus den Fassungen an den Stanniolbelegungen hinzog und den Drillungswiderstand vermehrte, wie dies durch die Beobachtung auch bestätigt wurde. Die Genauigkeit, welche die mitgetheilten Reihen geben, reicht nicht ganz an diejenige der früheren heran, doch würde eine weitere Wiederholung der Beobachtungen nur eine trügerische Verbesserung gegeben haben, da die constanten Differenzen zwischen den Resultaten der verschiedenen Stäbchen unerklärt bleiben.

| | | | | | |
|-----|--------|------------------------------|-------------------------|----------------------|--------------------|
| IIc | Nr. 1. | $B = 5630, \quad D = 743,5,$ | | | |
| | | $L = 29,90,$ | $\sigma_{10} = 123,25,$ | $\delta T = -9000,$ | $T = 1\ 216\ 000.$ |
| | | $L = 24,56,$ | $\sigma_{10} = 101,40,$ | $\sigma T' = -9000,$ | $T = 1\ 214\ 000.$ |
| | | | | | |
| IIc | Nr. 2. | $B = 5641, \quad D = 734,6,$ | | | |
| | | $L = 25,85,$ | $\sigma_{10} = 107,6,$ | $\delta T = -24000,$ | $T = 1\ 229\ 000.$ |
| | | $L = 23,95,$ | $\sigma_{10} = 101,9,$ | $\delta T = 0,$ | $T = 1\ 227\ 000.$ |
| | | | | | |

| | | | | | | |
|------|-------------------------|--------------------------|------------------------|----------------------------------|--------------------|--|
| IIc | Nr. 3. | $B = 3863,$ | $D = 741,5,$ | | | |
| | | $L = 23,92,$ | $\sigma_{10} = 149,1,$ | $\delta T = -9000,$ | $T = 1\,213\,000.$ | |
| IIIc | Nr. 4. | $B = 5618,$ | $D = 744,5,$ | | | |
| | | $L = 37,75,$ | $\sigma_{10} = 157,9,$ | $\delta T = -4000,$ | $T = 1\,210\,000.$ | |
| | | $L = 36,40,$ | $\sigma_{10} = 153,0,$ | $\delta T = -3000,$ | $T = 1\,206\,000.$ | |
| | | $L = 17,70,$ | $\sigma_{10} = 74,25,$ | $\delta T = -5000,$ | $T = 1\,206\,000.$ | |
| | Gesamtmittel | $T_{IIc} = 1\,215\,000,$ | | $T_{IIc} = 82,30 \cdot 10^{-9}.$ | | |
| | Wahrscheinlicher Fehler | ± 2000 | | $\pm 0,14.$ | | |

Die vorstehend mitgetheilten Beobachtungen benutzen die besten vorhandenen Gattungen Stäbchen; an sich wären auch die Gattungen IIa und IIIa zur Bestimmung der Constanten T zu benutzen gewesen, aber wegen ihrer geringeren Länge war auch für die Beobachtungen der Biegungen die Dicke kleiner gewählt, und hierdurch wurden die Drillungsbeobachtungen gefährlicher und ungenauer. Da übrigens die Constanten T_b und T_c sich oben bereits mit ausreichender Genauigkeit ergeben haben, T_{IIc} aber durch die noch vorhandenen übrigen Stäbchen sich nicht bestimmt, so theile ich auch die angestellten Beobachtungsreihen, welche nur zur Bestätigung des Gesetzes $T_{Ib} = T_{IIa}$ und $T_{Ic} = T_{IIIa}$ dienen könnten, nicht mit.

Resultate.

Für die Anwendung stellen wir das gefundene System Werthe noch einmal zusammen. Es war:

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} E_I = (16,13 \pm 0,015) \cdot 10^{-8}, \quad E_{IV} = (26,58 \pm 0,020) \cdot 10^{-8}, \\ E_{II} = (18,51 \pm 0,008) \cdot 10^{-8}, \quad E_V = (14,24 \pm 0,005) \cdot 10^{-8}, \\ E_{III} = (10,42 \pm 0,010) \cdot 10^{-8}, \quad E_{VI} = (13,51 \pm 0,017) \cdot 10^{-8}, \\ \quad T_{IIc} = T_{IIIb} = (82,30 \pm 0,140) \cdot 10^{-8}, \\ \quad T_{IIIa} = T_{Ic} = (34,16 \pm 0,022) \cdot 10^{-8}, \\ \quad T_{Ib} = T_{IIa} = (35,36 \pm 0,015) \cdot 10^{-8}. \end{array} \right.$$

Es ist für die Folgerungen unangenehm, dass die grösste von diesen Zahlen auch den relativ grössten wahrscheinlichen Fehler hat, indess liess sich dies, wie oben erörtert, nicht ändern.

Aus diesem System folgt die Reihe der s_{hk} folgendermassen:

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} s_{11} = (16,13 \pm 0,015) \cdot 10^{-8}, \quad s_{23} = -(2,46 \pm 0,075) \cdot 10^{-8}, \\ s_{22} = (18,57 \pm 0,008) \cdot 10^{-8}, \quad s_{31} = -(1,88 \pm 0,015) \cdot 10^{-8}, \\ s_{33} = (10,42 \pm 0,010) \cdot 10^{-8}, \quad s_{12} = -(8,80 \pm 0,021) \cdot 10^{-8}, \\ s_{44} = (82,30 \pm 0,140) \cdot 10^{-8}, \\ s_{55} = (34,16 \pm 0,022) \cdot 10^{-8}, \\ s_{66} = (35,36 \pm 0,015) \cdot 10^{-8}. \end{array} \right.$$

Die wahrscheinlichen Fehler sind wie auf p. 1002 berechnet.

Die erhaltenen Zahlen bestimmen nach Formel (5) den allgemeinen Werth des Dehnungscoëfficienten; wir erhalten:

$$(34) \quad E = 1/E = [16,13 \cdot \alpha^4 + 18,51 \cdot \beta^4 + 10,42 \cdot \gamma^4 + 2(38,79 \cdot \beta^2 \gamma^2 + 15,21 \cdot \gamma^2 \alpha^2 + 8,88 \cdot \alpha^2 \beta^2)] 10^{-8}.$$

Maxima und Minima liegen in den Hauptebenen an folgenden Stellen und haben folgende Werthe:

$$\begin{aligned} \text{I. } bc\text{-Ebene,} \quad & <L, a = \frac{\pi}{2} \\ & <L, b = 0, \quad E_{II} = 18,51 \cdot 10^{-8}, \\ & <L, b = 40^\circ 12', \quad (E_{IV}) = 26,93 \cdot 10^{-8}, \\ & <L, b = 90^\circ, \quad E_{III} = 10,42 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } ca\text{-Ebene,} \quad & <L, b = \frac{\pi}{2} \\ & <L, c = 0, \quad E_{III} = 10,42 \cdot 10^{-8}, \\ & <L, c = 90^\circ, \quad E_I = 16,13 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III. } ab\text{-Ebene,} \quad & <L, c = \frac{\pi}{2} \\ & <L, a = 0, \quad E_I = 16,13 \cdot 10^{-8}, \\ & <L, a = 40^\circ 57', \quad (E_{VI}) = 10,84 \cdot 10^{-8}, \\ & <L, a = 90^\circ, \quad E_{II} = 18,51 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Es bietet hiernach der Baryt ein interessantes Beispiel, insofern E in jeder Hauptebene sich anders verhält; in der *bc*-Ebene erreicht es zwischen den Hauptaxen ein Maximum, in der *ab*-Ebene ein Minimum, in der *ca*-Ebene keines von beiden.

Ausser diesen nimmt E noch ein relatives Maximum ausser den Hauptebenen an für:

$$<L, a = 30^\circ 44', \quad <L, b = 76^\circ 21', \quad <L, c = 63^\circ 3'$$

sein Werth beträgt:

$$(E) = 15,54 \cdot 10^{-8}.$$

Absolute Maxima und Minima stellen die Werthe:

$$E_{III} = 10,42 \cdot 10^{-8} \text{ und } (E_{IV}) = 26,93 \cdot 10^{-8}$$

dar; die Differenz zwischen ihnen ist ganz ausserordentlich und ähnlich noch bei keiner krystallinischen Substanz, ausser etwa bei Kalkspath, erhalten.

Die Aenderung von E mit der Richtung im Baryt wird durch die Fig. 6 (Taf. VIII) anschaulich gemacht, welche die drei Hauptschnitte der Oberfläche (34) darstellt. Die Grösse der Längsdehnung oder Biegung eines Cylinders von constanten Dimensionen ist bei wechselnder Orientirung seiner Axe mit E proportional.

Das allgemeine Gesetz des Drillungscoefficienten T lautet nach dem System (33) und der Formel (9):

$$(35) \quad T = 1/T = [4(16,13 \cdot \alpha^2 \alpha_1^2 + 18,51 \cdot \beta^2 \beta_1^2 + 10,42 \cdot \gamma^2 \gamma_1^2) + 2(72,46 \cdot \beta \beta_1 \gamma \gamma_1 + 26,64 \cdot \gamma \gamma_1 \alpha \alpha_1 + 0,16 \cdot \alpha \alpha_1 \beta \beta_1) + 82,30(\beta^2 \gamma_1^2 + \gamma^2 \beta_1^2) + 34,16(\gamma^2 \alpha_1^2 + \alpha^2 \gamma_1^2) + 35,36(\alpha^2 \beta_1^2 + \beta^2 \alpha_1^2)] \cdot 10^{-8}.$$

Bemerkenswerth ist die ausserordentliche Verschiedenheit der drei Coefficienten der zweiten Reihe.

Einfacher ist der Werth des Drillungscoefficienten eines Kreiscylinders, welcher lautet:

$$(36) \quad T' = [69,52 \cdot \alpha^2 + 117,66 \cdot \beta^2 + 116,46 \cdot \gamma^2 + 4(-48,45 \cdot \beta^2 \gamma^2 - 3,85 \cdot \gamma^2 \alpha^2 + 11,17 \cdot \alpha^2 \beta^2)] \cdot 10^{-8},$$

oder auch:

$$= (69,52 \cdot \alpha^4 + 117,66 \cdot \beta^4 + 116,46 \gamma^4 + 2(20,16 \cdot \beta^2 \gamma^2 + 85,29 \cdot \gamma^2 \alpha^2 + 127,35 \cdot \alpha^2 \beta^2)] \cdot 10^{-8}.$$

Maxima und Minima liegen in den Hauptschnitten und haben folgende Lagen und Werthe:

$$\text{I. } bc\text{-Ebene, } < L, a = \frac{\pi}{2},$$

$$< L, b = 0, \quad T'_{II} = 117,7 \cdot 10^{-8},$$

$$< L, b = 45^\circ, \quad (T'_{IV}) = 68,61 \cdot 10^{-8},$$

$$< L, b = 90^\circ, \quad T'_{III} = 116,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$\text{II. } ca\text{-Ebene, } < L, b = \frac{\pi}{2},$$

$$< L, c = 0, \quad T'_{III} = 116,5 \cdot 10^{-8},$$

$$< L, c = 90^\circ \quad T'_I = 69,5 \cdot 10^{-8}.$$

III. ab -Ebene, $< L, c = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} < L, a = 0, & \quad T'_{II} = 69,5 \cdot 10^{-8}, \\ < L, a = 67,44', & \quad (T'_{VI}) = 119,1 \cdot 10^{-8}, \\ < L, a = 90^\circ, & \quad T'_{II} = 117,7 \cdot 10^{-8}. \end{aligned}$$

Ausserdem findet ein relatives Maximum statt in einer Richtung, die gegeben ist durch:

$$< L, a = 47^\circ 56', \quad < L, b = 65^\circ 19', \quad < L, c = 52^\circ 8';$$

seine Grösse beträgt: $T' = 85,54 \cdot 10^{-8}$.

Die Abhängigkeit der Grösse T' von der Richtung der Axe des Kreiscylinders wird durch Fig. 8 verdeutlicht, welche die Hauptschnitte der Oberfläche (36) darstellt. Die Grösse der Drillung eines Kreiscylinders ist bei constanten Dimensionen mit T' proportional.

Die Coëfficienten der linearen Dilatation bei allseitig gleichem Druck ergeben sich aus den Formeln (16) in Rücksicht auf das System (33):

$$(37) \quad A_a = 5,45 \cdot 10^{-8}, \quad A_b = 7,25 \cdot 10^{-8}, \quad A_c = 6,08 \cdot 10^{-8},$$

ebenso der Coëfficient der cubischen Dilatation:

$$M = 18,78 \cdot 10^{-8},$$

also ausserordentlich viel grösser als bei Topas. Von den Coëfficienten A hängen auch die durch allseitigen Druck auftretenden Winkeländerungen ab.

Es erübrigt noch die Berechnung der Elasticitätsconstanten c_{hk} aus den in (33) angegebenen s_{hk} gemäss den Formeln (4). Man erhält:

$$(31) \quad \begin{cases} c_{11} = 9,07 \cdot 10^6, & c_{22} = 8,00 \cdot 10^6, & c_{33} = 10,74 \cdot 10^6, \\ c_{44} = 1,22 \cdot 10^6, & c_{55} = 2,93 \cdot 10^6, & c_{66} = 2,83 \cdot 10^6, \\ c_{23} = 2,73 \cdot 10^6, & c_{31} = 2,75 \cdot 10^6, & c_{12} = 4,68 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Die Poisson'schen Relationen (15):

$$c_{44} = c_{33}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12},$$

finden sich auch bei Baryt sehr wenig bestätigt; man wird also seinen Moleculen eine merkliche Polarität beilegen müssen.

A n h a n g.

Während die Schwierigkeiten der Drillungsbeobachtungen andere Bearbeiter von dem Problem der Bestimmung aller Elasticitätsconstanten bisher fern gehalten haben, sind Biegungswiderstände in nicht geringer Zahl gemessen worden, und es steht zu erwarten, dass noch weitere Arbeiten der Art folgen werden. In Rücksicht hierauf halte ich mich für verpflichtet, einige Bedenken über die zumeist angewandte Methode hier auszusprechen, auf die mich die Wahrnehmung der theilweise bedeutenden Differenzen, die andere Beobachter derselben Materialien gegenüber meinen Zahlen erhalten haben, geführt hat.

Die Beobachtungen sind fast ausnahmslos mit dem sinnreichen Warburg-Koch'schen Apparat ausgeführt, von dessen Benutzung mich nur der Zustand meiner Augen, die mikroskopische Ablesungen nur kurze Zeit leisten können, abgehalten hat. In Bezug auf seine Anwendung ist mir Folgendes aufgefallen.

Die von Hrn. Warburg aufgestellte Formel für die Biegung ist nur eine angenäherte, nicht so sehr wegen des von Hrn. Koch erwähnten Umstandes, dass sie eine bestimmte Vertheilung der biegenden Kräfte auf die Querschnitte voraussetzt, sondern besonders, weil sie gerade in Bezug auf die am meisten gespannten mittleren Stabelemente Voraussetzungen benutzt, die in Wirklichkeit nicht erfüllt sind.

Hr. Koch bezieht sich bei der Reproduction der Ableitung auf das Lehrbuch der Elasticitätstheorie von Clebsch. Auf p. 105 stehen dort die Werthe der Verschiebungen u , v , w parallel der Dicke, Breite und Länge des Prismas, wenn die Kraft A wirkt, in folgender Form:

$$u = \frac{A}{E q \lambda^2} \left[\mu \frac{x^2 - y^2}{2} (l - z) + \frac{z^2 l}{2} - \frac{z^3}{6} + z \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 \right],$$

$$v = \frac{A}{E q \lambda^2} \mu x y (l - z),$$

$$w = \frac{A}{E q \lambda^2} \left[-l x z + \frac{z^2}{2} + B_1 - x \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 \right].$$

Hierin bezeichnet q die Fläche des Querschnitts, λ den Trägheitsradius desselben um die Y -Axe, μ ist das Verhält-

niss von Quercontraction und Längsdilatation. B_1 ist eine Function von x und y , welche von der Form des Querschnittes abhängt.

Von diesen Formeln ist die letzte durch ein Versehen unrichtig, welches sich durch mehrere Abschnitte des Buches hinzieht¹⁾; wie die Formeln (72) auf p. 72 zeigen, fehlt in der

1) Ich benutze diese Gelegenheit, um auf einen anderen Fehler aufmerksam zu machen, der in diesem vorzüglichen Buch stehen geblieben ist und sich mehr versteckt, dabei aber grösseren Einfluss besitzt.

In § 24 werden die Functionen untersucht, auf welche das De St. Venant'sche Problem führt. Die Function Ω , welche durch die Gleichung (66)

$$\Delta \Omega = 0$$

und einen gewissen Werth für $\partial \Omega / \partial n$ in Gleichung (67) definiert ist, wird zerlegt in:

$$\Omega = bB + b_0 B_0 + b_1 B_1 + b_2 B_2,$$

und, indem jedes dieser Glieder für sich behandelt wird, erwiesen, dass die Function B unmöglich, die Constante b also nothwendig gleich Null sein muss.

Indessen ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass die vier Constanten b voneinander unabhängig sind, also beliebig gleich Null genommen werden können. Und dies ist nicht zulässig.

Wendet man aber das p. 83 auf die B angewandte Verfahren auf das ganze Ω an, so gelangt man zu folgendem Resultat

Aus $\Delta \Omega = 0$ folgt bekanntlich das Randintegral:

$$\int ds \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \int ds \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \cos(n, y) \right) = 0.$$

Nun ist $\partial \Omega / \partial n$ gegeben in der Form:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = X \cos(n, x) + Y \cos(n, y).$$

$$\text{Setzt man: } X = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{oder also: } \Delta \varphi = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \Delta \psi = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\text{so berechnet sich: } \int ds \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \int ds \Delta \varphi + \int ds \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Dies letztere Glied über die geschlossene Randcurve integrirt verschwindet, und es bleibt sonach:

$$\int ds \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \int ds \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) = 0.$$

Setzt man aus der Gleichung (67) die Werthe für X und Y ein, so lässt sich das Flächenintegral berechnen, man erhält:

$$b + b_1 \xi + b_2 \eta = 0,$$

Klammer das Glied $-xy^2$ und muss $z^2/2$ der Factor x haben, es ist richtig:

$$w = \frac{A}{Eq\lambda^2} \left[-xz \left(l - \frac{z}{2} \right) - xy^2 + B_1 - x \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 \right].$$

Dieser Werth steht aber mit dem thatsächlichen Verhalten des durch Belastung in der Mitte gebogenen Stabes im mittelsten Querschnitt im Widerspruch. Während in Wahrheit dort für alle Elemente des Querschnittes die Verschiebung w gleich Null ist, giebt die obige Formel auf $z=0$ angewandt:

$$w = \frac{A}{Eq\lambda^2} \left[-xy^2 + B_1 - x \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right)_0 \right];$$

daraus folgt, dass auch die Spannungen gerade in diesen am meisten in Anspruch genommenen Querschnitten in Wirklichkeit andere sind, als sie die aus den obigen Gleichungen abgeleitete Biegungsformel voraussetzt. Der Fehler, der hierbei gemacht ist, dürfte schwer zu beurtheilen sein, denn mit der richtigen Nebenbedingung

$$\text{für: } z=0, \quad w=0,$$

ist die ganze De St. Venant'sche Methode gar nicht anwendbar; — aber soviel ist klar, dass er mit abnehmendem Verhältniss der Länge zur Dicke sehr wachsen muss, und es scheint mir sehr wahrscheinlich, dass er bei Beobachtungen, wo die Länge ca. 12 mm, die Dicke ca. 1 mm beträgt, nicht zu vernachlässigen ist; — ja ich glaube, dass die Anwendung des Warburg'schen Correctionsgliedes trügerisch ist, und in allen Fällen, wo dieses merklich wird, auch der erwähnte Fehler sich geltend macht. In der That bemerkt Hr. Koch¹⁾, dass die Warburg'sche Formel seine Beobachtungen an kurzen und langen Stäbchen nicht vollständig zur Uebereinstimmung bringt.

falls ξ und η die Schwerpunktscoordinaten des Querschnitts bezeichnen. Die Clebsch'sche Folgerung $b=0$ ist also nur richtig, wenn der Schwerpunkt des Querschnitts der als Befestigungspunkt definirte Coordinatenanfang ist. Diese Annahme ist aber nicht gemacht, sie wird erst viel später p. 96 zur Vereinfachung der Resultate in speciellen Fällen eingeführt.

1) Koch, Wied. Ann. 5. p. 264. 1878.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

Daher habe ich von jeher mit der Länge auch die Dicke der Stäbchen abnehmen lassen, bei 20 mm Länge sind die benutzten Dicken schon nur ca. 0,5 mm. Dies zur Anwendung der Theorie auf die Beobachtungen.

Zu diesen selbst möchte ich auf die Bemerkung verweisen, die Hr. Koch in Bezug auf die Eindrückung von Stäbchen und Lagerschneiden macht¹⁾; es scheint mir hier nach nicht zulässig bei der Anwendung kurzer Stäbe mit geringer Durchbiegung, wo der bezügliche Einfluss sehr gross wird, für die Eindrückung einen Werth zu benutzen, der an einem anderen als dem beobachteten Material erhalten ist. Ja, nach den im Vorstehenden niedergelegten Erfahrungen halte ich es sogar für erwünscht, die Bestimmung der Eindrückung in jenen Fällen an jedem Stäbchen durch Anwendung desselben in zwei verschiedenen Längen vorzunehmen; sowohl die Gestalt als die Politur der Breitseite, auf welcher das Stäbchen aufliegt, ist von Einfluss auf jene Grösse.

Was die von Hrn. Niedmann²⁾ durch Beobachtung an Stäben von Baryt erhaltenen Biegungswiderstände angeht, die mir, nachdem vorstehende Beobachtungen im wesentlichen vollendet waren, durch die freundliche Zusendung der Arbeit durch den Verfasser bekannt wurden, so liefert eine Vergleichung seiner Zahlen mit der meinigen folgendes Bild:

| | N. | V. |
|-----------|------|-------|
| E_I | 6,50 | 6,20 |
| E_{II} | 5,41 | 5,40 |
| E_{III} | 8,49 | 9,60. |

Der erste Werth stimmt leidlich, der zweite durchaus, der dritte weicht völlig ab. Hr. Niedmann hat für die erste und letzte Bestimmung ein, für die mittlere zwei Stäbchen benutzt. Ob sein Material von dem meinigen abweichende chemische Zusammensetzung hat, und diese überhaupt eine solche Abweichung erklärt, weiss ich nicht. Dagegen ist mir zweierlei bemerkenswerth erschienen.

Erstens liegt normal zur Längsaxe der Stäbchen, die E_{III}

1) Koch, Wied. Ann. 18. p. 337. 1880.

2) H. Niedmann, Z. f. Kryst. u. Min. 13. p. 362. 1887.

bestimmen, die Hauptsplaltungsrichtung, — es ist also hier am wahrscheinlichsten, dass Sprünge das Resultat beeinflussen und E verkleinern.

Zweitens ist das aus den Beobachtungen von Kreisscheiben erhaltene Verhältniss der Biegungswiderstände $E_{III} : E_I$ und $E_{III} : E_{II}$ so nahe gleich dem aus der Beobachtung an Stäbchen erhaltenen gefunden, dass es Bedenken erregen muss; denn es ist von vorn herein klar, dass bei der Biegung einer Kreisplatte, die im Centrum belastet ist und auf zwei parallelen Sehnen aufliegt, die je nach der Lage dieser Sehnen erhaltenen Unterschiede viel geringer ausfallen müssen, als bei normal zu diesen Sehnen orientirten Stäben. Ich möchte demgemäss die Uebereinstimmung einer Störung der Beobachtung an den Stäbchen zuschreiben.

Die durch Beobachtungen an den Kreisscheiben erhaltenen Maxima und Minima der Biegungswiderstände fallen ziemlich genau in diejenigen Richtungen, welche die strenge Methode der Beobachtung an Stäbchen ergeben hat.

Hr. Niedmann findet in der bc -Ebene, ausser den Minimis in den Hauptaxen, ein Maximum in der Richtung 38° gegen die b -Axe, ich in der Richtung $40^\circ 12'$ — in der ab -Ebene, ausser den Maximis in den Hauptaxen, ein Minimum in der Richtung $39,5^\circ$ gegen die a -Axe, ich in der Richtung $40^\circ 57'$ —, endlich in der ac -Ebene kein Maximum oder Minimum ausserhalb der Hauptaxen, ich desgleichen. Hierin bewährt sich also die Methode der Beobachtung an Kreisscheiben, die sich wegen des geringen Materialverbrauchs empfiehlt, ganz entschieden. Richtige Verhältnisse der Biegungswiderstände oder gar brauchbare absolute Werthe kann sie in der bisherigen Form nicht liefern. Setzt man, um Verhältnisszahlen zu vergleichen, $E_{III} = 1$, so erhält man für sämtliche Maxima und Minima folgendes Tableau.

| | | N. | V. |
|------------------|------------|------|------|
| I. bc -Ebene: | E_{II} | 1,54 | 1,78 |
| | (E_{IV}) | 1,79 | 2,59 |
| | E_{III} | 1,00 | 1,00 |
| II. ca -Ebene: | E_{III} | 1,00 | 1,00 |
| | E_I | 1,32 | 1,55 |
| | | | 65° |

| | | |
|------------------------------|------|-------|
| III. <i>ab</i> -Ebene: E_I | 1,35 | 1,55 |
| (E_{VI}) | 1,25 | 1,04 |
| E_{II} | 1,54 | 1,78. |

Der letzte Werth E_{II} ist in Hrn. Niedmann's Tafel aus der Beobachtung in der *bc*-Ebene herübergenommen. Berücksichtigt man dies, so bemerkt man, dass, wie von vorn herein zu erwarten, die Beobachtungen mit den Kreisscheiben alle Unterschiede der Grössen E bedeutend verringert erscheinen lassen. Denn dass diese enormen Unterschiede sich auch nur zum Theil durch das verschiedene Material erklären, halte ich bei einer Substanz wie Baryt für ausgeschlossen.

XVII. *Tonstärkemessung; von Ernst Grimsehl.*

(Programmabhandlung des Realgymnasiums zu Hamburg 1888, für die Annalen bearbeitet vom Hrn. Verf.)

(Hierzu Taf. VIII Fig. 9—15.)

Die Bestimmung der Stärke eines Schalles oder eines Tones bietet bisher noch grosse Schwierigkeiten, da es an passenden Instrumenten für die Tonstärkemessung fehlt. Die Vierordt'schen Arbeiten auf diesem Gebiete gründen sich alle auf eine directe Vergleichung von Schallen. Nach seinem Vorbilde haben später auch andere Physiker Messungen gemacht. Die Oberbeck'schen Versuche gehen von der That-
sache aus, dass die Aenderungen des mittleren Widerstandes in einem Mikrophon von der Stärke des auf das Mikrophon wirkenden Tones abhängen und demnach aus der Widerstandsänderung auf die Tonstärke ein Schluss gemacht werden kann. Bisher sind die mechanischen Wirkungen eines Tones noch nicht zu Intensitätsmessungen benutzt, obwohl besonders von Dvořák eine Reihe von Apparaten angegeben ist, welche die mechanischen Wirkungen eines Tones zeigen; auch findet sich in einer seiner Abhandlungen die Bemerkung, dass sich diese Wirkungen wohl zur Construction eines Phonometers eignen würden, aber ausgeführt ist keine Construction. Die

einfachste mechanische Wirkung eines Tones ist die, dass ein Blättchen, in einer tönenden Luftsäule drehbar aufgehängt, das Bestreben zeigt, sich senkrecht gegen die Axe der Luftsäule zu stellen. Diese Erscheinung ist zuerst von Lord Rayleigh beobachtet.

Die directe Vergleichung zweier Töne oder Schalle durch das Ohr hat den Nachtheil, dass die subjectiven Eigenthümlichkeiten des Ohres des Beobachters eine zu grosse Rolle spielen und die Resultate der Beobachtungen in einer empfindlichen Weise beeinflussen können. Die Veränderung des Widerstandes eines Mikrophons hängt zwar von der Amplitude der Schwingungen also auch von der Stärke des Tones ab, aber die Widerstandsänderungen, welche durch nicht akustische Einflüsse, beispielsweise durch geringe Erschütterungen, hervorgerufen werden, sind oft grösser als die Aenderungen, welche der Ton hervorruft. Daher sind die Resultate oft unzuverlässig.

Die mechanischen Einwirkungen eines Tones lassen sich hingegen zur Construction eines Phonometers benutzen, welches nur den akustischen Einflüssen ausgesetzt ist. Die oben erwähnte, von Lord Rayleigh zuerst beobachtete Erscheinung führte mich zur Construction eines Phonometers, welches zu Tonintensitätsmessungen in vorzüglicher Weise geeignet ist. Im Folgenden soll dasselbe in der Form beschrieben werden, welche dasselbe jetzt angenommen hat, nachdem andere Formen sich als weniger geeignet erwiesen. Figur 9 ist eine perspectivische Ansicht des Phonometers. In ein drittel natürlicher Grösser ist Fig. 11 eine Durchschnittszeichnung des mittleren Theiles desselben. Die Figur zeigt folgendes: Auf einem mit Stellschrauben versehenen Dreifuss ist eine cylindrische Axe befestigt. Auf dieser Axe befindet sich eine Messinghülse *A*, welche auf der Axe drehbar ist und durch eine Schraube festgestellt werden kann. Der obere Theil der Hülse trägt ein Gehäuse *C*, welches zur Aufnahme eines mit Glycerin gefüllten Gefässes *D* dient. Auf das Gehäuse *C* ist durch ein kurzes Zwischenstück eine cylindrische Hülse *F* befestigt. Oberhalb derselben ist der Teller *G* angebracht, in dessen Versenkung drehbar das Spiegelgehäuse *H* und die Suspensionsröhre *I* mittelst der Schrauben *K* festgehalten

werden. Das obere Ende der Suspensionsröhre trägt den Torsionskopf. In demselben ist die eigentliche Suspension befestigt. Die Hülse *F* besteht aus zwei Theilen, welche durch ein Charnier mit einander verbunden sind und durch eine Schraube zusammengehalten werden. Die beiden Theile der Hülse stossen in einer Ebene zusammen, welche genau durch die Axe der Suspensionsröhre geht. An der oberen und unteren Seite befindet sich eine kleine Durchbohrung, welche nahezu von der Fahne, die hier hindurchgeht, verschlossen wird. Der in der Figur linke Theil der Hülse *F* nimmt ein cylindrisches Rohr *P* von 30 mm Durchmesser auf, dasselbe wird an dem anderen Ende durch das Rohr *Q*, welches sich an dem oberen Ende eines seitlichen Armes *E* befindet, gehalten. In dem Rohre *P* ist ein Stempel *R* angebracht, welcher an der Triebstange *S* befestigt ist. Diese Triebstange wird durch den Trieb *T* bewegt. Der rechte Theil der Hülse *F* nimmt ebenfalls ein cylindrisches Rohr *V* auf. Letzteres kann durch eine dünne Kautschukmembran an dem äusseren Ende verschlossen werden. Die Triebstange ist mit einer Millimeterscala versehen, welche angibt, wie weit der vordere Theil des Stempels *R* von der Axe der Suspensionsröhre entfernt ist. Der untere Theil des Spiegelgehäuses und der Torsionskopf hat eine Eintheilung in Grade.

An der Suspension ist durch Coconfäden die Fahne bifilar aufgehängt. Dieselbe besteht aus einem Stahldraht, welcher an dem oberen Ende mit einem Haken versehen ist. 45 mm unterhalb des Hakens ist ein Spiegel *a* angebracht, 70 mm tiefer ist eine rechteckige Messinghülse *b*, deren vordere Fläche entfernt werden kann, um ein dünnes Blättchen *c* aufzunehmen, diese Fläche wird alsdann mit einer kleinen Schraube wieder festgeschraubt. An dem unteren Ende des Drahtes sind zwei kleine Querstäbe *d* angebracht, welche in das Glycerin des Gefässes *D* tauchen und als Dämpfer wirken.

Soll das Phonometer benutzt werden, so hat man darauf zu achten, dass die Fahne absolut centrisch hängt. Die Controle hierfür ist leicht, wenn man die Hülse *F* auseinander klappt. Durch Verstellen der Schrauben am Dreifuss lässt sich die centrische Aufhängung leicht erreichen.

Wenn man nun das Blättchen, welches bei meinen Versuchen aus Glimmer bestand, so aufhängt, dass dasselbe mit der Axe des Rohres einen Winkel einschliesst, und in der Nähe des Phonometers einen Ton erzeugt, auf welchen auch das Rohr des Phonometers abgestimmt ist, so hat das Blättchen das Bestreben, sich senkrecht gegen die Axe des Rohres zu stellen, und zwar um so mehr, je stärker der erzeugte Ton ist.

Der Beobachtungsraum war das Sammlungszimmer des physikalischen Cabinets des Realgymnasiums in Hamburg. Zu einigen Beobachtungen wurde die Aula des Realgymnasiums benutzt.

Als Tonerzeuger wurde bei allen Versuchen eine offene Lippenpfeife verwandt. Die Schwingungszahl wurde durch ein Bleiplättchen, welches mehr oder weniger die Oeffnung der Pfeife verschloss, auf dieser Höhe gehalten. Der möglichst volle Ton konnte dadurch erzielt werden, dass die Lippe der Pfeife verstellbar war. Der Luftstrom wurde von einem Appunn'schen Blasetische aus durch einen längeren Gummischlauch zur Pfeife geleitet und trat senkrecht zur Axe der Pfeife ein. In der Verlängerung der Axe nach unten war ein offenes Wassermanometer angebracht, um den Druck der Luft ablesen zu können. Der Luftzutritt und der Luftdruck wurden regulirt dadurch, dass der Blasebalg verschieden belastet wurde, und dadurch, dass die Luftaustrittsöffnung des Blasebalges verschieden weit geöffnet wurde; kleinere Regulirung endlich durch eine Schlauchklemme, welche in der Nähe des Blasetisches auf den Schlauch aufgesetzt war.

Bei den Versuchsreihen wurden theils das Phonometer, theils die Pfeife verschoben und somit ihre gegenseitige Entfernung variirt. Die angegebenen Entfernungen sind stets gemessen von der Mundöffnung der Pfeife bis zur Axe des Phonometers. Der Spiegelöffnung des Phonometers gegenüber war in einer Entfernung von 270 mm, resp. 540 mm eine Millimeterscala aufgestellt, auf welche das Bild des unterhalb der Scala befindlichen erleuchteten Spaltes fiel. An der Bewegung dieses Spaltbildes wurde der Ausschlag des Blättchens gemessen. Unter „Ausschlag“ ist stets die Verschiebung dieses Bildes auf der Scala in Millimetern verstanden.

Das Beobachtungsverfahren bestand in Folgendem: Es

wurde vor Beginn einer Beobachtungsreihe die Tonhöhe auf die Schwingungszahl 412 gebracht und gleichzeitig der Luftzutritt so regulirt, dass das Manometer einen bestimmten Luftdruck anzeigte. Darauf wurde der Stempel in dem Phonometerrohr so lange verschoben, bis das Maximum des Ausschlages erzielt war. Dann wurde die Pfeife in einer Entfernung von dem Phonometer aufgestellt, welche der Anfangsentfernung in der Beobachtungsreihe entsprach, und nochmals constatirt, ob keine Veränderung der Tonhöhe eingetreten war, wie überhaupt in der Regel nach fünf Beobachtungen jedesmal Tonhöhe und Druck der zuströmenden Luft untersucht, event. regulirt wurden. Auf ein gegebenes Zeichen wurde dann der Blasebalg getreten und so lange in Thätigkeit gehalten, bis der Ausschlag vollkommen constant blieb; es geschah dieses fast sofort, da die Ausschläge fast völlig aperiodisch waren. Dann wurde abgelesen und darauf die Luft abgelassen. Nachdem das Blättchen wieder in die frühere Lage zurückgekehrt war, wurde der Versuch unter denselben Bedingungen wiederholt, und so geschah es auf jede Entfernung fünfmal.

Die Resultate der Beobachtungen sind zur Construction von Curven benutzt, welche auf Tafel VIII abgedruckt sind. Figur 12 gibt die Grösse der Ausschläge an, welche das Bild des Spaltes auf der Millimeterscala machte, wenn die Pfeife in geringer Entfernung vom Phonometer stand. Die Pfeife wurde nur sehr schwach angeblasen, das Manometer zeigte einen Luftdruck von 8 mm Wassersäule. Die Scala hatte von dem Spiegel die Entfernung 540 mm, Schwingungszahl des Tones war 412. Bei der construirten Curve gibt die horizontale Axe die Entfernung in Centimetern, die verticale Axe die Ausschläge in Millimetern an. Die Ausschläge bei geringeren Entfernungen als 3 cm waren zu unregelmässig und gross, als dass sie gemessen werden konnten, während über 60 cm hinaus die Ausschläge kaum mehr bemerkbar waren. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass in geringen Entfernungen die Intensitäten rasch abnehmen, in grösseren Entfernungen langsamer abnehmen und sich asymptotisch dem Nullpunkte zu nähern scheinen.

Für grössere Entfernungen der Pfeife vom Phonometer musste die Intensität vergrössert werden dadurch, dass der anblasende Luftstrom unter grösserem Drucke eintrat, und zwar war bei den Curven, welche in Fig. 13 abgebildet sind, der Luftdruck 25 mm Wassersäule, die Scala war nur 270 mm vom Spiegel entfernt. Die beiden Curven in Fig. 13 zeigen eine eigenthümliche Schwankung der Intensität, wenn die Entfernung von Pfeife und Phonometer verändert wurde. Offenbar liegt der Grund der Schwankungen in den Reflexionen des Tones an den Wänden des Beobachtungsraumes. Inwieweit scheinbar geringe Einflüsse eine Rolle spielen, zeigt sich durch Vergleichen der Figuren 13_A und 13_B. Die Curve 13_A gibt die Intensitätsveränderung an, wenn in dem Beobachtungsraume die Rouleaux geöffnet waren, während 13_B dieselbe Vertheilung bei geschlossenen Rouleaux zeigt. Die Lage der Maximal- und Minimalpunkte ist bedeutend verschoben und verändert. In der ersten Curve zeigt sich bei 70 cm eine geringe Ausbauchung, welche in der zweiten Curve als ein starkes Maximum hervortritt. Die übrigen Maxima und Minima sind in beiden Curven vorhanden, liegen aber an etwas verschiedenen Stellen und sind auch an Grösse verschieden.

Die Curve, Fig. 14, soll die Abhängigkeit der Tonintensität der Pfeife von dem Drucke des anblasenden Luftstromes angeben. Die horizontale Axe der Curve stellt den Druck der Luft in Millimetern, die verticale Axe den Ausschlag dar. Scala und Spiegel waren 270 mm voneinander entfernt.

Die Pfeife stand 50 cm vom Phonometer entfernt. Der Druck der zuströmenden Luft wurde regulirt durch die Schlauchklemme am Zuleitungsrohr, durch die Ausströmungsöffnung am Blasetisch und für grössere Drucke vergrössert durch Aufsetzen von Gewichten auf den Blasebalg des Blasetisches. Für jeden Druck wurden wiederum fünf Ablesungen gemacht. Es wurde mit dem niedrigsten zulässigen Drucke angefangen und der Druck bis zum höchsten allmählich gesteigert, darauf wieder bis zum niedrigsten allmählich verringert. Bei jedem Druck wurde erst wieder die Tonhöhe auf $n = 412$ gebracht und die Lippe der Pfeife so gestellt,

dass der Ton möglichst rein war. Die Drucke wurden abgelesen an dem unter der Pfeife befindlichen Manometer.

Bei einem Drucke von 3 mm war ein Ton der Pfeife wahrnehmbar, bei einem Drucke von 25 mm war die grösste Intensität vorhanden, bei einem Drucke von 60 mm ging der Ton in ein allgemeines Tongeschwirr mit vielen Obertönen gemischt über.

Bemerkenswerth an der Intensitätscurve ist, dass erst ein allmähliches Stärkerwerden stattfindet, dass dann sehr rasch die Intensität zunimmt, sich dann eine kleine Zeit fast völlig auf dieser Höhe hält, um fast plötzlich zu einer geringen Intensität herabzusinken. Von diesem Punkte an nimmt dann die Intensität allmählich bis zum völligen Verschwinden ab. Wurde der Druck noch weiter über 60 mm gesteigert, so folgten sehr bald Obertöne, die wiederum Ausschläge am Phonometer bewirkten, jedoch waren dieselben von der grössten Unregelmässigkeit.

Es wären hiermit die beabsichtigten Versuche abgeschlossen, wenn man wüsste, wie die Berechnung der Intensität aus den Ausschlägen vorzunehmen wäre.

Diese Abhängigkeit in einer bestimmten Formel zusammen zu fassen, ist mir bis jetzt nicht gelungen. Daher wandte ich mich der praktischen Lösung dieser Frage zu.

Der leitende Gedanke war der, dass man annehmen könnte: Wenn die Intensität einer Pfeife gleich „Eins“ gesetzt wird, so müsse für die Intensität zweier gleichen Pfeifen, welche völlig unabhängig voneinander sind, die Intensität „Zwei“ zu setzen sein. Man hätte es dann vollständig in der Hand, beliebige Intensitäten herzustellen und könnte, wenigstens auf empirischem Wege eine gesetzmässige Abhängigkeit constataren.

Diese Annahme erwies sich bald als völlig unrichtig.

Um eine Unabhängigkeit der Pfeifen zu erreichen, blies ich jede Pfeife durch einen besonderen Blasebalg an und stellte die Pfeifen nebeneinander. Es zeigte sich nun, dass jedesmal beim Anblasen einer Pfeife ein stärkerer Ton gehört wurde, als beim gleichzeitigen Anblasen beider Pfeifen; dass also der Ton der Doppelpfeife viel schwächer war und zugleich von Obertönen stark vermischt.

Genau wie das Ohr eine Schwächung des Tones beim Zusammentönen beider Pfeifen zeigte, so auch das Phonometer. Diese Schwächung des Tones fand jedoch nur in dem hohen Maasse statt, wenn die beiden Pfeifen unmittelbar neben einander standen, während bei gewissen Entfernungen Verstärkungen gehört und auch mit dem Phonometer beobachtet werden konnten.

Um leichter die Entfernung der beiden Pfeifen reguliren zu können, construirte ich den in Fig. 10 angegebenen Apparat.

Es stellte sich nämlich bald heraus, dass die Wirkung der Schwächung und Verstärkung ganz unabhängig davon sei, ob die Pfeifen dieselbe Luftquelle oder verschiedene hatten. Daher nahm ich in Zukunft nur einen Blasetisch, von welchem aus die Luft durch einen Schlauch zu der Einströmungsöffnung *E* des Kastens *K* ging. Aus dem Kasten tritt die Luft durch zwei Oeffnungen *O* und *O*₁, welche durch zwei Ventile *V* und *V*₁ beliebig geöffnet und geschlossen werden können. In die Oeffnungen münden zwei horizontal drehbare Messingarme *M* und *M*₁ von je 50 cm Länge, deren andere Enden durch ein verticales, oben und unten offenes, kurzes Messingrohr *R* und *R*₁ begrenzt sind. In die obere Oeffnung dieses Messingrohres ist die Pfeife gesetzt, in die untere Oeffnung ein kleines Wasser-
manometer zur Messung des Luftdruckes.

Diesem Apparate, den ich mit „Doppelpfeife“ bezeichne, steht das Phonometer in einer bestimmten Entfernung gegenüber.

Schon mit dem Ohre beobachtet man, dass ein periodisches Stärker- und Schwächerwerden des Tones stattfindet, wenn die Pfeifen, die ursprünglich zusammenstehen, voneinander entfernt werden. Der Ton der Doppelpfeife ist am schwächsten, wenn die Pfeifen unmittelbar neben einander stehen. Entfernt man die Pfeifen voneinander, so nimmt der Ton an Stärke zu, bis die Pfeifen eine Entfernung von 35 cm haben, nimmt wiederum ab, bis bei einer Entfernung von 80 mm ein Minimum der Tonstärke eintritt. Ein Maximum zeigt sich bei 115 cm Entfernung. Die Schwingungszahl der beiden Pfeifen war 440. Der Luftdruck war 12 mm. Das Phonometer war von den Mundöffnungen der Pfeifen, wenn dieselben neben-

einander standen, 1 m entfernt. Die Ausschläge sind zur Construction der in Fig. 15 abgebildeten Curve benutzt.

Eine einfache Berechnung zeigt, dass die Entfernung der beiden Pfeifen voneinander bei einem Minimum gleich Null oder gleich einem geraden Vielfachen einer halben Wellenlänge, dagegen bei einem Maximum gleich einem ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge war.

Die Erklärung für diese eigenthümliche Interferenzerscheinung liegt darin, dass erstens bei zwei Pfeifen, welche unmittelbar nebeneinander stehen, folgende Beeinflussung durch die äussere Luft stattfindet. Es möge die eine Pfeife allein angeblasen werden, so wird in dem Augenblick, in welchem aus der oberen Pfeifenöffnung Luft austritt, eine momentane Luftverdichtung in der unmittelbaren Umgebung stattfinden, also auch über der Oeffnung der zweiten, schweigenden Pfeife. Hierdurch wird ein Einströmen von Luft in dieselbe bewirkt. Das Umgekehrte findet bei einem Einströmen der Luft bei der tönenden Pfeife statt, es wird während des Einströmens eine Luftverdünnung in unmittelbarer Umgebung stattfinden, also ein Ausströmen der Luft aus der schweigenden Pfeife bewirkt werden. Daraus folgt, dass die schweigende Pfeife in Schwingungen geräth, dass aber der Schwingungszustand der entgegengesetzte ist, wie bei der tönenden Pfeife. Dieses Mitschwingen wird sich zwar auch als Ton bemerkbar machen, aber die Intensität des Tones ist sehr klein im Vergleich zum Tone der tönenden Pfeife. Lässt man dagegen in die zweite Pfeife ebenfalls Luft einströmen, um sie zum Tönen zu bringen, so wird sie mit derselben Intensität wie die erste Pfeife tönen, aber in dem entgegengesetzten Schwingungsstadium verbleiben. Es treten demnach aus beiden Pfeifen Schallwellen aus, welche in entgegengesetzten Schwingungsphasen sind, also sich gegenseitig völlig aufheben würden, wenn sie in demselben Punkte erzeugt würden. Bei der unmittelbaren Nähe findet aber immerhin noch ein fast völliges Aufheben des Tones statt. Das Geräusch, welches noch gehört wird, rührt von den Obertönen der Pfeife her.

Im zweiten Falle mögen die Pfeifen um eine halbe Wellenlänge voneinander abstehen. Nimmt man wieder an, dass

zuerst nur eine Pfeife tönt, so wird die Luftverdichtung, welche durch den Austritt der Luft aus der tönenden Pfeife und die Luftverdünnung, welche durch den Lufteintritt bewirkt wird, die Zeit einer halben Schwingungsdauer gebrauchen, um zur schweigenden Pfeife zu gelangen. Ist sie dort angelangt, so befindet sich die tönende Pfeife schon in dem entgegengesetzten Schwingungsstadium. Also werden bei der Entfernung einer halben Wellenlänge tönende und schweigende Pfeifen in demselben Schwingungsstadium sich befinden. Bringt man nun die bis jetzt schweigende Pfeife zum Tönen, so wird sie wieder in demselben Zustande weiter schwingen. Beide tönenden Pfeifen sind in demselben Schwingungsstadium, verstärken sich also in ihren Wirkungen. Dasselbe findet statt, wenn beide Pfeifen gleichzeitig angeblasen werden, da sich sofort eine gegenseitige Beeinflussung von Pfeife zu Pfeife bemerkbar macht. Es würde ein labiler Gleichgewichtszustand sein, wenn zwei unmittelbar nebeneinander stehende Pfeifen in demselben Stadium, zwei um eine halbe Wellenlänge entfernte Pfeifen im entgegengesetzten Stadium wären, welcher Zustand durch die geringste Ursache in den stabilen Zustand verwandelt wird. Dass sich eine ähnliche Ueberlegung machen lässt, wenn die Pfeifen in grösseren Entfernungen voneinander sind, ist wohl selbstverständlich. Nur wird der Grad der Beeinflussung nicht so gross sein, sondern es werden noch andere Factoren hinzukommen, welche es nicht dazu kommen lassen, dass eine völlige Aufhebung wieder stattfindet.

Aus den letzten Beobachtungen geht hervor, dass es schwer hält, praktisch eine Tonscala zu construiren, in welcher jeder folgende Ton eine Intensität hat, welche zu der Intensität des vorhergehenden Tones in einem bestimmten Verhältnisse steht. Dennoch wird es möglich sein, die Abhängigkeit von Tonstärke und erzeugtem Ausschlag nachzuweisen, wenn man bedenkt, dass die Tonstärke dem umgekehrten Quadrate der Entfernung von der Tonquelle proportional ist. Man wird zu dem Zwecke auf freiem Felde die Beobachtungen für verschiedene Entfernungen machen müssen, welche ich bis jetzt nur im Zimmer gemacht habe. Eine Curve, welche im wesentlichen die Gestalt von Fig. 12 hat, wird dann diese Abhängig-

keit zeigen, und man wird dann mit Hülfe derselben auf empirischem Wege eine Tabelle construiren können, aus welcher die ziffernmässige Abhängigkeit hervorgeht. Ich hoffe, in einer späteren Arbeit auf diesen Gegenstand nochmals zurück zu kommen, sowie auch die Theorie des Phonometers zu entwickeln. Bemerken möchte ich nur noch, dass es nach meinen bisherigen Erfahrungen nur hydrodynamische Gesetze sind, welche das Blättchen im Phonometer befolgt, denn da das Blättchen am Schwingungsbauche der Luftsäule ist, spielt die Veränderung der Dichtigkeit der Luft eine untergeordnete Rolle.

In vorliegendem, für die *Annalen* vom Verf. bearbeiteten Auszuge sind die Beobachtungsergebnisse nur durch die Curven angegeben. Die Grössen der Ausschläge selbst sind in der Programmabhandlung angegeben. Desgleichen sind einige andere Beobachtungen, sowie eine Literaturübersicht hier nicht berücksichtigt. Es muss dieserhalb auf die Programmabhandlung verwiesen werden.

Hamburg, Mai 1888.

XVIII. *Ueber das Electroaräometer;* *von W. Michelson.*

Folgender sehr einfache, aber meines Wissens noch unbekannte Versuch kann als gute Illustration zur Theorie der Condensatoren und der Electrometer dienen.

Wenn man die innere Fläche eines gewöhnlichen Glasaräometers leitend macht, also z. B. versilbert, so wird beim Eintauchen in eine leitende Flüssigkeit offenbar ein Condensator von veränderlicher Capacität gebildet. Ladet man die Flüssigkeit und die innere Belegung zu verschiedenen, constant gehaltenen Potentialen, so strebt die Energie dieses Condensators einem Maximum zu. Es entsteht also eine Kraft, welche das Aräometer in die Flüssigkeit tiefer eintaucht. Das Aräometer sinkt, bis die hydrostatische Reac-

tion der Flüssigkeit so gross wird, dass sie auch dieser neu hinzugekommenen Kraft das Gleichgewicht halten kann.

Nach vollständiger Entladung stellt sich das Aräometer wieder in seine frühere Lage ein.

Wenn man zunächst von den durch Electricisirung hervorgebrachten Aenderungen der Capillarkräfte absieht, und den aus der Flüssigkeit noch herausragenden Theil des Aräometerrohres als sehr lang im Vergleich zu den Verschiebungen des Aräometers voraussetzt, so kann der Werth der oben genannten Kraft leicht aus einer bekannten Formel¹⁾ für die Energie W eines cylindrischen Condensatorausschnittes von der Länge l und den Radien a und b ($b > a$) entnommen werden. Sind nämlich die constant erhaltenen Potentiale der Belegungen A und B , so ist diese Kraft:

$$L = \frac{\partial W}{\partial l} = \frac{K(A - B)^2}{4 \log \frac{b}{a}}.$$

K ist die Diëlectricitätsconstante der Glassorte, aus welcher das Aräometer angefertigt ist.

Bezeichnen wir die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten, an deren Grenzfläche das Aräometer schwimmt, mit s_1 und s_2 , so erhalten wir, indem wir die hydrostatische Gegenkraft dem obigen Ausdrucke gleich setzen, für die Gleichgewichtslage eine Senkung:

$$x = \frac{K(A - B)^2}{4\pi h^2 \cdot g \cdot (s_1 - s_2) \cdot \log \frac{b}{a}}.$$

Wir sehen, dass die Senkung dem Quadrate der Potentialdifferenz proportional sein muss. Dadurch lässt sich erklären, dass die Erscheinung bei geringen Spannungen ganz unmerkbar ist, während bei grösseren eine regelmässige und unter günstigen Umständen sehr erhebliche Senkung stattfindet.

Einige von mir angestellte Versuche scheinen das angeführte theoretische Gesetz wenigstens für nicht sehr grosse Senkungen zu bestätigen. Bei grösseren Ausschlägen (10

1) Maxwell, Electr. and Magn. Art. 126.

bis 40 mm) dagegen stellte sich scheinbar eine einfache Proportionalität zwischen den Zunahmen der Potentialdifferenz und der Senkung ein. Diese Abweichung kann übrigens auf die Unvollkommenheit meiner Versuche und verschiedene störende Wirkungen zurückgeführt werden.

Um die innere Fläche des Aräometers in leitender Verbindung mit einer Electricitätsquelle zu erhalten, ohne dabei seine Beweglichkeit zu sehr zu beeinträchtigen, stellte ich eine Art hydrostatischer Wage aus feinen Capillarglasröhren her. Durch diese Röhren ging ein sehr feiner Silberdraht, welcher einerseits im Aräometer, andererseits in einem besonderen Wassergefäss endete.

Sehr wesentlich ist es auch, dass die leitende Flüssigkeit das Aräometerrohr nicht benetze, sonst steigt sie an demselben beim Electrisiren empor, und die Capacität des Condensators wird vergrössert, ohne dass dabei eine bemerkbare Senkung eintritt. Gebraucht man als leitende Flüssigkeit gewöhnliches Wasser, so muss im oberen Theile des Gefässes die Luft durch ein Oel ersetzt werden, unter welchem Wasser das Glas nicht benetzt. Natürlich wird dadurch zugleich die Empfindlichkeit des Apparates beträchtlich erhöht.

Nach genaueren Messungen könnte die Vergleichung der beobachteten und berechneten Senkungen einen Anhalt zur Bestimmung der Aenderungen der Capillarkräfte bei höheren Potentialen geben.

Wenn aber dieser Einfluss der Capillarkräfte bestimmt und eliminirt wäre, so könnte das Electroaräometer vielleicht auch zur Messung von grösseren Potentialdifferenzen als absolutes Electrometer gebraucht werden. Freilich dürften seine Angaben keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit haben.

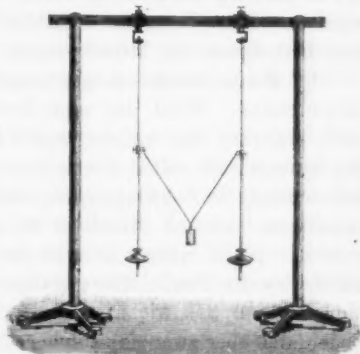
Berlin, Februar 1888.

XIX. Versuche über das Mitschwingen zweier Pendel¹⁾; von A. Oberbeck.

Um die Grundgesetze des Mitschwingens oder der Resonanz aus einfachen Vorlesungsversuchen entwickeln zu können, habe ich die folgende Anordnung getroffen.

An einer rechteckigen eisernen Stange (s. die beistehende Figur), welche von zwei Eisenstäben getragen wird, sind zwei verschiebbare Messinghülsen angebracht, welche Lager für die Schneiden der beiden Pendel tragen. Dieselben bestehen aus Stahlstangen, an denen zwei linsenförmige Messinggewichte festgeschraubt werden können.

Die Gewichte können verstellt und dadurch die Schwingungszeiten der Pendel verändert werden.



Um nun das eine Pendel durch die Schwingungen des anderen ebenfalls in periodische Bewegung zu versetzen, muss zwischen denselben eine mechanische Verbindung hergestellt werden. Man kann hierzu sehr verschiedenartige Mittel benutzen. Es genügt schon, einen halbkreisförmig gebogenen Draht an den beiden Pendelstangen zu befestigen. Die Biegung desselben wird während der Schwingungen der Pendel grösser und kleiner und bewirkt eine veränderte Spannung zwischen den beiden Punkten. Ebenso kann man Drahtspiralen zwischen denselben anbringen. Noch zweckmässiger ist es, einen Faden an den Pendeln zu befestigen, der, wie die Figur zeigt, durch ein kleines Gewicht gespannt wird. Endlich kann dafür eine leichte Metallkette angehängt werden.

1) Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Neuvorpommern und Rügen. Jahrg. 19. 1887.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XXXIV.

Um irgend eine dieser Vorrichtungen bequem anbringen zu können, befinden sich an den Pendelstangen zwei kleine Klemmschrauben, welche auf denselben verschoben werden können.¹⁾

Die Intensität der Wechselwirkung der beiden Pendel kann durch Verschiebung der Schrauben verändert werden, da das hier in Betracht kommende Drehungsmoment von der Länge der Hebelarme abhängt. Ferner kann man dasselbe bei Benutzung des Fadens durch Veränderung des Gewichtes variiren. Die Versuche verlaufen nun so, wie man es nach den Principien des Mitschwingens zu erwarten hat.

2. Beide Pendel mögen zunächst gleiche Schwingungsdauer haben. Wird das eine Pendel in Schwingungen versetzt, während das andere in der Ruhelage bleibt, und dann das System sich selbst überlassen, so geräth das zweite Pendel ebenfalls in Schwingungen, deren Amplituden fortdauernd zunehmen, während dieselben bei dem ersten Pendel kleiner werden. Nach einiger Zeit ist die ganze Schwingungsenergie auf das zweite Pendel übergegangen. Hierauf kehrt sich der Vorgang um u. s. w. Man kann leicht eine grössere Anzahl (jedenfalls über zwanzig) solcher Uebertragungen beobachten. Die Zeit, welche von dem Stillstand des einen bis zum Stillstand des anderen Pendels vergeht, will ich als Uebertragungsdauer bezeichnen. Dieselbe hängt von der Intensität des Uebertragungsmechanismus ab. Als z. B. die Schwingungsdauer der beiden Pendel 1 Secunde betrug, und ein Faden mit spannendem Gewicht benutzt wurde, betrug die Uebertragungszeit:

| | | | |
|-----|-----|----|---------|
| bei | 20 | 40 | 60 g |
| | 110 | 60 | 40 Sec. |

Es scheint mir nicht unwahrscheinlich, dass man die Beobachtung der Uebertragungszeit zur Messung schwacher, elastischer Spannungen wird benutzen können.

1) Nach der Mittheilung der hier beschriebenen Versuche machte mich Hr. Professor W. Holtz auf eine Publikation von Isenkrabe (Carl's Repertorium der Physik 16. 99—118. 1880) aufmerksam. Dieselbe enthält ebenfalls Versuche über das Mitschwingen isochroner Pendel, bei welchen die Uebertragung durch die Erschütterungen des Holzgestells erfolgt, an welchem die Pendel hängen.

3. Bisher waren zwei ganz gleiche Pendel benutzt worden. Die Messinggewichte derselben betrugen 800 g. Ein drittes ähnliches Pendel hatte eine dünnere Stahlstange und trug ein Gewicht von 350 g. Lässt man dasselbe isochron mit einem der schweren Pendel zusammenschwingen, so erfolgt die Uebertragung in ganz derselben Weise. Die Amplituden des leichteren Pendels sind aber jetzt grösser wie diejenigen des schweren. Der Vorgang ist analog dem elastischen Stoss zweier Kugeln von ungleicher Masse.

4. Es seien ferner die Schwingungszeiten der beiden Pendel ungleich. Hierzu wurden wieder die beiden schweren Pendel benutzt; das Messinggewicht des einen lag aber höher, als dasjenige des anderen.

Wird Pendel I in Schwingungen versetzt, während Pendel II ruht, so geräth zwar letzteres auch in Schwingungen. Die Schwingungsamplituden nehmen aber nach kurzer Zeit wieder ab. Pendel II kommt wieder zur Ruhe. Die Schwingungsbewegung beginnt aufs neue u. s. w. Während dessen haben die Schwingungsamplituden von Pendel I nur kleine Grössenschwankungen erfahren. Es geht daher nur ein geringer Theil der Schwingungsenergie an das zweite Pendel über. Als z. B. die Schwingungsdauer des einen Pendels 1 Secunde, diejenige des anderen 0,87 Secunden betrug und das erste Pendel in Bewegung gesetzt wurde, nahm das zweite Pendel zwar etwas an den Schwingungen Theil, aber es kam stets in Zeiträumen von 13 bis 16 Secunden wieder zur Ruhe.

5. Die beschriebenen Versuche unterscheiden sich von den akustischen Resonanzerscheinungen dadurch, dass sie sehr langsam verlaufen und auf diese Weise alle Einzelheiten des Vorganges erkennen lassen; ferner dadurch, dass die Dämpfung der Schwingungen sehr gering ist. Deutlich treten die folgenden Hauptgesetze der beschriebenen Erscheinungen hervor:

a) Eine Uebertragung von Schwingungsenergie bei zwei mechanisch verbundenen Systemen findet stets statt.

b) Dieselbe ist aber nur dann eine vollständige

(Austausch der Energien in bestimmten Intervallen), wenn die Schwingungszeiten der beiden Pendel übereinstimmen.

c) Je mehr die Zeiten der beiden Einzelschwingungen voneinander verschieden sind, um so geringer ist die übertragene Energie.

Bei den akustischen Resonanzerscheinungen entziehen sich die Bewegungen in dem letzten Falle meist wegen der starken Dämpfung der Beobachtung. Eine Reihe bemerkenswerther Beispiele und die allgemeinen Gesetze solcher Bewegungen hat E. Warburg in einer Abhandlung „Ueber tönende Systeme“¹⁾ gegeben.

Die hier beschriebenen Versuche lassen sich mathematisch verfolgen. Man kann dabei sehr einfache Annahmen zu Grunde legen, sodass man im wesentlichen das folgende Problem zu behandeln hat.

Zwei Punkte A und B seien fähig, Schwingungen um zwei bestimmte Gleichgewichtslagen (A_0 und B_0) in der Richtung ihrer Verbindungslinie auszuführen. Von A_0 und B_0 aus wirken demnach anziehende Kräfte, proportional der Entfernung, auf A und B .

Ferner mögen sich die beiden Punkte A und B anziehen oder abstossen, je nachdem ihre Entfernung grösser oder kleiner als eine gewisse mittlere Entfernung A_0B_0 ist. Diese Kraftwirkung sei der Differenz der Entfernungen $AB - A_0B_0$ proportional. Hiernach sind die Beziehungen der Punkte zu einander ungefähr so gewählt, wie man sie sich zwischen den Moleculen denken kann, um das langsame Fortschreiten einer Schwingungsbewegung durch eine Punktreihe (wie z. B. bei der Wärmeleitung) zu erklären.

Nach den gemachten Annahmen sind die Bewegungsgleichungen für die beiden Punkte:

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -a_1^2 x + b^2(y - x), \quad m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -a_2^2 x + b^2(x - y).$$

Setzt man: $\frac{a_1^2 + b^2}{m_1} = \alpha^2, \quad \frac{a_2^2 + b^2}{m_2} = \beta^2,$

$$\frac{b^2}{m_1} = \kappa^2, \quad \frac{b^2}{m_2} = \lambda^2, \quad \text{also: } \frac{\lambda}{\kappa} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}},$$

1) Warburg, Pogg. Ann. 136. p. 89. 1869.

so erhält man: $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha^2 x - \kappa^2 y = 0$, $\frac{d^2y}{dt^2} + \beta^2 y - \lambda^2 x = 0$.

Die allgemeinen Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$x = A \cos(\sigma_1 t) + B \sin(\sigma_1 t) + C \cos(\sigma_2 t) + D \sin(\sigma_2 t).$$

$$y = \gamma_1 \{A \cos(\sigma_1 t) + B \sin(\sigma_1 t)\} + \gamma_2 \{C \cos(\sigma_2 t) + D \sin(\sigma_2 t)\}.$$

In demselben ist:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \mp \frac{1}{2} V(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4 \kappa^2 \lambda^2$$

$$\gamma = \frac{\alpha^2 - \beta^2 \pm V(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4 \kappa^2 \lambda^2}{2 \kappa^2}.$$

Der Index 1 bei σ und γ entspricht dem oberen, der Index 2 dem unteren Vorzeichen. Um die allgemeinen Lösungen den angestellten Versuchen anzupassen, kann man annehmen, dass für:

$$t = 0, \quad x = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Dann ist:

$$x = \frac{a}{\gamma_2 - \gamma_1} \{\gamma_2 \cos(\sigma_1 t) - \gamma_1 \cos(\sigma_2 t)\},$$

$$y = \frac{a \gamma_1 \gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \{\cos(\sigma_1 t) - \cos(\sigma_2 t)\}.$$

Die Bewegungen der beiden Punkte bestehen daher aus zwei Schwingungsbewegungen. Die Schwingungszeiten derselben hängen von den Einzelschwingungen und von der Wirkung des Mechanismus ab.

Von besonderem Interesse sind nun die folgenden beiden speciellen Fälle:

I. Die Schwingungen der beiden Punkte ohne gegenseitige Beeinflussung mögen gleiche Zeitdauer haben. Ferner sei diejenige Kraft, welche von der ursprünglichen Gleichgewichtslage ausgeht, erheblich grösser als die von der Wechselwirkung der Punkte herrührende Kraft. Es sei also:

$$\alpha = \beta, \text{ ferner } \alpha \text{ gross im Vergleich zu } \kappa \text{ und } \lambda.$$

$$\text{Dann ist: } \gamma_1 = \frac{\lambda}{\kappa}, \quad \gamma_2 = -\frac{\lambda}{\kappa},$$

$$\text{und angenähert: } \sigma_1 = \alpha - \frac{\kappa \lambda}{2 \alpha}, \quad \sigma_2 = \alpha + \frac{\kappa \lambda}{2 \alpha}. \quad \text{Also:}$$

$$x = \frac{a}{2} \{\cos(\sigma_1 t) + \cos(\sigma_2 t)\}, \quad y = \frac{a}{2} \frac{\lambda}{\kappa} \{\cos(\sigma_1 t) - \cos(\sigma_2 t)\}.$$

Die Schwingungen der beiden Punkte setzen sich also aus zwei Einzelschwingungen zusammen, deren Dauer bei der einen grösser, bei der anderen kleiner ist, als die den nicht miteinander verbundenen Punkten zukommende Schwingungszeit. Man kann auch schreiben:

$$x = a \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2\alpha}t\right) \cos(\alpha t), \quad y = a \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2\alpha}t\right) \sin(\alpha t).$$

Setzt man noch: $\alpha = \frac{\pi}{T}, \quad \frac{\pi\lambda}{\alpha} = \frac{\pi}{\vartheta},$

so ist ϑ die zuvor als Uebertragungsdauer bezeichnete Zeit. Fasst man als Amplituden der Einzelschwingungen der beiden Pendel die Ausdrücke:

$$a \cos \frac{\pi t}{2\vartheta} \quad \text{und} \quad a \frac{\lambda}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2\vartheta}$$

auf, so sieht man, dass dieselben in Intervallen von ϑ ihre grössten und kleinsten Werthe annehmen. Bei dieser Auffassung des Vorgangs kann man sagen: die Punkte vollführen demnach ihre Schwingungen in der ihnen eigenthümlichen Schwingungszeit T , die durchschnittliche lebendige Kraft ihrer Bewegungen verändert sich wie die Ausdrücke:

$$\sin^2 \frac{\pi t}{2\vartheta} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi t}{2\vartheta}.$$

Wie oben bemerkt, ist $(\lambda/\pi) = \sqrt{m_1/m_2}$. Die Amplituden des leichteren Pendels sind demnach grösser als diejenigen des schwereren und verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Massen. Sind die beiden Massen gleich, so ist $\lambda = \pi$.

II. Die Eigenschwingungen der beiden Massenpunkte seien so sehr voneinander verschieden, dass: $(\alpha^2 - \beta^2)^2$ gross ist im Vergleich zu $4\pi^2\lambda^2$. Dann ist in erster Annäherung:

$$\sigma_1 = \beta, \quad \sigma_2 = \alpha.$$

Die Schwingungsbewegung des zum Mitschwingen erregten Punktes ist:

$$y = \frac{a\lambda^2}{\alpha^2 - \beta^2} \{\cos \beta t - \cos \alpha t\}.$$

Dieselbe besteht also aus zwei übereinander gelagerten Bewegungen mit den Schwingungszeiten der beiden Einzelschwingungen. Die Amplitude derselben bleibt aber stets erheblich kleiner als die erste Amplitude a des erregenden

Punktes. Ferner stören sich dieselben gegenseitig, sodass der erregte Punkt in kurzen Intervallen immer wieder zur Ruhe kommt.

Hiernach werden die beobachteten Erscheinungen in ihren Hauptzügen durch die mitgetheilte Rechnung wiedergegeben.

Greifswald, den 11. Mai 1888.

XX. Die Bestimmung des Dampfdrucks aus der Verdampfungsgeschwindigkeit; von W. Müller-Erbach.

Durch die an einen Strom trockener Luft abgegebenen Wassermengen bestimmte G. Tammann¹⁾ den Dampfdruck wasserhaltiger Verbindungen und fand bei dieser der meinigen ähnlichen Methode die Spannungswerthe für gesättigte Lösungen in Uebereinstimmung mit mir denen der barometrischen Methode gleich, während er die für feste wasserhaltige Salze auch aus meinen Messungen abgeleiteten Resultate ohne eigene Versuche darüber für ungenau ansieht. Ich werde an anderer Stelle die gemachten Einwürfe ausführlicher besprechen und beschränke mich hier auf Folgendes:

1) Im Anschluss an Stefan's bekannte Formel findet man die Dampfmenge d_1 des nicht gebundenen Wassers aus $d_1 = c/l \log p/(p - p_1)$, wenn c die Diffusionsconstante und l die Länge der offenen Röhre bedeutet. Annähernd ergibt sich also $d_1 l/c = 2p_1 M/(2p - p_1)$ und für gebundenes Wasser $d_1 l/C = 2p_2 M/(2p - p_2)$ oder $d_1/d_2 = p_1/p_2$, da $(2p - p_2)/(2p - p_1)$ der Einheit nahezu gleich ist. Unter der Voraussetzung einfacher Abhängigkeit der Diffusion von dem Dampfdruck und dem Quadrate der absoluten Temperatur findet man die Gleichung $d_1/d_2 = p_1/p_2$ noch unmittelbarer.

2) Meine Beobachtungen messen die während der ganzen Zersetzung, selbst beim Schmelzen, unveränderliche Dissoziationsspannung, nach der statischen Methode wird dagegen

1) G. Tammann, Wied. Ann. 33. p. 322. 1888.

der die Zerlegung aufhebende Enddruck bestimmt. Tamman's Verfahren nähert sich der letzteren umsomehr, je langsamer der Luftstrom fliesst.

3) Alle nach meiner Bestimmungsart bisher erhaltenen Resultate weichen wenig von einander ab, selbst die wegen der gleichmässigen Sättigung versuchte Verwendung eines bis 180 mal grösseren Verdampfungsraumes durch Benutzung von Flaschen bis zu 60 ccm für die Aufnahme der Salze ändert dieselben nicht und lässt sie mit unbedingter Sicherheit für dasselbe Salz als Constante erkennen.

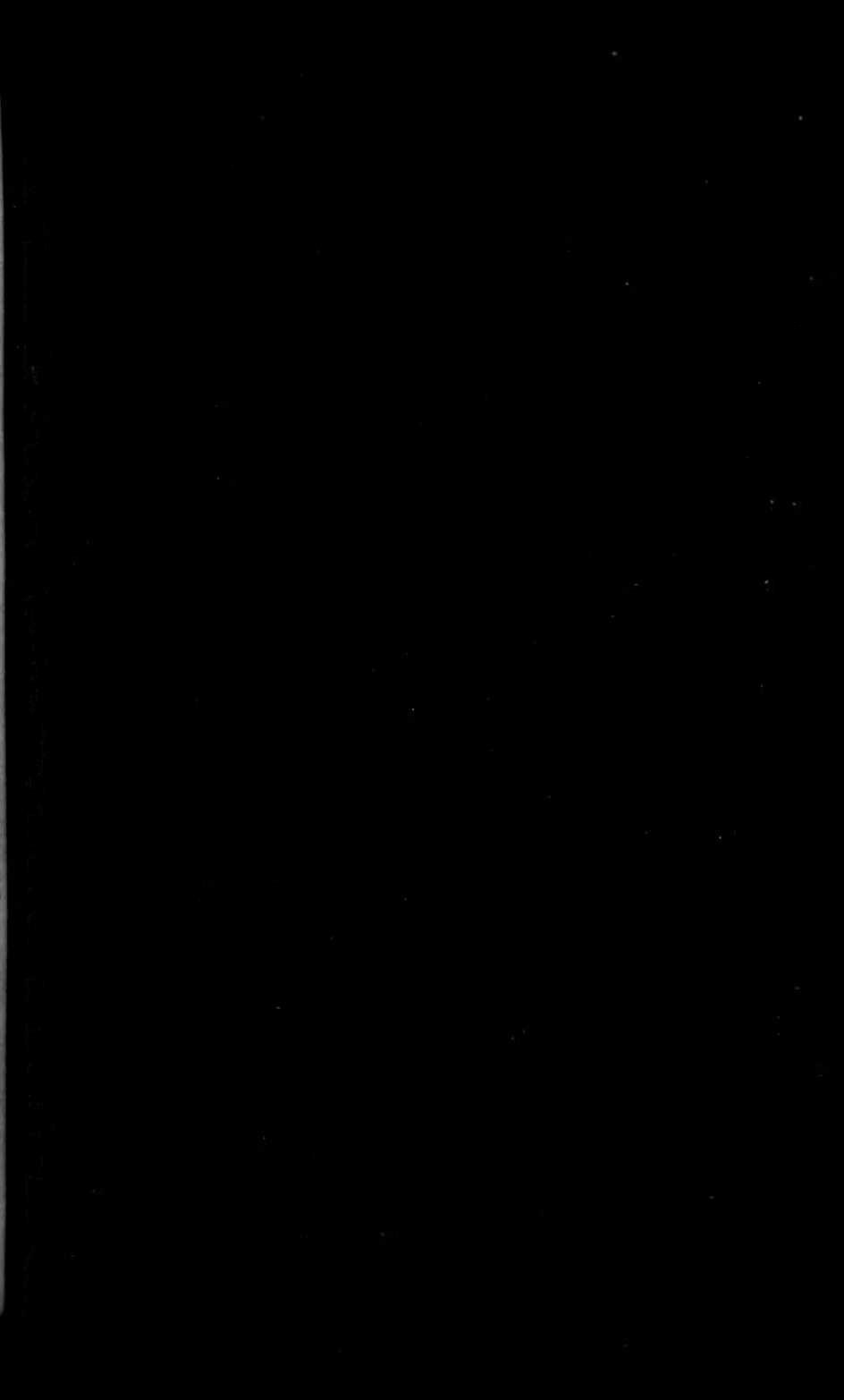
4) Die Werthe für die Dampfspannung ändern sich mit der Natur der Salze, durch Verdunsten von einem Theile des Krystallwassers oder auch durch längeres Liegen an der Luft ohne wesentliche Verdunstung werden viele leichter zersetzbar.

5) Den aus meinen Messungen abgeleiteten Dampfdruck gelang es, durch einige beim Chromalaun und beim Kupfervitriol ausgeführte Versuche in der Atmosphäre über den Salzen direct nachzuweisen. Kupfervitriol hat nach meinen Angaben zwischen 43 und 50° die relative Spannung von 0,22 bis 0,24, wie sie das um 26° kältere Wasser besitzt. Dementsprechend zeigte eine durch eine enge Glasröhre fast ganz verschlossene Flasche von 60 ccm Inhalt mit einer grösseren Menge von Kupfervitriol längere Zeit bis 41° erhitzt nach dem Abkühlen auf 17° nicht die Spur eines Beschlages von Wasser, während ein solcher beim Abkühlen von 44° und mehr auf 17° leicht beobachtet werden kann. Der relative Dampfdruck jener Atmosphäre beträgt also bei 44° mehr als 0,21 und bei 41° nicht über 0,25.

Berichtigung.

Bd. XXXIII. (A. Gockel) p. 710 unterste Zeile muss es heissen:

$$Q = \frac{dp}{d\vartheta} \times \frac{E}{J} \times \vartheta \quad \text{statt} \quad Q = \frac{dp}{d\vartheta} \times \frac{E}{J}.$$



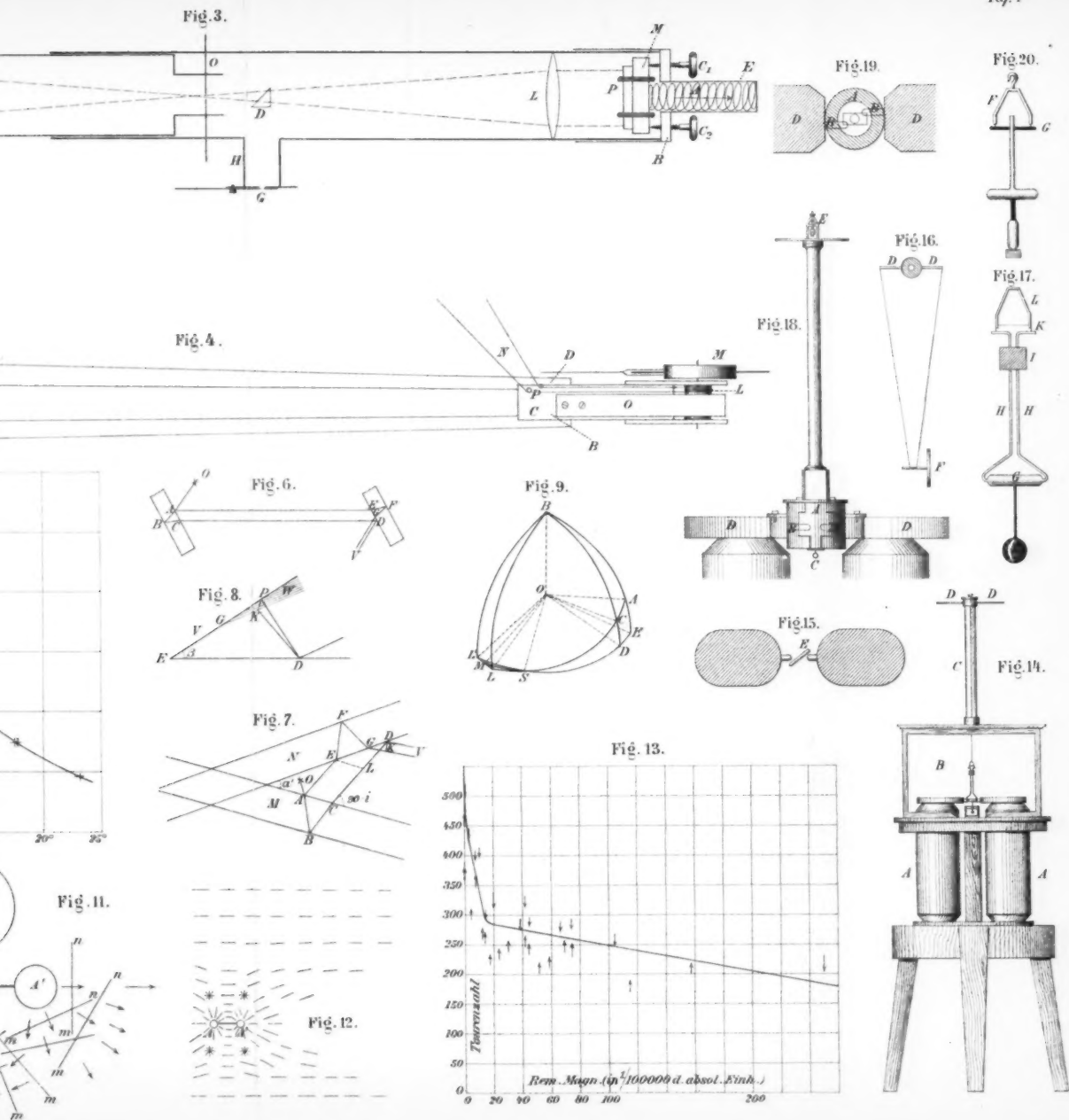


Fig. 1.



Fig. 2.

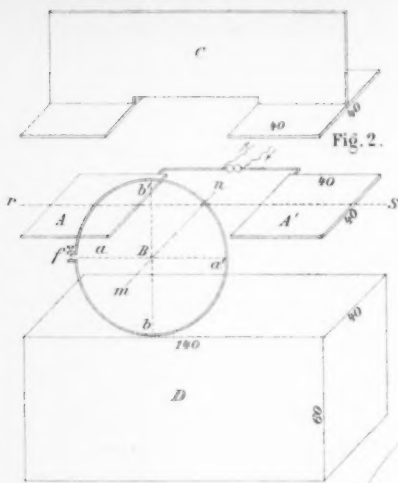
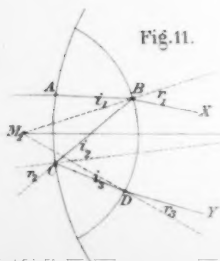


Fig. 11.



I.



II.



III.

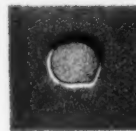


Fig. 3.

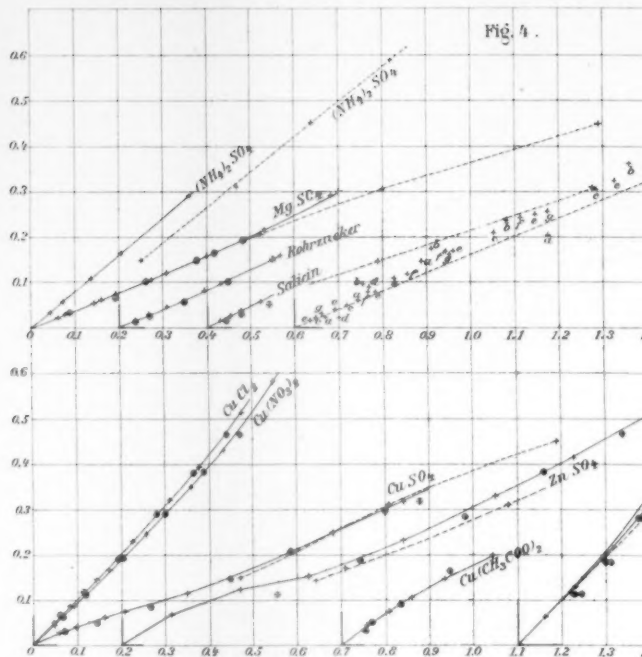


Fig. 8.

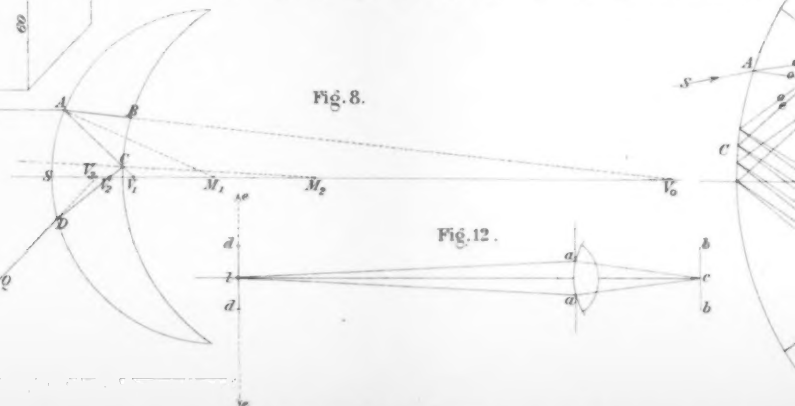


Fig. 12.

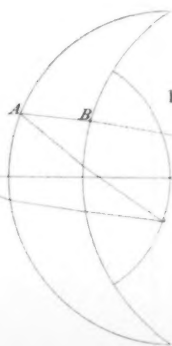
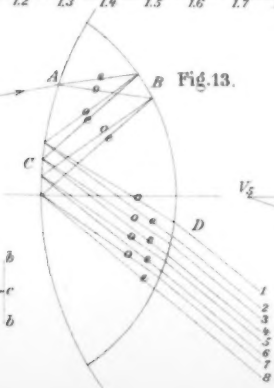
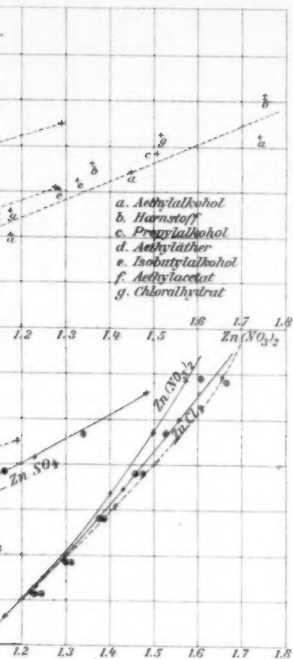
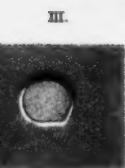


Fig. 9.

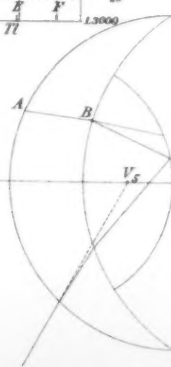


Fig. 10.

Fig. 7.

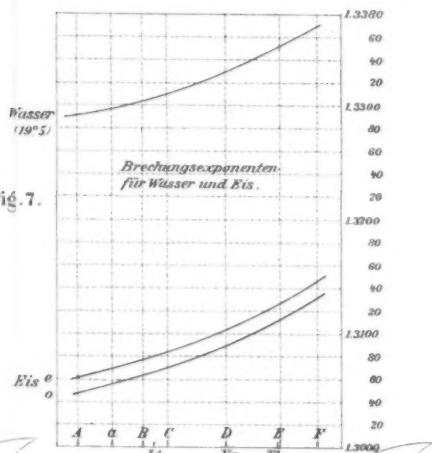


Fig. 6.

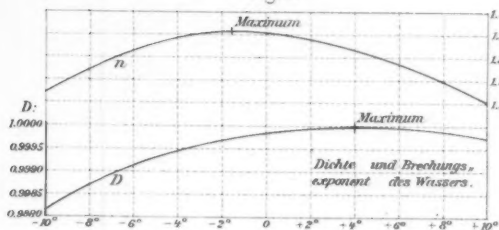


Fig. 5.

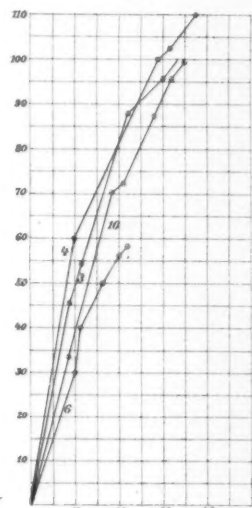
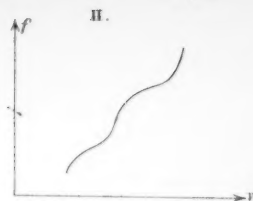
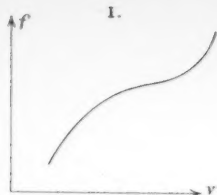
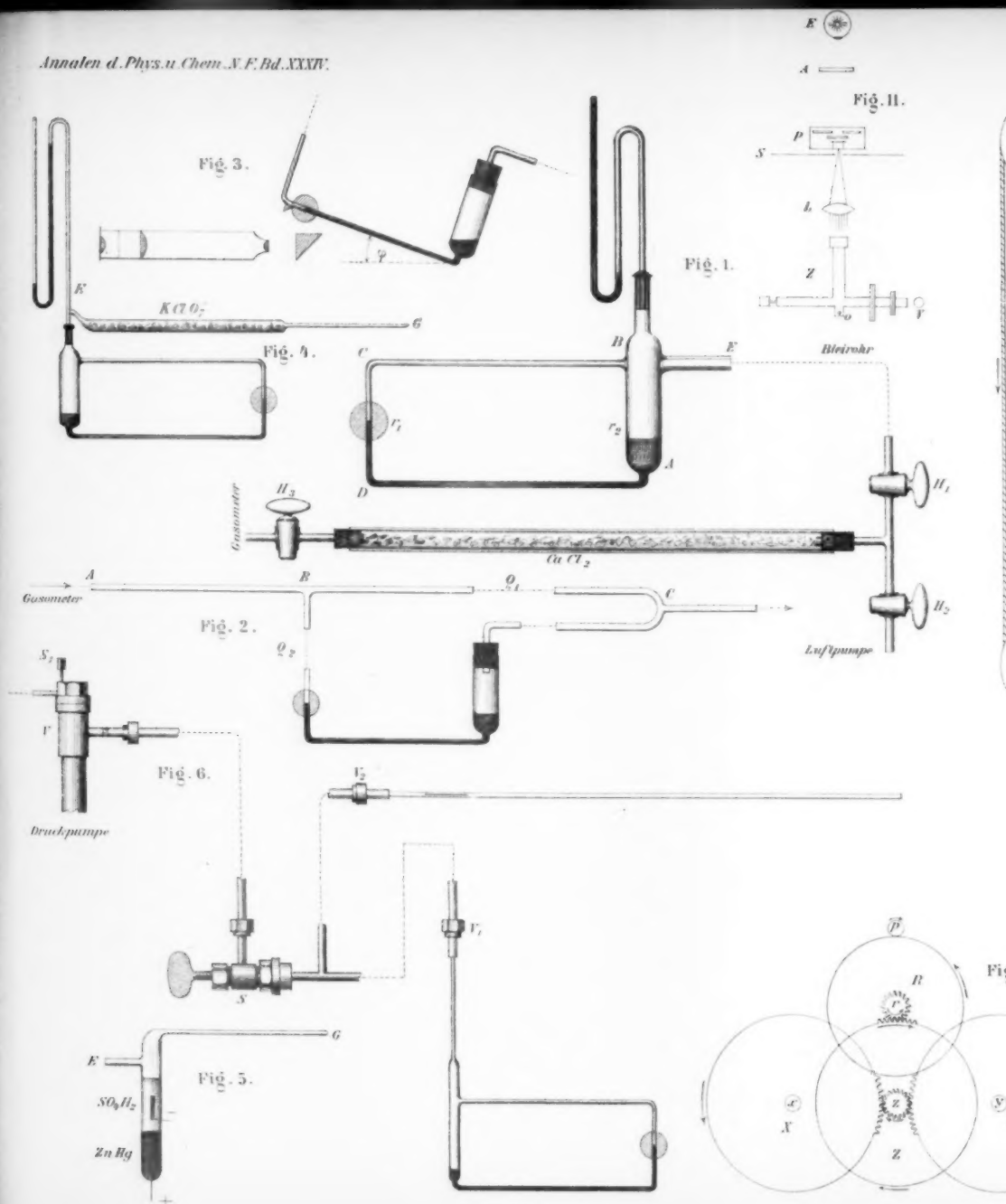


Fig. 14.



Quincke Fig. 1-6. E. Wiedemann Fig. 7-11. E. Wiedemann

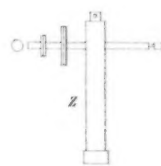
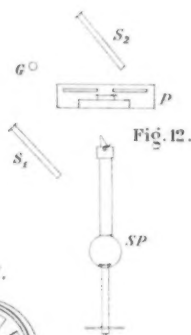
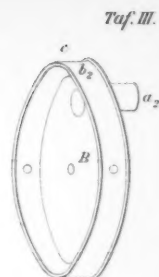
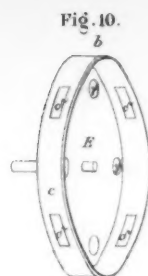
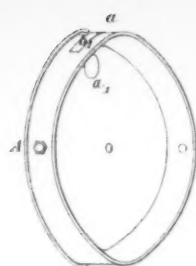
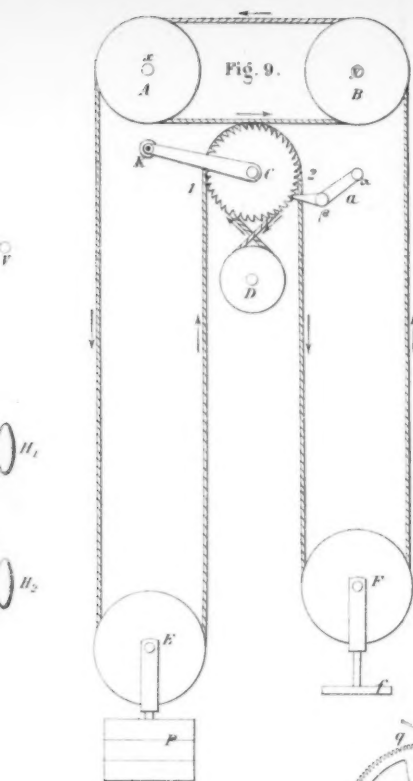


Fig. 13.

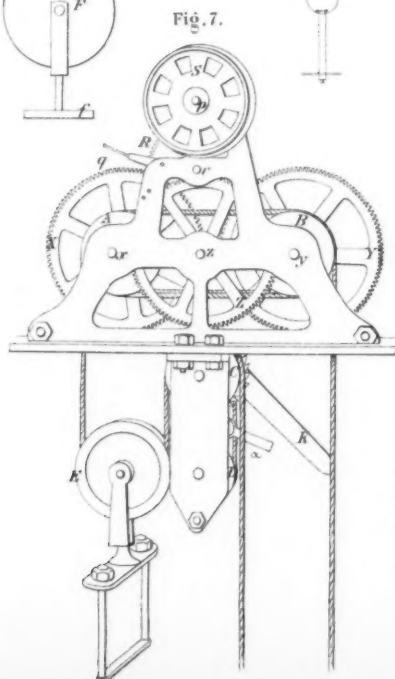
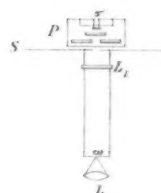


Fig. 14.

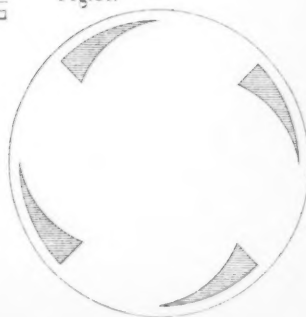
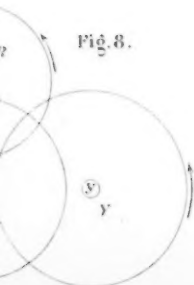


Fig. 8.



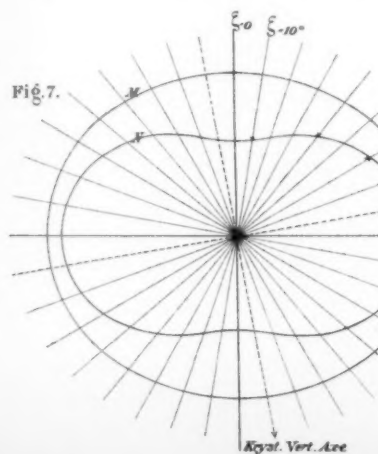
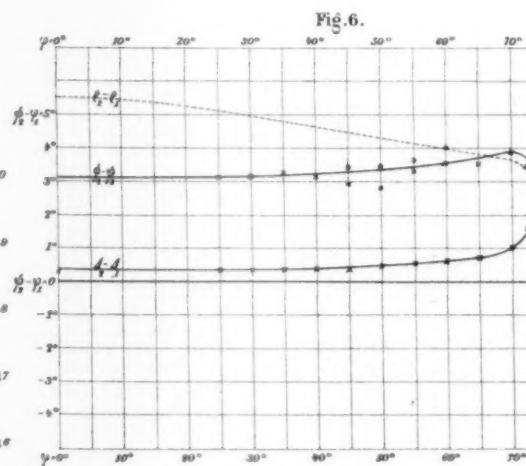
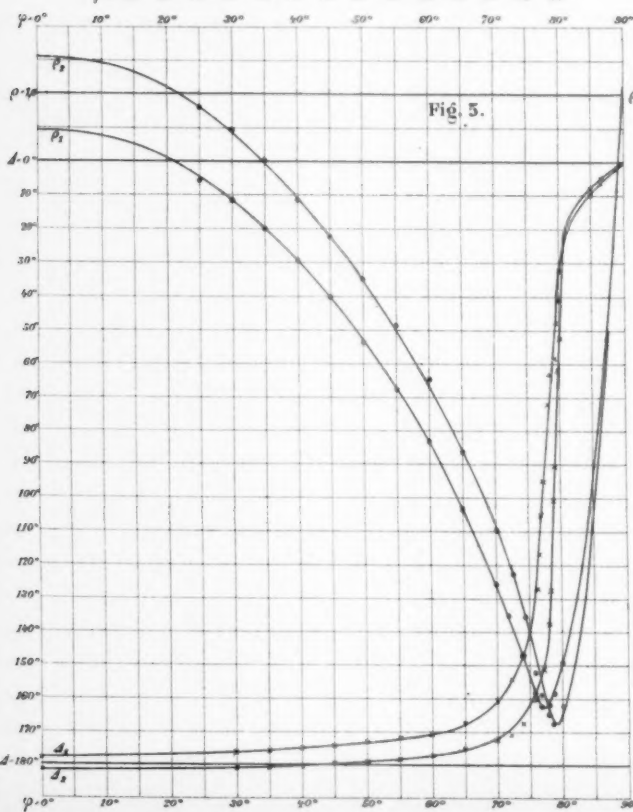
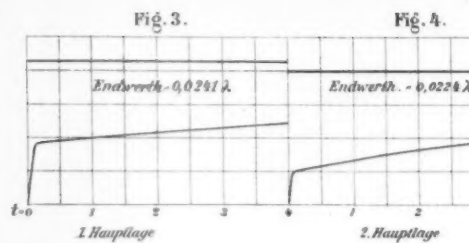
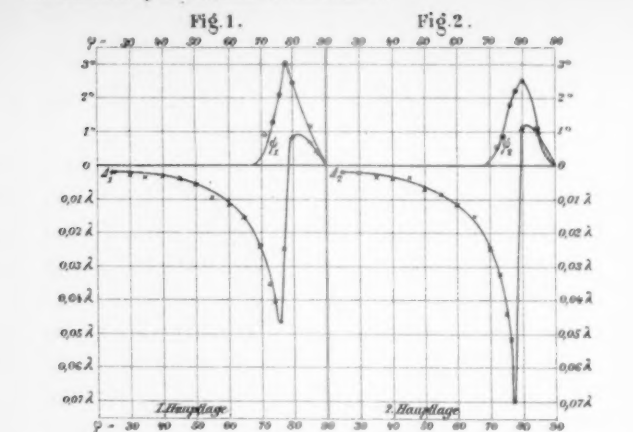


Fig. 4.

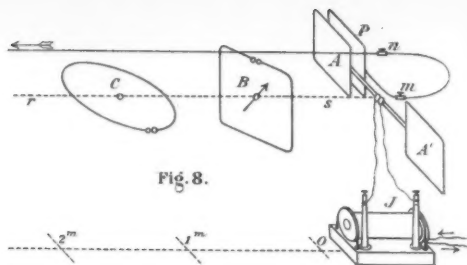
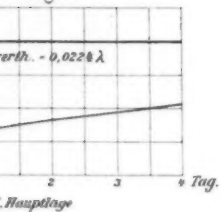
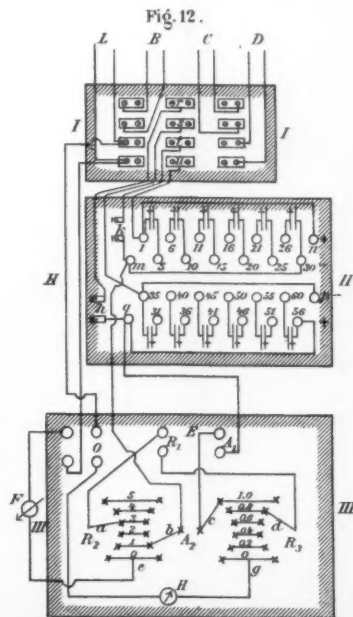
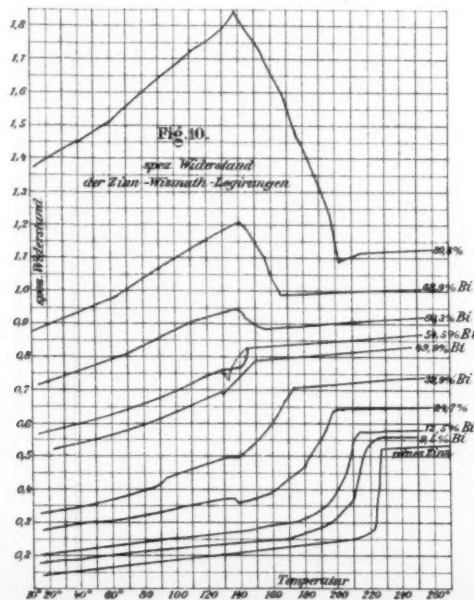
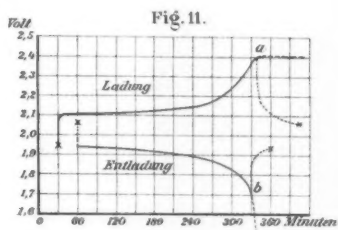
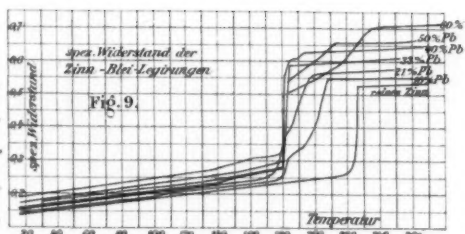
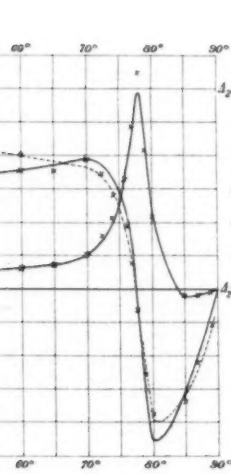


Fig. 8.



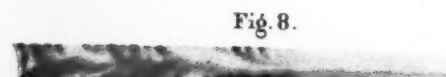
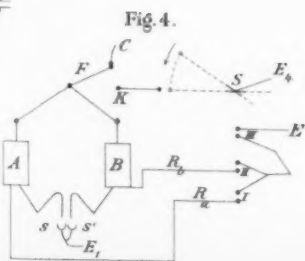
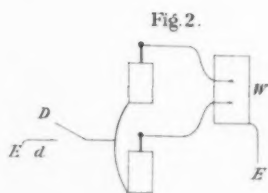
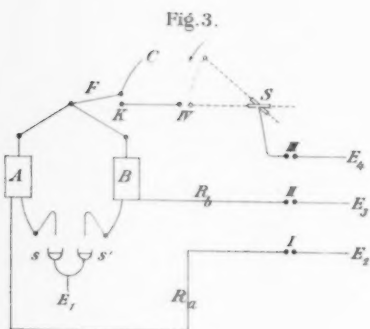
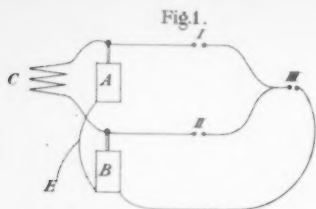


Fig. 6.

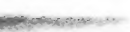
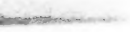
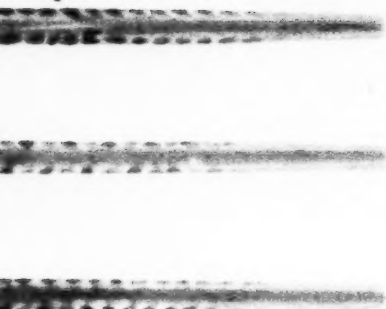


Fig. 7.

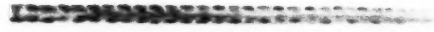


Fig. 7^a

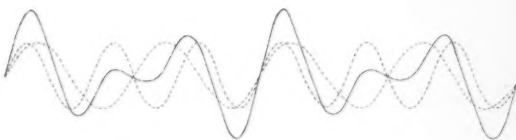


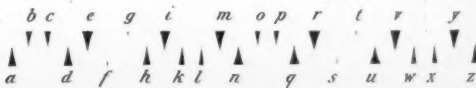
Fig. 9.



Fig. 9^a



Fig. 9^b



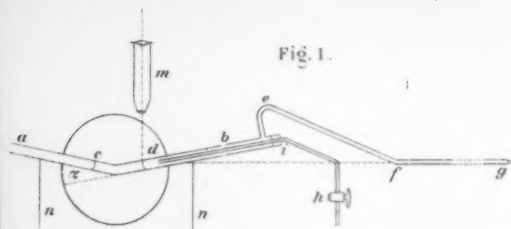


Fig. 1.

Fig. 2.

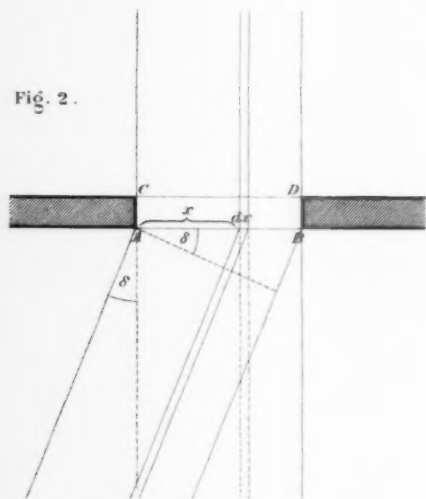


Fig. 3.

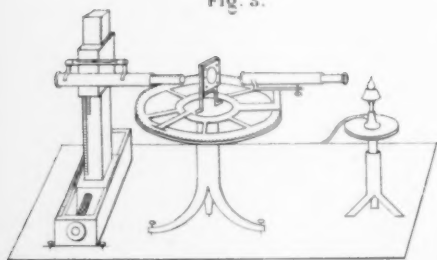


Fig. 4.

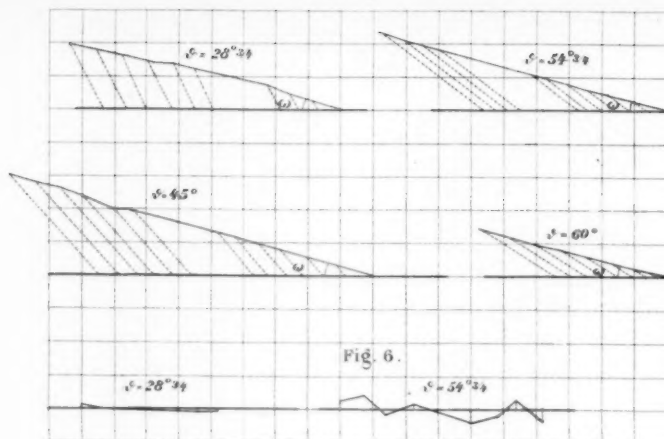


Fig. 6.

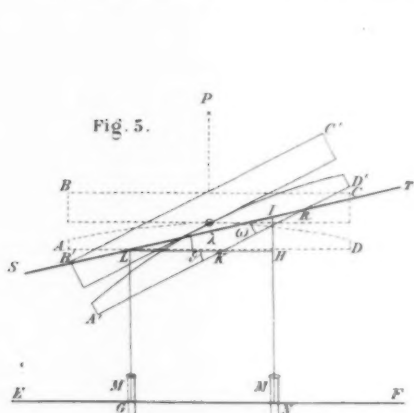


Fig. 5.

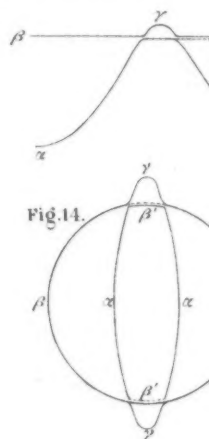


Fig. 14.

$\epsilon = 26^{\circ}34'$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 45^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 60^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 75^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 90^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 105^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 120^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 135^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 150^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 165^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 180^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 195^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 210^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 225^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 240^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 255^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 270^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

$\epsilon = 285^{\circ}$ (schwache Vergrößer.) - 0.87

$\epsilon = 300^{\circ}$ (starker Vergrößer.) - 0.53

Fig. 7.

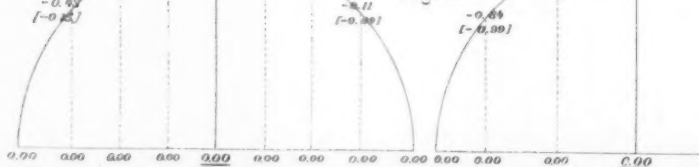


Fig. 10.

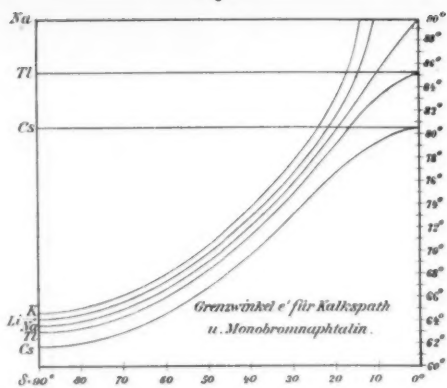


Fig. 12.

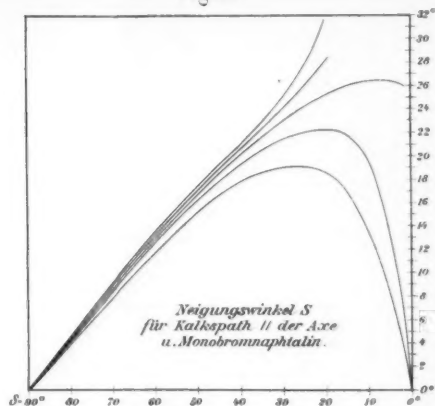


Fig. 13.

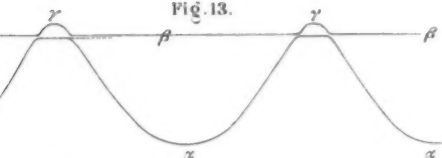


Fig. 11.

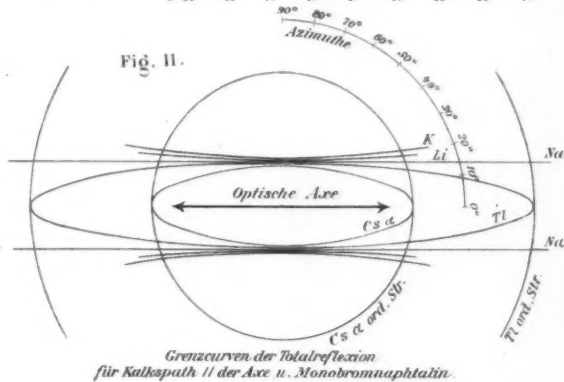


Fig. 15.

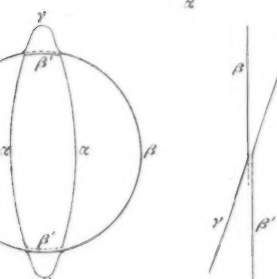


Fig. 8.

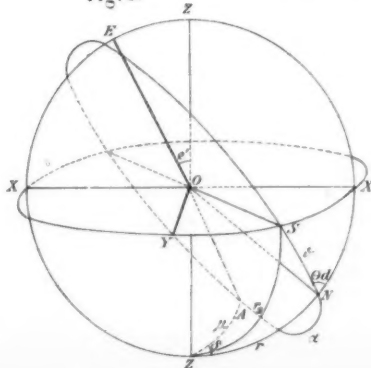


Fig. 9.

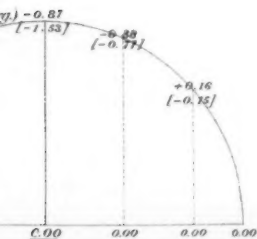
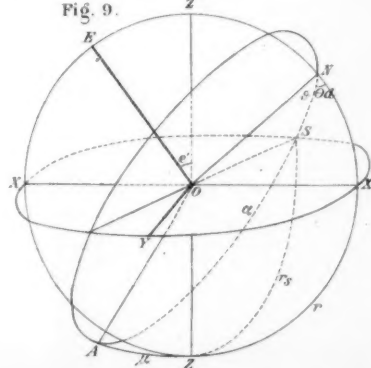


Fig. 1.

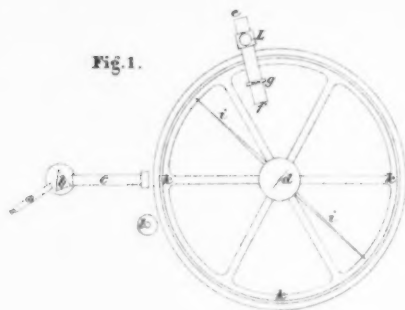
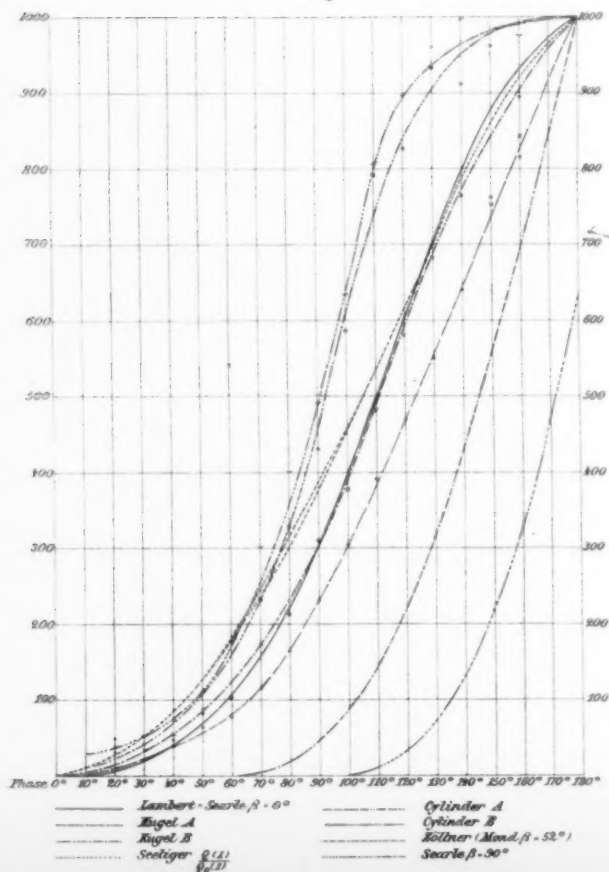
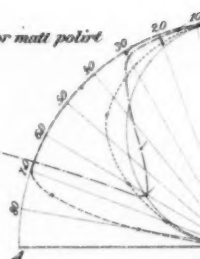


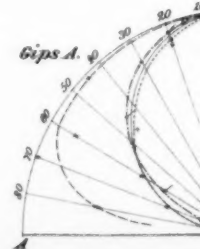
Fig. 8.



Marmor matt polirt



Gips A.



Messersch

Fig. 2.

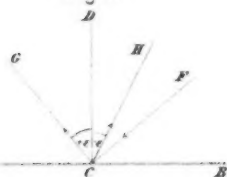


Fig. 3.

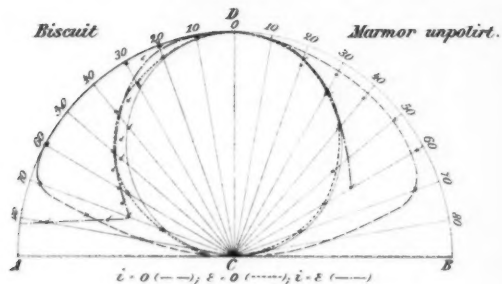


Fig. 4.

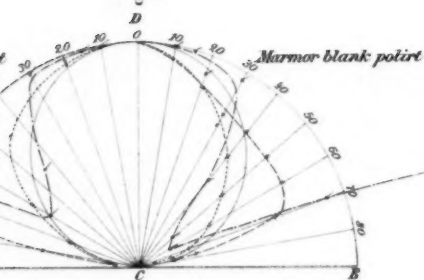


Fig. 6.

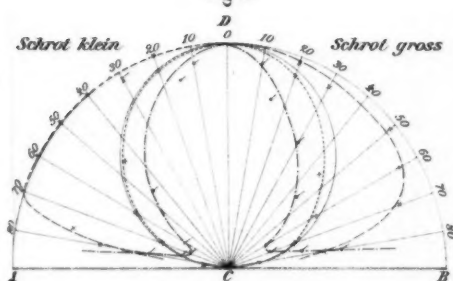


Fig. 5.

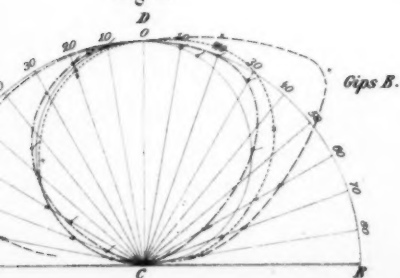
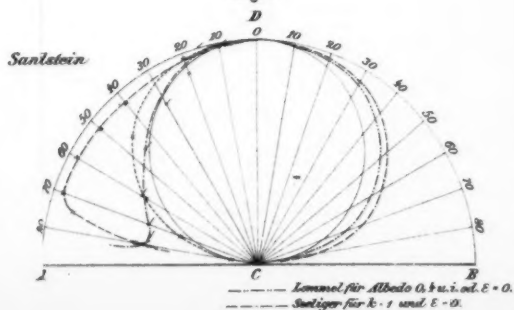


Fig. 7.



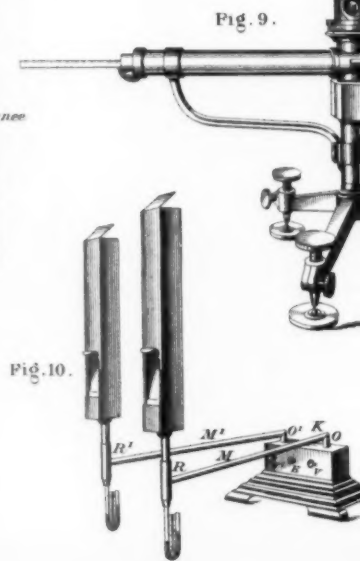
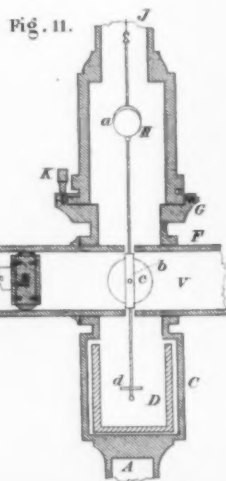
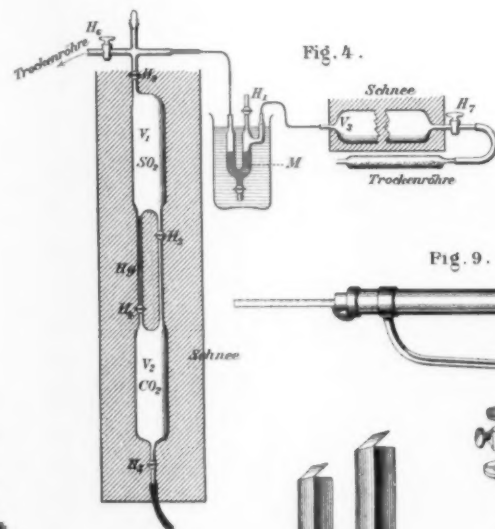
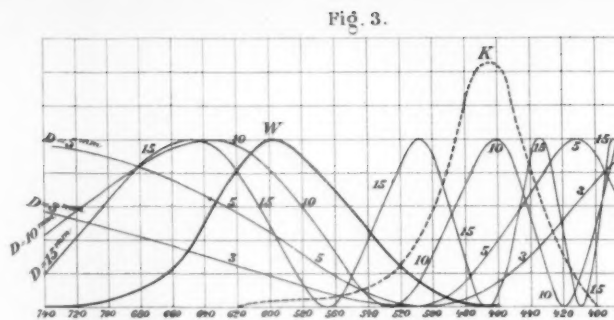
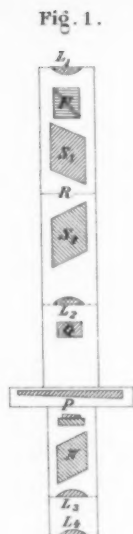
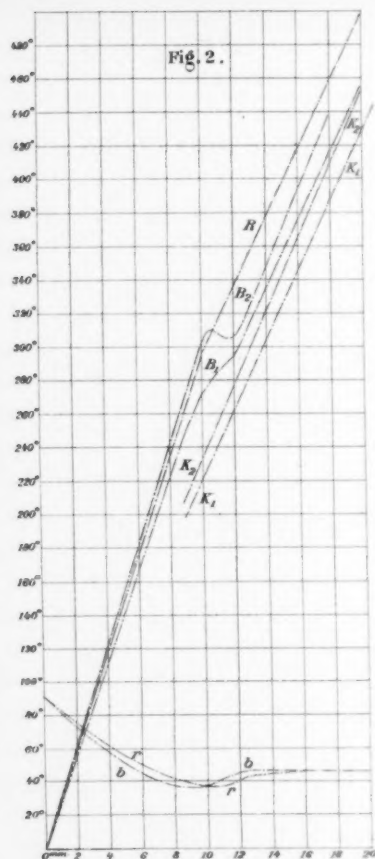


Fig. 5.

Topas

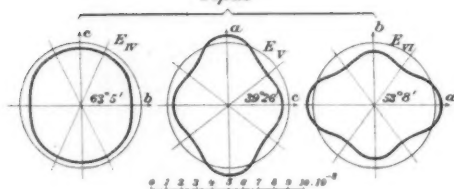


Fig. 6.

Baryt.

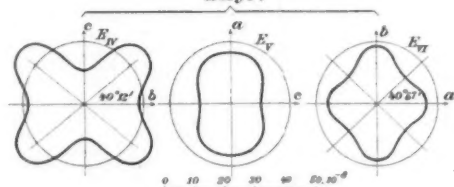


Fig. 7.

Topas.

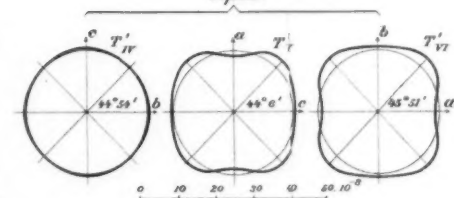


Fig. 8.

Baryt

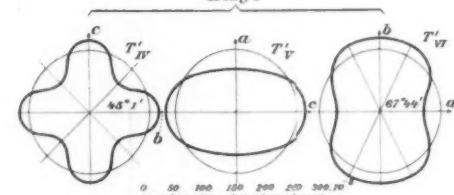


Fig. 12.

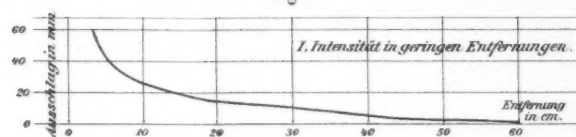


Fig. 13.

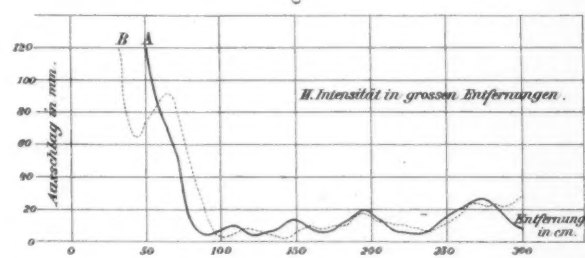


Fig. 14.

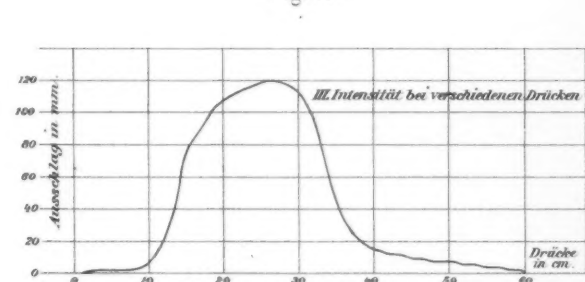
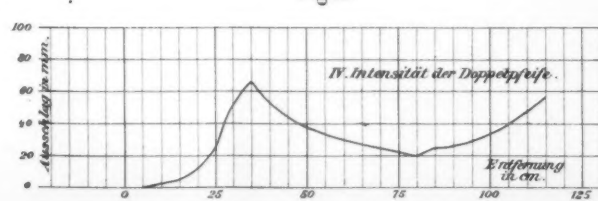


Fig. 15.



11

Michigan Band 11
1888.

N^o 8a.

ANNALEN
DER
PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XXXIV. HEFT 4.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT SIEBZIGSTEN BANDES
VIERTES HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU BERLIN

UND INSBESONDERE DER HERREN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.



LEIPZIG, 1888.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

Geschlossen am 20. Mai 1888.

Um gest. Beachtung beinehteter Anzeige, Heft No. 8b. betreffend, wird gebeten.

I n h a l t.

| | Seite |
|---|-------|
| I. H. Hertz. Ueber electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion | 609 |
| II. A. Schleiermacher. Ueber die Wärmeleitung der Gase | 623 |
| III. A. Wüllner. Ueber den Einfluss der Dicke und Helligkeit der strahlenden Schicht auf das Aussehen des Spectrums | 647 |
| IV. H. Lorberg. Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermostrome | 662 |
| V. F. Koláček. Beiträge zur electromagnetischen Lichttheorie | 673 |
| VI. F. Narr. Ueber die Wirkung des Lichtes auf statische Ladungen | 712 |
| VII. P. Volkmann. Bemerkungen zu den Phasenänderungen des von durchsichtigen Körpern in der Nähe des Polarisationwinkels partiell reflectirten Lichtes | 719 |
| VIII. W. Hallwachs. Ueber die Electrisirung von Metallplatten durch Bestrahlung mit electrischem Licht | 731 |
| IX. R. Pictet. Einige Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Ad. Blümcke: „Ueber die Bestimmung der specifischen Gewichte und Dampfspannungen einiger Gemische von schwefeliger Säure und Kohlensäure | 784 |
| X. H. Lorberg. Nachtrag zu dem Aufsatz: „Einige Bemerkungen zur Theorie der Thermostrome“ | 796 |

Die geehrten Herren Mitarbeiter erlaubt sich die Redaction der Annalen behufs correcter Herstellung des Druckes und der Tafeln, sowie richtiger Versendung der Separatabdrücke ergebenst zu ersuchen:

- 1) die Zeichnungen in möglichst exacter Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in den Text selbst einzufügen);
- 2) Citate am Rande oder unten auf den Seiten der Manuscripte (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen;
- 3) falls ausnahmsweise mehr als die 50 von der Verlagsbuchhandlung gratis abzugebenden Separatabzüge gewünscht werden, dies auf der ersten Seite des Manuscriptes (nicht erst auf dem Correcturbogen) gefälligst bemerken zu wollen;
- 4) Reclamationen bezüglich der Separatabzüge direct an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Wiederabdruck der in den Annalen der Physik und Chemie veröffentlichten Abhandlungen ist ohne besondere Genehmigung nicht gestattet.

Für die über die Zahl 50 bestellten Separatabdrücke werden berechnet: per Druckbogen oder Theil eines Bogens 5 \mathfrak{g} , per Tafel 5 bis 10 \mathfrak{g} , ferner die Auslagen für Broschiren und Francosendung.

un
ga
m

in
F
in
de
so
w
ab
de
ve
ei
th
Z
oa
O

he
un
de
D
A
de
so

Zur gefl. Beachtung.

Die Redaction der Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie erlaubt sich hiermit, die Herren Fachgenossen ganz ergebenst auf einen häufig vorkommenden Missstand aufmerksam zu machen.

Eine grosse Anzahl von Abhandlungen erscheint zunächst in Gesellschaftsschriften und wird aus ihnen in die einzelnen Fachzeitschriften übernommen. Eine solche Theilung des Stoffes in die einzelnen Materien ist auch absolut nöthig. Die Redaction der „Annalen der Physik und Chemie“ hat es sich in solchen Fällen zur Pflicht gemacht, stets die Stelle anzugeben, wo zuerst der Aufsatz erschienen ist. Dies Verfahren wird aber leider nicht überall eingehalten. So werden z. B. die in den Comptes Rendus und in den italicischen Akademieschriften veröffentlichten Arbeiten in den verschiedensten Journalen ohne einen Hinweis auf den Ort der ersten Veröffentlichung mitgetheilt. Oft wird auch dasselbe Manuscript an verschiedene Zeitschriften gleichzeitig gesendet und erscheint in allen früher oder später, sei es in der Ursprache, sei es übersetzt als Originalmittheilung.

Für den Gelehrten, der die einschlägige Literatur beherrschen muss, erwächst hierdurch eine ebenso schwere wie unnütze Belastung, indem er veranlasst wird, in den verschiedenen Veröffentlichungen immer neue Arbeiten zu vermuthen. Diese Erschwerung in dem Verfolgen der neu erscheinenden Arbeiten wird natürlich besonders drückend von der Redaction der Beiblätter empfunden, die die Aufgabe haben, die gesammte physikalische Literatur zu bearbeiten.

Wir möchten daher an die Herren Fachgenossen, sowie an die Herren Herausgeber der einzelnen Zeitschriften die dringende Bitte richten, stets auf die früheren Publicationen der Arbeiten hinzuweisen, etwa mit dem Vermerk, ob die neue Veröffentlichung ausführlicher oder kürzer ist etc.

Hieran anschliessend möchten wir noch die Bitte knüpfen, dass bei Separatabzügen stets ausser der Seite und dem Band die fortlaufende Paginirung der Zeitschrift, aus der sie entnommen sind, angegeben wird, wie dies bereits seit einigen Jahren bei den Veröffentlichungen mehrerer Akademien und bei den meisten Fachzeitschriften eingeführt ist.

Hochachtungsvoll

Die Redaction der Beiblätter

Prof. E. Wiedemann.

Extraheft No. 8^b betreffend.

Wie im vorigen Jahr liegt auch jetzt wieder die Nothwendigkeit vor, hinter dem 8. Heft des laufenden Jahrgangs der *Annalen der Physik und Chemie*

ein ausserordentliches Heft, No. 8^b einzuschalten,

da die ordentlichen Hefte zur Aufnahme aller eingelaufenen und zur Mittheilung geeigneten Abhandlungen nicht ausreichen und die Publikation der letzteren nicht bis auf ungewisse Zeit verschoben werden kann.

Das ausserordentliche Heft No. 8^b wird, wie das vorjährige, aus etwa 20 Bogen Text und 3 lithogr. Tafeln bestehen, mit der Seitenzahl sich an No. 8^a anschliessen und somit das letzte Heft des 34. Bandes, dessen Titel und Inhaltsverzeichniss es auch enthält, bilden.

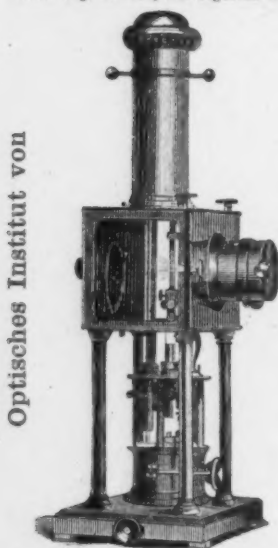
Es wird allen Abonnenten, welche die *Annalen* durch den Buchhandel oder direct vom Verleger beziehen, ohne besondere Bestellung unter Berechnung von M 5,40 zugesandt werden; nur für die durch die Post-Zeitungsstelle besorgten Abonnements ist besondere Bestellung des Heftes erforderlich.

Durch Einschaltung solcher ausserordentlichen Hefte, wie sie auch in den Jahren 1880, 82, 83 und 87 erschienen, während in den Jahren 1884, 85 und 86 die gewöhnlichen 12 Hefte ausreichten, hofft man den Schwankungen des Materials in der zweckmässigsten Weise gerecht zu werden, ohne wieder zu der Ausgabe der unbequemen Ergänzungsbände schreiten zu müssen.

Apparate

zur objectiven Darstellung

der Spectral- und Polarisations-Erscheinungen, mikroskopischer Vergrößerungen photographischer und gemalter Bilder von wissenschaftlichen Gegenständen, von Gegenden u. s. w.



Optisches Institut von

A. Krüss in Hamburg.

An Universitäten, höhern Lehranstalten und für öffentliche Vorträge mit grossem Erfolg vielfach im Gebrauch.
Preisocourante auf portofreie Anforderungen gratis.

Optisches Institut
von A. Krüss in Hamburg.

Soeben wird im Verlag von
Joh. Ambr. Barth in Leipzig
ausgegeben:

Das Licht.

Zwölf Vorlesungen

VON

G. G. Stokes F.R.S. etc.

Nebst einem Anhang

über Lichtabsorption und Fluorescenz.

Uebersetzt von

Dr. O. Dziobek,

Docent an der Techn. Hochschule zu Berlin.

XII, 308 Seit. gr. 8°, mit Portr.

Preis geh. M. 5.—

STOKES' „Lectures on Light“ (London 1887) sind ein bis jetzt kaum erreichtes Beispiel dafür, wie ein wissenschaftlicher Gegenstand gründlich und zugleich allgemein verständlich behandelt werden kann, und eine deutsche Ausgabe dieser Vorträge war in der That ein Bedürfniss.

Der Werth derselben für den Physiker von Fach wird noch erhöht durch die beigelegte Uebersetzung zweier von demselben Gelehrten früher gehaltenen, in der Serie „Science Lectures“ veröffentlichten Vorträge über Gebiete, auf denen die Autorität des Verf. allgemein bekannt ist.

Die neuesten (9. 10. 11.) Hefte des

Journal für prakt. Chemie, herausgeg. von E. v. Meyer

(Leipzig, J. A. Barth)

enthalten folgende Original-Abhandlungen:

Al. Faworsky: Isomerisationserscheinungen der Kohlenwasserstoffe C_nH_{2n-2} . — H. Finger: Ueber Benzazimid. — C. Willgerodt: Jodirung phenolartiger Körper mit den Jodstickstoffen. — Derselbe: Vorläufige Mittheilungen zur Kenntniss der Hydrazine. — A. Claus: Ueber die Constitution des Benzols und die centrale Bindung der aromatischen Kohlenstoffkerne. — R. Fresenius: Chemische Untersuchung der kleinen Schützenhofquelle zu Wiesbaden. — A. Michael: Ueber das Verhalten von Natriummalonäther gegen Resorcinol. — A. Michael: Zur Constitution des Natriumacetessigäthers.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

